高等学校工科数学系列丛书

微积分教程

学习指导与习题精解（上册）

主　编　李　斌　王晓莺

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

微积分教程学习指导与习题精解(上册)

主编　李　斌　王晓莺

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书是配合哈尔滨工程大学应用数学系编写的《微积分教程》一书而使用的辅导参考书。本书分上、下两册。上册内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及定积分的应用。

本书是供高等院校工科类各专业高等数学学习使用的辅导书，也可以作为习题课教材，同时还可以作为报考硕士研究生复习高等数学的参考书籍。

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程学习指导与习题精解.上/李斌，王晓莺主编.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5661-0222-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①李…②王… Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 166550 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江地质测绘印制中心
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 12.5
字　　数 260 千字
版　　次 2011 年 8 月第 1 版
印　　次 2011 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 28.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

微积分课程是工程院校学生必修的一门基础课，它在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力，以及提高学生运算技能、综合应用能力的过程中发挥着极大的作用。

本书是由哈尔滨工程大学应用数学系的教师在总结了多年教学经验和成果的基础上编写而成的，目的是为了帮助学生透彻地理解和掌握微积分基本理论，从而使学生所学到的知识得到巩固与提高，同时也是哈尔滨工程大学应用数学系编写的《微积分教程》配套辅导书。

本书每章分两大部分内容。第一部分是按章编写的学习指导与练习，其中包括知识要点、典型例题、同步训练题、测验题、同步训练题答案及测验题答案六个部分；第二部分给出了《微积分教程》中的部分习题的详细解答。

在本书编写中，我们力图突出以下特点：

1. 在每章的知识要点中，力图将本章的内容准确、简洁、清晰地表述出来，以使学生在较短的时间内能够准确而全面地把握本章知识的脉络。

2. 在典型例题中，尽量突出解题思路的分析、解题方法的归纳整理以及易错地方的提醒。有些例题也许不是最难的，但却是学生在学习中容易出现问题的地方。

3. 在典型例题、同步训练题与测验题中，题目由浅入深，循序渐进，符合学生掌握知识的方式。除此之外也配有综合题，以利于提高学生的综合水平。

4. 本书是一本伴随学生学习微积分课程的辅导用书，因此有些问题的解法是逐渐总结的。如求极限的方法在第1,3,5章都有所阐述。但同时它对于考研的学生来说，也是一本很好的辅导书，因为所有的知识要点均渗透于字里行间。

参加本书编写的人员有李斌、王晓莺、姚红梅、柴艳有、陈志杰、李强、李明、王淑娟、张文颖。

本书编写过程中，得到了哈尔滨工程大学应用数学系的领导与广大教师的帮助与支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2011年6月

目　　录

第1章　函数与极限

1.1　知识要点

1.1.1　函数

1. 需要了解的基本概念：集合、邻域、确界、映射（单射、满射、复合映射）、函数（复合函数、反函数、分段函数、隐函数、基本初等函数、初等函数等）.

2. 需要掌握的基本性质：实数集及确界的性质、函数的单调性、有界性、周期性及奇偶性、函数的四则运算及复合函数、反函数的运算性质、基本初等函数的性质及其图形.

1.1.2　极限

1. 数列极限与函数极限的概念

数列极限与函数极限的概念见表1－1.

表1－1　数列极限与函数极限

对任意给定的	总存在	条件	记作
$\forall\varepsilon>0$	$\exists N\in N^+$	当 $n>N$ 时，$\|x_n-A\|<\varepsilon$	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$
	$\exists\delta>0$	当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$
	$\exists X>0$	当 $\|x\|>X$ 时，$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

2. 极限的性质

极限性质见表1－2.

表1－2　极限的性质

性质	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$
唯一性	若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$，则必有 $A=B$	若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则必有 $A=B$
保号性（以 $A>0$ 为例）	$\exists N\in N^+$，使得当 $n>N$ 时，$x_n>0$	$\exists\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$
有界性	$\exists M>0$，使得对一切 x_n 都有 $\|x_n\|\leqslant M$	$\exists M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)\|\leqslant M$
二者之间的关系	极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是：对任意一个以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$，其对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 极限都存在，且都等于 A	

3. 证明极限存在(不存在)的方法

(1)利用极限的“$\varepsilon-N$”“$\varepsilon-\delta$” 及“$\varepsilon-X$”语言(多用于证明极限存在,见例 8,10);

(2)夹逼准则、单调有界原理(适用于证明极限存在);

(3)柯西收敛准则(既可用于证明极限存在又可用于证明极限不存在,见例 13);

(4)证明分段函数在分段点 x_0 处是否有极限常用下面这个充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a$$

(5)收敛数列与子数列关系以及函数极限与数列极限的关系(多用于证明极限不存在)(见例 9).

4. 计算极限的方法

(1)无穷小的极限运算法则(注意无穷大没有四则运算法则);

(2)极限的四则、复合运算法则(注意定理运用的前提,见例 14);

(3)两个极限存在准则(见例 11,12);

(4)两个重要极限(见例 16,17);

(5)等价无穷小代换(见例 15):当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,e^x-1\sim x(a^x-1\sim x\ln a),\ln(1+x)\sim x,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq0),1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

(6)初等函数在定义区间上连续.

评注 以后我们还会有其他求极限的方法,请大家注意总结.

1.1.3 连续与间断点

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义

定义 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

定义 2 “$\varepsilon-\delta$”语言:$f(x)$ 在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

定义 3 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

定义 4 如果 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$.

评注 以上四种定义是等价的,都可以用来判断函数在一点 x_0 是否连续. 其中定义 4 常用来判断分段函数在分段点的连续性.

2. 间断点

函数的间断点见表 1-3.

表 1－3　函数的间断点

类别	定义	分类	分类定义
第一类	如果 x_0 是函数的间断点，且 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限及右极限都存在	可去间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$
		跳跃间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$
第二类	非第一类间断点	无穷间断点	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$
		振荡间断点	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，也不为无穷

3. 一致连续的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 δ，使得对于区间 I 上的任意两点 x_1,x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是一致连续的.

4. 需要掌握的性质

(1) 一切初等函数在定义区间上连续；

(2) 闭区间上连续函数的性质，即最值定理、介值定理及零点定理(介值定理或零点定理常用于证明方程根的存在性问题)(见例 25)；

(3) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在该区间上一致连续.

1.1.4　思考

1. 为什么利用“$\varepsilon-N$”“$\varepsilon-\delta$” 及“$\varepsilon-X$”语言证明极限的时候可以用放大法呢？(见例 8)

2. 为什么有些时候在证明函数趋于某一点的极限时，可以加上限制条件 $|x-x_0|<a$ ？(见例 10)

3. 为什么等价无穷小替换只在整体积商中用，而在和差形式中不可以用？(见例 15)

1.2　典型例题

例 1　求数集 $S=\{x|x^2<2\}$ 的上、下确界，并依定义加以验证.

解　$\sup S=\sqrt{2}$，$\inf S=-\sqrt{2}$.

显然对 $\forall x\in S$，有 $x<\sqrt{2}$ 成立. 又 $\forall\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$)，由实数的连续性可知在 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}-\varepsilon$ 之间必存在实数 x_0，即 $\exists x_0\in S$，有 $\sqrt{2}-\varepsilon<x_0<\sqrt{2}$ 成立，因此 $\sup S=\sqrt{2}$，同理可证 $\inf S=-\sqrt{2}$.

例 2　求 $f(x)=\arcsin(x^2-x-1)-\sqrt{\ln x}$ 的定义域.

解 由题意有$\begin{cases}|x^2-x-1|\leqslant 1\\ \ln x\geqslant 0\end{cases}$,则

$$\begin{cases}x^2-x\geqslant 0\\ x^2-x-2\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}$$

上述不等式组的解为$1\leqslant x\leqslant 2$,因此$f(x)$的定义域是$1\leqslant x\leqslant 2$.

例3 已知$f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$,求$\varphi(x)$的表达式及其定义域.

解 由$f(x)=\sin x$得$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$,即$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$. 显然函数$\varphi(x)$中$x$满足$|1-x^2|\leqslant 1$,所以其定义域为$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

评注 求复杂函数定义域方法主要是:求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

例4 设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1;\\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0;\\ x^2-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

求 (1)$f(x)+\varphi(x)$;(2)$f[\varphi(x)]$.

解 (1)利用$f(x)$,$\varphi(x)$的分段点0与1将定义域分成三部分,也就是

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0;\\ e^x, & 0\leqslant x<1;\\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}\quad \varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0;\\ x^2-1, & 0\leqslant x<1;\\ x^2-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

故有

$$f(x)+\varphi(x)=\begin{cases}e^x+x+2, & x<0;\\ e^x+x^2-1, & 0\leqslant x<1;\\ x+x^2-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

(2)由已知得

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1;\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$$

而$\varphi(x)<1\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ x+2<1\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1<1\end{cases}$,即$x<-1$或$0\leqslant x<\sqrt{2}$;

$\varphi(x)\geqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ x+2\geqslant 1\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1\geqslant 1\end{cases}$,即$-1\leqslant x<0$或$x\geqslant\sqrt{2}$.

所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1;\\ x+2, & -1\leqslant x<0;\\ e^{x^2}-1, & 0\leqslant x<\sqrt{2};\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, x<-1;\\ x^3, \quad -1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$.

解 由 $y=1-2x^2(x<-1)$，得 $y<-1$ 且 $x=-\sqrt{\frac{1}{2}(1-y)}$；

由 $y=x^3(-1\leqslant x\leqslant 2)$，得 $-1\leqslant y\leqslant 8$ 且 $x=\sqrt[3]{y}$，故 $f(x)$ 的反函数为

$$x=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}, y<-1;\\ \sqrt[3]{y}, \ -1\leqslant y\leqslant 8.\end{cases}$$

按照习惯(通常我们将自变量记为 x)，所以 $f(x)$ 的反函数记为

$$\varphi(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, x<-1;\\ \sqrt[3]{x}, \ -1\leqslant x\leqslant 8.\end{cases}$$

评注 求函数表达式时应注意：

(1)只有当函数的定义域相同时，函数才可进行加、减、乘、除运算；

(2)进行函数复合时，要注意复合过程中函数定义域与值域的成立条件；

(3)求分段函数的反函数时，通常分段求反函数再合并，但应注意每段的值域.

例 6 判别函数 $f(x)=x\operatorname{sgn}(\sin x)$ 的奇偶性.

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)=\begin{cases}-1, (2k-1)\pi<x<2k\pi;\\ 0, x=k\pi;\\ 1, 2k\pi<x<(2k+1)\pi.\end{cases}$

显然 $\operatorname{sgn}[\sin(-x)]=-\operatorname{sgn}(\sin x)$ 为奇函数，而 x 也是奇函数，所以 $f(x)=x\operatorname{sgn}(\sin x)$ 为偶函数.

例 7 若函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 满足 $f(x+T)=Kf(x)$(K,T 为正常数)，且 $f(x)=a^x\varphi(x)$(a 为常数)，证明当 $K=a^T$ 时，$\varphi(x)$ 是以 T 为周期的函数.

证明 由 $f(x)=a^x\varphi(x)$ 且 $f(x+T)=Kf(x)$，得

$$a^{x+T}\varphi(x+T)=Ka^x\varphi(x)$$

当 $K=a^T$ 时，有 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的函数.

例 8 试用数列极限的"$\varepsilon-N$"语言证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

(1) **分析** 根据数列极限的"$\varepsilon-N$"语言，关键是寻找使 $\left|n-\sqrt{n^2-n}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立的 n 需要满足的条件，即证明的重点是根据如上不等式来找 N.

证明 由于

$$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}\leqslant\frac{n}{2n^2}$$

故为使$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立,只需$\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}<\varepsilon$成立,即$n>\frac{1}{2\varepsilon}$成立,所以可以取$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$.

综上,对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$,使当$n>N$时,$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\frac{1}{2}$.

(2)**证明** 由于$\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n}<\frac{4}{n}$,故为使$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$成立,只需$\frac{4}{n}<\varepsilon$成立,即$n>\frac{4}{\varepsilon}$成立,所以可以取$N=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]$.

综上,对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]$,使当$n>N$时,$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

评注 (1)用"$\varepsilon-N$"数列极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的关键是根据给定的$\varepsilon$,找对应的$N=N(\varepsilon)$,这往往通过解不等式$|x_n-a|<\varepsilon$实现,有时$N$可直接解出,有时要利用一些技巧将不等式放大.

(2)"$\varepsilon-N$"语言中,只要找到满足条件的N即可,也就是说,只要说明N的存在性就可以,并不一定要找最小的N,因此可以利用放大法找N.

例9 设$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$,证明数列$\{a_n\}$是发散的.

证明 若数列$\{a_n\}$有极限,则极限是唯一的.要证明$\{a_n\}$没有极限,只需找到两个分别收敛到不同值的子列即可.

设k为正整数,若$n=4k$,则

$$a_{4k}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin\frac{4k\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin2k\pi=0\to0,(k\to+\infty)$$

若$n=4k+1$,则

$$a_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(\frac{4k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{4k+1}\to1,(k\to+\infty)$$

因此$\{a_n\}$没有极限.

评注 根据收敛数列与子数列的关系定理,要证明数列$\{a_n\}$是发散的,只需找两个极限不等的子数列或找一个发散的子数列即可.

例10 试用函数极限的"$\varepsilon-\delta$""$\varepsilon-X$"语言证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1}=1$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

(1) **分析**　根据函数极限的"$\varepsilon-\delta$"语言,关键是寻找使 $\left|\dfrac{1}{x-1}-1\right|<\varepsilon$ 成立的 δ 需要满足的条件,即证明的重点是根据如上不等式来找 δ.

证明　由于 $\left|\dfrac{1}{x-1}-1\right|=\dfrac{|x-2|}{|x-1|}$,且 $x\to2$,我们不妨设 $|x-2|\leqslant\dfrac{1}{2}$,于是 $|x-1|=|1+x-2|\geqslant 1-|x-2|\geqslant\dfrac{1}{2}$,即 $\dfrac{|x-2|}{|x-1|}\leqslant 2|x-2|$. 故为使 $\left|\dfrac{1}{x-1}-1\right|<\varepsilon$ 成立,只要 $2|x-2|<\varepsilon$,即 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立,所以可以取 $\delta=\min(\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{2})$.

综上,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\min(\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{2})$,使当 $|x-2|<\delta$ 时,$\left|\dfrac{1}{x-1}-1\right|<\varepsilon$ 成立,即 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-1}=1$.

(2) **分析**　根据函数极限的"$\varepsilon-X$"语言,关键是寻找使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$ 成立的 X 需要满足的条件,即证明的重点是根据如上不等式来找 X.

证明　由于 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,故为使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$ 成立,只需 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$ 成立,即 $X>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$ 成立,所以可以取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

综上,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,使当 $x>X$ 时,$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$ 成立,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

例 11　设 $x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由于

$$1\leqslant x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<2$$

所以数列有界.

又由于

$$x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

显然分母大于零,于是知 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号,另知 $x_{i+1}-x_i$ 与 $x_i-x_{i-1}(i=2,3,\cdots,n)$ 皆同号. 又因为

$$x_2 - x_1 = 1 + \frac{x_1}{1 + x_1} - 1 = \frac{x_1}{1 + x_1} = \frac{1}{2} > 0$$

从而知 $x_{n+1} - x_n > 0$，即 x_n 为单调递增数列.

综上，可知数列极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) = a$$

于是有 $1 + \frac{a}{1+a} = a$，解得 $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$，因为 $x_n \geqslant 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

评注 当数列以递推关系给出时，一般先运用单调有界原理证明此数列极限存在，再计算极限值.

例 12 用夹逼定理求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，其中 $a_n = \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n}$.

解 由于

$$\frac{1}{n^3+n} + \frac{4}{n^3+n} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+1} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+1}$$

又由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+n} + \frac{4}{n^3+n} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+1} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)} = \frac{1}{3}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

评注 有时夹逼定理既可用于证明极限存在又可求极限，通常夹逼定理适用于与无穷项的运算有关的极限计算，例如无穷项和的极限计算(在第 5 章，还可以学到利用定积分计算无穷项和的极限).

例 13 设 $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$，试利用柯西收敛准则证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$，于是 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$，当 $n > N$ 时有 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$，所以当 $n > N$ 时，对任意的自然数 p，有

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

故由柯西收敛准则可知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 14 利用极限的四则运算法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{4 - x^2}$; (2) $\lim\limits_{n \to \infty} [n(\sqrt{n^2 + 4} - n)]$;

(3) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{3}{x^2 + x - 2}\right)$.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(2-x)(2+x)} = -\dfrac{5}{4}$.

(2) 原式 $= \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n}{\sqrt{n^2 + 4} + n} = 2$.

(3) 原式 $= \lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2(x+2) - 3(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}\right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} = -\dfrac{1}{6}$.

评注 在求极限时,未定式 $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$ 使极限四则运算法则不能直接应用,通常需要先对函数作恒等变换,具体如下:

(1) 对 $\dfrac{0}{0}$ 型,一般通过因子分解、分子或分母有理化、三角恒等式等手段约去使分母极限为零的因子.

(2) 对 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,一般通过分子、分母同除以它们的代数和中最高阶无穷大因子.

(3) 对 $0 \cdot \infty$ 型,一般通过将其中一项除到分母上,从而转化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

(4) 对 $\infty - \infty$ 型,经通分、有理化或同时提出最大项可化为 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ 或 $0 \cdot \infty$ 型.

例 15 利用等价无穷小代换计算极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{\sin^3 x}$; (2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cot x - \dfrac{e^{2x}}{\sin x}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \arcsin(3x)}{3^x + 2^x - 6^x - 1}$; (4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - \sqrt[3]{1 + x}}{x}$.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} = \frac{1}{4}.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-1}{\sin x}+\dfrac{1-e^{2x}}{\sin x}\right)$

又因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x}=-2,$$
所以原式 $=-2$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{(1-2^x)(3^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{(1-e^{x\ln 2})(e^{x\ln 3}-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{-(x\ln 2)(x\ln 3)}=-\dfrac{3}{\ln 2\ln 3}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-(\sqrt[3]{1+x}-1)}{x}$,

又因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,$$
$$\lim\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x}{x}=\frac{1}{3},$$
所以原式 $=2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$.

评注 注意不能对和式中某一项作等价无穷小替换.

例 16 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\dfrac{\pi}{2}x$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}\cos 2x}{x^2}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-3x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{-3x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-3x}}\right]^{\frac{-3}{1+x}}=e^{-3}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}$, 令 $y=\tan x$, 则

$$\text{上式}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left[1+\frac{-2y}{1+y}\right]^{\frac{1+y}{-2y}\cdot\frac{-2}{1+y}}=e^{-2}$$