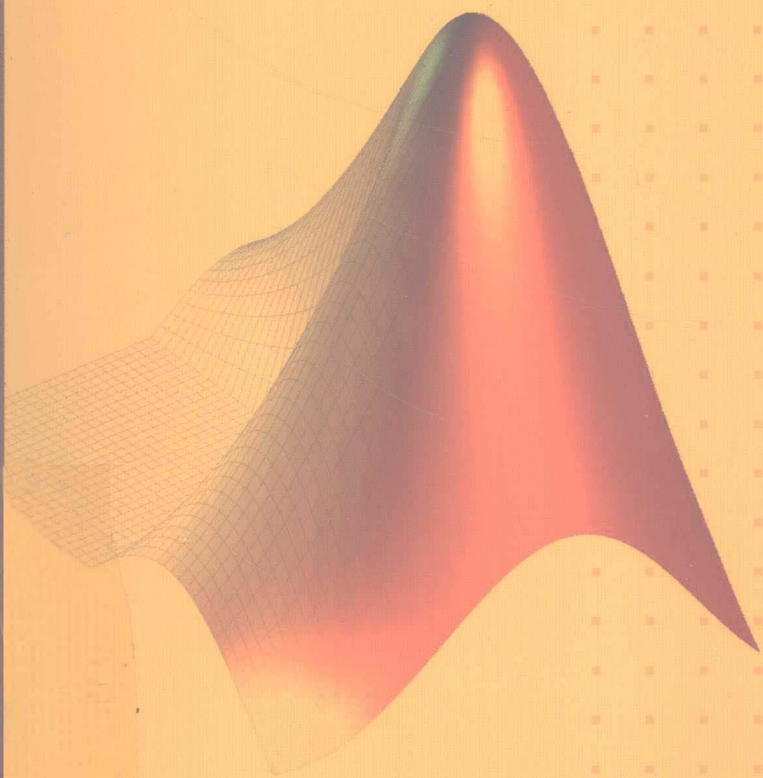


# 复变函数 及其应用

石辛民 翁智 编著



清华大学出版社

# 复变函数及其应用

石辛民 翁智 编著

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书针对理工科应用类专业的教学需求,编写中力求简明易懂、深入浅出、文字精炼、思路清晰、重点突出、篇幅适当,例题的选择强调典型性和覆盖性,难度适当。在吸取现有教材优点的基础上,适度加强了基础知识,增多了应用实例。为减少读者在手工演算上过多花费精力,加入了计算机软件 MATLAB 应用的介绍。

本书适于各类工科、经济学、管理学等专业读者学习参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

复变函数及其应用/石辛民,翁智编著.--北京:清华大学出版社,2012.11  
ISBN 978-7-302-30349-7

I. ①复… II. ①石… ②翁… III. ①复变函数 IV. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 240824 号

责任编辑:石磊 赵从棉

封面设计:常雪影

责任校对:赵丽敏

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:14.5 字 数:311千字

版 次:2012年12月第1版 印 次:2012年12月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:27.80元

---

产品编号:048189-01

复变函数是理工科、经济学、管理学等许多专业的基础课,它对于培养学生的抽象思维、逻辑推理、空间想象和科学计算等诸多能力,都起着特殊的重要作用。

现行的复变函数教材大多保留了 20 世纪传统的理论架构和叙述特点,内容丰富,叙述翔实,论证严谨且充分。但是,应用方面的内容相对偏少,不利于应用学科读者和初学者入门学习和深入理解。另外,由于没有引进计算机软件辅助计算,使许多学生在手工演算上花去太多的时间。本书针对这些缺憾,对传统复变函数教材的内容,在不同方面做了一定的删减和增添,在叙述上进行了多方面的改进。在内容选取和编排上,增强了基础知识和应用方面的内容,删减了一些纯理论性的推导。此外,特别地增加了运用计算机软件 MATLAB 的内容。

本书在内容组织上由浅入深,尽量拉近理论与实际的距离;在结构上做了精心编排,大力吸取现有教材的优点,使其体系严谨,逻辑性更强;在内容的表述上,极力做到简单、明了、直白;在材料选取上,充分考虑复变函数作为基础工具课的需求,着重加强了基础知识、基本理论和计算技巧方面的内容。

为使读者在应用 MATLAB 软件时感到简单方便,书中只介绍运用 MATLAB 指令进行计算的方法,不涉及编程方面的内容。鉴于可能有些读者已经学过这个软件,从实用角度出发,把该软件的内容分散在各章中相关部分介绍,内容的多寡取舍,完全根据需要确定。针对部分没学过这个软件的读者需求,书后加有“附录 A MATLAB 简介”,便于读者了解和查阅。

由于作者水平所限,错误和不妥之处在所难免,敬请读者批评指正!

编者

2012 年 7 月

(电子信箱: aushixm@126.com, wzhi@imu.edu.cn)

<b>第 1 章 复数与复变函数</b> .....	1
1.1 复数及其基本运算 .....	1
1.1.1 复数的基本概念.....	1
1.1.2 复数的代数运算.....	3
1.1.3 平面图形的复数表示.....	5
1.2 复变函数 .....	7
1.2.1 邻域和区域.....	7
1.2.2 复变函数的概念.....	8
1.2.3 函数的极限和连续性 .....	10
1.3 用 MATLAB 软件计算复数.....	12
1.3.1 复数矩阵的输入及其虚、实部的求算.....	12
1.3.2 复数矩阵间的四则运算 .....	18
1.3.3 复变函数取值和极限的求算 .....	20
思考与练习题 .....	23
<b>第 2 章 解析函数</b> .....	24
2.1 解析函数与柯西-黎曼条件 .....	24
2.1.1 函数的导数与微分 .....	24
2.1.2 柯西-黎曼条件 .....	26
2.1.3 初等解析函数 .....	31
2.2 用 MATLAB 软件求算复变函数.....	38
2.2.1 函数表达式、曲面图及方程求解.....	38
2.2.2 函数的取值 .....	43
2.2.3 函数的求导 .....	45
2.3 复变函数应用举例.....	47
2.3.1 电路分析中的相量 .....	47
2.3.2 平面静电场的复势 .....	51
2.3.3 平面流速场的复势 .....	55

思考与练习题 .....	58
<b>第 3 章 积分 .....</b>	<b>60</b>
3.1 复变函数积分的概念 .....	60
3.1.1 复积分的定义及计算方法 .....	60
3.1.2 复变函数积分的性质 .....	63
3.2 柯西定理和不定积分 .....	64
3.2.1 柯西-古萨定理 .....	64
3.2.2 复合闭路定理 .....	65
3.2.3 原函数与不定积分 .....	66
3.3 柯西公式 .....	69
3.3.1 柯西积分公式 .....	69
*3.3.2 柯西积分公式的几个推论 .....	71
3.3.3 柯西导数公式 .....	72
3.4 复积分的 MATLAB 计算 .....	74
3.4.1 直接利用 MATLAB 计算 .....	74
3.4.2 变换后利用 MATLAB 计算 .....	76
3.5 解析函数、调和函数与泊松公式 .....	77
3.5.1 解析函数与调和函数 .....	77
*3.5.2 泊松公式 .....	84
思考与练习题 .....	85
<b>第 4 章 级数 .....</b>	<b>87</b>
4.1 复变函数项级数 .....	87
4.1.1 复数项级数 .....	87
4.1.2 复变函数项级数的概念 .....	91
4.2 幂级数 .....	92
4.2.1 幂级数和阿贝尔定理 .....	92
4.2.2 收敛圆与收敛半径 .....	93
*4.2.3 幂级数的性质和运算 .....	96
4.3 泰勒级数 .....	98
4.3.1 泰勒级数的概念 .....	98
4.3.2 函数展开成泰勒级数 .....	99
4.4 洛朗级数 .....	104
4.4.1 洛朗级数的概念 .....	104

4.4.2 函数展开成洛朗级数·····	108
思考与练习题·····	116
<b>第 5 章 留数</b> ·····	<b>118</b>
5.1 孤立奇点·····	118
5.1.1 孤立奇点分类和可去奇点·····	119
5.1.2 极点和本性奇点·····	120
5.1.3 函数在无穷远处的性态·····	125
5.2 复变函数的留数·····	126
5.2.1 留数定理·····	126
5.2.2 留数总和定理·····	128
5.2.3 留数的求算方法·····	131
5.2.4 用 MATLAB 软件求算留数·····	135
5.3 留数在计算曲线积分中的应用·····	142
5.3.1 利用留数计算曲线积分·····	143
5.3.2 用 MATLAB 计算广义积分·····	153
*5.4 对数留数与辐角原理·····	157
5.4.1 对数留数·····	157
5.4.2 辐角原理·····	158
5.4.3 路西定理·····	159
思考与练习题·····	160
<b>第 6 章 共形映射</b> ·····	<b>162</b>
6.1 解析函数的性质·····	162
6.1.1 解析函数导数的几何意义·····	162
6.1.2 共形映射的概念·····	164
6.2 分式线性映射·····	165
6.2.1 分式线性映射的概念·····	165
6.2.2 分式线性映射的性质·····	166
6.2.3 分式线性映射的典型例题·····	172
6.3 若干初等复变函数·····	181
6.3.1 幂函数和根式函数·····	181
6.3.2 指数函数和对数函数·····	183
*6.3.3 三角函数·····	188
*6.3.4 儒可夫斯基函数·····	190

6.4 共形映射应用举例 .....	192
6.4.1 复杂结构电容器电容的计算 .....	192
6.4.2 数理方程边值问题的简化 .....	195
思考与练习题 .....	197
<b>附录 A MATLAB 简介 .....</b>	<b>198</b>
A.1 MATLAB 的基本功能 .....	198
A.2 MATLAB 的指令窗 .....	199
A.2.1 指令窗简介 .....	199
A.2.2 查询方法 .....	201
A.3 MATLAB 的演示窗 .....	203
A.4 MATLAB 的编辑窗 .....	204
A.4.1 进入编辑调试窗 .....	205
A.4.2 两类 M-文件 .....	205
A.5 MATLAB 的计算功能 .....	206
A.5.1 标识符赋值和字符串显示 .....	206
A.5.2 数值矩阵及其运算 .....	207
A.5.3 符号矩阵及其运算 .....	209
A.6 MATLAB 的图形窗 .....	211
A.6.1 图形窗简介 .....	211
A.6.2 初等绘图方法 .....	213
<b>附录 B 书中用过的 MATLAB 指令 .....</b>	<b>216</b>
<b>部分习题答案或提示 .....</b>	<b>217</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>221</b>



复变函数的主要内容就是研究复数域上的微积分。

本章对复数的基本概念和四则运算做了简要复习、总结和补充,在此基础上介绍了复变函数及其极限和连续性,最后介绍了 MATLAB 软件在这些运算中的应用。

## 1.1 复数及其基本运算

### 1.1.1 复数的基本概念

复数的概念起源于求方程的根,在二次、三次代数方程的求解中,经常遇到负数开平方的问题,随着数学的发展,负数开平方的重要性也日益凸显出来。于是,就定义了虚数单位  $i$  或  $j = \sqrt{-1}$ ,提出了与实数对应的复数概念。

复数  $z$  的一般代数式为

$$z = x + iy$$

其中  $x$  和  $y$  都是实数,分别称为复数  $z$  的实部(Real)和虚部(Imaginary),记作

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

如果复数  $z$  的实部  $x=0$ ,虚部  $y \neq 0$ ,则  $z$  为纯虚数;反之,若  $x \neq 0, y=0$ ,则  $z$  为实数。一个复数等于零,即  $z=0$  是指它的实部和虚部都等于零,即  $x=y=0$ 。两个复数相等,必须是它们的实部和虚部分别相等,可见复数之间是无法比较大小的。

把实部相等、虚部绝对值相等而仅差一个符号的两个复数,称为共轭复数。复数  $z = x + iy$  的共轭复数记作  $\bar{z}$ ,所以  $\bar{z} = x - iy$ 。

一个复数  $z = x + iy$  可以用有序的实数对(简称序对)  $(x, y)$  唯一确定。如果用平面直

角坐标系的横坐标  $x$ 、纵坐标  $y$  所确定的点表示复数  $z = x + iy$  (图 1-1), 就能够建立起平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系。由于  $x$  轴上的点对应着实数,  $y$  轴上的点对应着虚数, 因此, 分别称  $x$  轴和  $y$  轴为实轴和虚轴, 把表示复数  $z$  的平面称为复平面或  $Z$  平面。

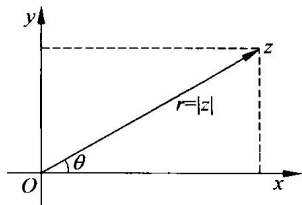


图 1-1 直角坐标系中的复数

引进复平面后, 就可以用几何语言和方法研究复数及其相关问题。例如, 一个复数  $z$ , 可以视为复平面  $Z$  上的点

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

等式右侧称为复数  $z$  的三角式, 式中  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  称为复数  $z$  的模,  $\theta$  称为复数  $z$  的辐角(或相角), 记作

$$\operatorname{Arg}z = \theta$$

由图 1-1 显见

$$\tan\theta = \tan(\operatorname{Arg}z) = \frac{y}{x}$$

由于任何一个不为零的复数, 都有无穷多个辐角, 通常称  $[-\pi, \pi]$  间的辐角为主值, 记作  $\operatorname{arg}z$ 。这样, 任何一个辐角都可以写成

$$\operatorname{Arg}z = \operatorname{arg}z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

通过欧拉公式  $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ , 可以把复数的三角式变换成复数的指数式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

于是, 一个复数可以表示成三种形式: 代数式、三角式和指数式。

**例 1.1** 将下列复数变换成三角式和指数式:

$$(1) z = -\sqrt{12} - 2i; \quad (2) z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}.$$

**解** (1) 复数  $z$  的模  $r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$ , 辐角  $\theta = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

由于  $x$  和  $y$  均取负值, 故  $\theta$  在第 3 象限, 于是得出  $\theta = -\frac{5}{6}\pi$ 。所以

$$z = 4 \left[ \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) \right]$$

据此可以写出复数  $z$  的指数式

$$z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$$

(2) 题设的  $z$  虽然是三角函数形式, 但与复数的标准三角式不同, 应该使其标准化。由题设可知, 复数  $z$  的模  $r = 1$ , 而

$$\sin \frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{3\pi}{10}, \quad \cos \frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{3\pi}{10}$$

所以得出复数  $z$  的三角式和指数式分别为

$$z = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10}; \quad z = e^{i\frac{3\pi}{10}}$$

## 1.1.2 复数的代数运算

### 1. 复数的加减和乘法运算

复数由实部和虚部组成,因此,两个复数进行加减运算规定为它们的实部和虚部分别进行加减运算。设复数  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , 它们的加减运算则为

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

复数  $z_1$  和  $z_2$  相乘,规定为

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

如果将复数写成三角式和指数式,设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

则有

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

于是便可得出

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2$$

可见,两个复数乘积的模等于它们模的乘积,辐角等于它们的辐角相加。由于辐角具有多值性,因此,  $\text{Arg}(z_1 z_2)$  和  $\text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2$  都表示由无穷多个数构成的数集,它们间的相等则表示两个数集的全体是相同的。

$n$  个相同复数  $z$  连乘,称为  $z$  的  $n$  次幂,记作  $z^n$ ,即

$$\underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\uparrow} = z^n$$

若把复数  $z$  表示成三角式和指数式,则有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

若把复数  $z$  的  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) 次方根  $\sqrt[n]{z}$  记作  $w$ , 即  $w = \sqrt[n]{z}$ , 假设

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

让  $n$  个  $w$  连乘,得出  $w$  的  $n$  次幂

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

于是可得

$$\rho^n = r, \quad \cos n\varphi = \cos\theta, \quad \sin n\varphi = \sin\theta$$

使两个三角函数等式成立的充要条件是

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

由此得出

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

根据代数方程的有关理论可知,  $\sqrt[n]{z}$  有  $n$  个根  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ , 所以得出

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

每个  $k$  值对应一个根。若取  $k \geq n$  时, 上式的取值将会重复出现, 例如, 当取  $k=n$  时,  $\sqrt[n]{z}$  的值与取  $k=0$  的值是一样的。

在上述的三角式中, 如果取复数  $z$  的模  $r=1$ , 便得出棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

如果定义  $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ , 则上面的公式在  $n$  为负整数时依然成立。

**例 1.2** 求  $z = \sqrt[4]{1+i}$ 。

**解** 由于  $|1+i| = r = \sqrt{2}$ , 故  $1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ 。根据  $\sqrt[n]{z}$  的三角式, 得

$$w_k = \sqrt[8]{2} \left[ \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right]$$

由于  $k < n=4$ , 故取  $k=0, 1, 2, 3$ , 得出  $w_0, w_1, w_2, w_3$  四个解, 它们分别为

$$w_0 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right)$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right)$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right)$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right)$$

这四个根是内接于圆心在原点、半径为  $\sqrt[8]{2}$  圆周的正方形的四个顶点 (图 1-2), 且

$$w_1 = iw_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -iw_0$$

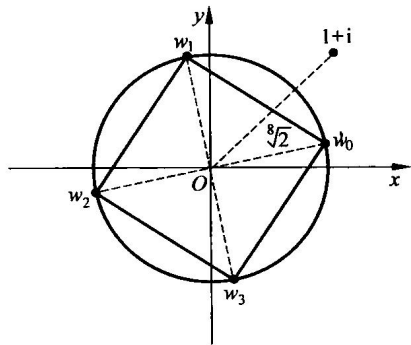


图 1-2 复平面上的  $\sqrt[4]{1+i}$

## 2. 复数间的除法运算

通常规定满足下述关系的复数  $z$  为  $z_1$  除以  $z_2$  的商

$$z_2 z = z_1, \quad z_2 \neq 0$$

其中复数  $z = x + iy$ 。由于  $z = \frac{z_1}{z_2}$ , 若  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , 则可得出

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

可见

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

如果将复数写成指数式, 即  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , 则

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

可见, 两个复数商的模等于它们模的商, 辐角等于被除数与除数辐角之差。

实数中的二项式公式, 移植到复数域中仍然成立, 即(式中规定  $0! = 1$ )

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^{n-k} z_2^k, \quad n = 1, 2, \dots$$

此外, 很容易证明复数的代数运算满足如下规律:

- (1) 交换律  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ;  $z_1 z_2 = z_2 z_1$   
 (2) 结合律  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ;  $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$   
 (3) 分配律  $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

**例 1.3** 设复数  $z_1 = 5 - 5i$ ,  $z_2 = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$ , 求  $z_1 \bar{z}_2$  和  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ 。

**解** 复数  $z_1$  已经是代数式, 将复数  $z_2$  也化成代数式

$$z_2 = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = \frac{i}{i(-i)} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$(1) z_1 \bar{z}_2 = (5-5i) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} - \frac{15}{2}i + \frac{5}{2}i = 5(2-i);$$

$$(2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{10(1-i)}{3-i} = \frac{10(1-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = 3+1-2i = 4-2i$$

所以得出

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 4 + 2i$$

**例 1.4** 利用棣莫弗公式把复数  $(\sqrt{3} + i)^7$  展开。

**解** 先将复数写成指数式, 再用棣莫弗公式。于是, 有

$$(\sqrt{3} + i)^7 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}} = (2^6 e^{i\pi})(2e^{i\frac{\pi}{6}}) = -64(\sqrt{3} + i)$$

### 1.1.3 平面图形的复数表示

既然一个复数  $z = x + iy$  与复平面上的一点相对应, 则平面图形就可以用复数形式的方程(或不等式)来表示; 反之, 由给定的复数形式方程(或不等式), 便可确定出它所表示的平

面图形。

**例 1.5** 求出过两点  $z_1 = x_1 + iy_1$  和  $z_2 = x_2 + iy_2$  的直线的复数表示式, 并求出线段  $\overline{z_1 z_2}$  的中点。

**解** 过点  $z_1$  和  $z_2$  的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

换成复数形式, 为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \leq t \leq \infty$$

取  $t=1/2$ , 可得出线段  $\overline{z_1 z_2}$  的中点为

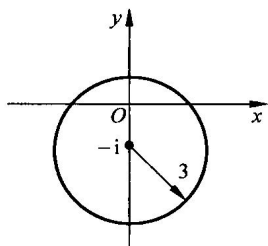
$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

**例 1.6** 求下列方程所表示的曲线:

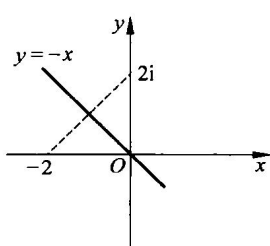
(1)  $|z+i|=3$ ; (2)  $|z-2i|=|z+2|$ ; (3)  $\operatorname{Re}(\bar{z}+2i)=3$ 。

**解** (1) 方程表示所有与点  $-i$  间距离均为 3 的点的轨迹, 即中心为  $-i$ 、半径为 3 的圆(图 1-3(a))。它的直角坐标方程为

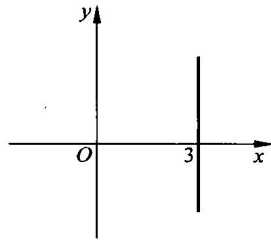
$$|x+i(y+1)|=3, \quad \text{即} \quad x^2+(y+1)^2=9$$



(a)



(b)



(c)

图 1-3 例 1.6 用复数方程表示的图形

(2) 方程表示到点  $2i$  和  $-2$  距离相等的点的轨迹, 即连接  $2i$  和  $-2$  两点线段的垂直平分线(图 1-3(b))。所以方程应该为

$$y = -x$$

(3) 设  $z = x + iy$ , 则  $\bar{z} + 2i = x + i(2 - y)$ , 所以有

$$\operatorname{Re}(\bar{z} + 2i) = x$$

再据题设  $\operatorname{Re}(\bar{z} + 2i) = 3$ , 则得出所求曲线方程为  $x = 3$ , 即一条平行于  $y$  轴的直线(图 1-3(c))。

## 1.2 复变函数

以复数作为自变量的函数,称为复变函数,它的定义域和值域都是复数域。复变函数的理论和方法在自然科学及工程技术中有着广泛的应用。

### 1.2.1 邻域和区域

同研究实变函数一样,首先要给出复变函数的定义域和值域。复数自变量在复平面上变化的范围,称为复变函数的定义域,复变函数取值的范围,称为复变函数的值域。复变函数的定义域和值域都是区域,而不再像实变函数那样是区间了。在研究区域问题时,首先得熟悉下面几个概念。

**邻域** 在复平面上以复数  $z_0$  为圆心,正数  $\delta$  为半径的圆  $|z - z_0| < \delta$  内的所有点的集合,称为  $z_0$  的  $\delta$  邻域,而把满足不等式  $0 < |z - z_0| < \delta$  的点集,称为  $z_0$  的去心  $\delta$  邻域(图 1-4)。

**内点** 若  $z_0$  及其某一邻域内的所有点都属于点集  $D$ ,则称点  $z_0$  是点集  $D$  的内点。

**外点** 若  $z_0$  及其某一邻域均不属于点集  $D$ ,则称  $z_0$  是点集  $D$  的外点。

**边界点** 对于区域  $D$  来说,点  $P$  不属于  $D$ ,但在  $P$  的任意小邻域内总是含有属于  $D$  的点,则称  $P$  为  $D$  的边界点。它既不是  $D$  的内点,也不是  $D$  的外点,边界点的全体称为边界线。

**区域** 指满足下述两个条件的点集:①该点集全由内点组成;②该点集具有连通性,即该点集中任意两点都可以用一条折线连接起来,而折线上所有的点都属于该点集。

**闭区域** 区域  $D$  及其边界线共同组成的点集,称为闭区域(包含边界线的点集)。

复平面上的区域可以有多种形式,例如,用不等式  $|z - z_0| < r$  表示的圆域;用不等式  $a < |z - z_0| < b$  表示的环域,它的边界由两个圆周  $|z - z_0| = a$  和  $|z - z_0| = b$  组成;若将圆域和环域中的  $<$  换成  $\leq$ ,则它们就分别表示闭圆域和闭环域(包含边界线的区域)。另外,还有无界域,像用  $0 < \arg z < \varphi$  表示的角形区域;用  $a < \operatorname{Im} z < b$  表示的带形区域等。

在复平面上的区域  $D$  内,任作一条简单的闭曲线,它所围起的部分总是属于  $D$ ,则称区域  $D$  为单连通区域。不是单连通的区域,称为多连通区域或复连通区域。

一般把不包含无穷远点的复平面称为复平面,包含无穷远点的复平面称为扩充复平面。在复数集合中引入唯一的复数  $\infty$  与扩充复平面上的无穷远点相对应。如果复数  $z^* = \infty$ ,则

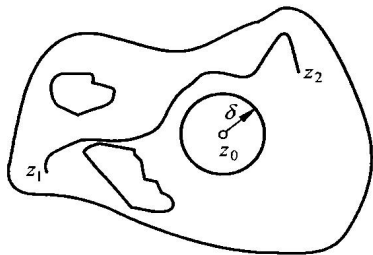


图 1-4 邻域、区域示意图

它的实部、虚部、辐角均无意义。它的模 $|z^*|$ 规定为 $\infty$ ,对于其他任何复数 $z$ ,都有 $|z| < \infty$ 。任何一个不为零的有限复数 $\alpha$ 与这个 $z^*$ 间的运算,规定如下:

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty; \quad \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty; \quad \frac{\alpha}{0} = \infty; \quad \frac{\alpha}{\infty} = 0$$

而且约定 $\infty \cdot \infty, \infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 均无意义。

## 1.2.2 复变函数的概念

### 1. 复变函数的定义

设 $G$ 是复数 $z=x+iy$ 的一个集合,如果存在一个法则,使得 $G$ 中的每个点 $z$ ,即一个复数,都与一个或多个复数值 $w=u+iv$ 相对应,则称 $w$ 是 $z$ 的函数,记作

$$w = f(z), \quad z \in G$$

由于自变量 $z$ 和函数值 $w$ 都是复数,故称 $f(z)$ 为复变函数。把集合 $G$ 称为函数 $f(z)$ 的定义域,与之对应的值 $w=f(z)$ 组成的复数集合 $G^*$ 称为它的值域。如果一个 $z$ 值与一个 $w$ 值对应,则称 $f(z)$ 为单值(或单叶)函数;若一个 $z$ 值与多个 $w$ 值对应,就称 $f(z)$ 为多值函数。一般情况下,我们只讨论单值复变函数。

例如,函数 $w=1/z$ (其中 $\text{Im}z>0$ )是定义在上半平面的单值函数; $w=z^2, w=\bar{z}$ 都是单值函数。而 $w=\sqrt{z}$ 是定义在整个复平面上的多值函数; $w=\sqrt[n]{z}(z \neq 0, n \geq 2), w=\text{Arg}z(z \neq 0)$ 都是多值函数。

复变函数 $w=f(z)$ 也可以看成是复平面 $Z$ 上的点集 $G$ 与复平面 $W$ 上的点集 $G^*$ 间的对应关系。以后常把这种由函数 $w=f(z)$ 确定的对应关系,称为映射或变换。把点 $z$ 称为 $f(z)$ 的原像,而把点 $w$ 称为 $f(z)$ 的像点。实变函数 $y=f(x)$ 研究的是实数轴上一点 $x$ 与实数轴上一点 $y$ 间的对应关系;而复变函数 $w=f(z)$ 研究的是复平面 $Z$ 上的一点与复平面 $W$ 上一点或多点间的对应关系。

一个复数由其实部和虚部构成,实际上它是由一对实数确定的。因此,一个复变函数 $w=f(z)$ 相当于确定了两个实变函数,其关系为

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

例如,复变函数 $w=z^2$ ,若 $z=x+iy, w=u+iv$ ,则

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

它相当于两个二元实变函数,即

$$w = f(z) = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$



## 2. 复变函数的几何意义——映射

复变函数  $w=f(z)$  反映了两对实变量  $(x, y)$  和  $(u, v)$  之间的对应关系, 这已无法像实变函数那样用一个平面形象地表示。但是, 可以用两个复平面上点集间的对应关系来表示。假设单值函数  $w=f(z)$  在复平面  $Z$  的点集  $G$  上有定义, 它的值域是复平面  $W$  上的点集  $G^*$ , 则函数  $w=f(z)$  可视为  $Z$  上的点集  $G$  到  $W$  上的点集  $G^*$  之间的一种变换关系, 这种变换也称为映射。集合  $G$  中的  $z$  映射成集合  $G^*$  中的  $w$ , 则称  $w$  为  $z$  的像,  $z$  为  $w$  的原像。

例如, 函数  $w=f(z)=z^2$  就把  $Z$  上的扇形区域  $\{0<\theta<\pi/4, 0<r<2\}$  映射成  $W$  上的扇形区域  $\{0<\varphi<\pi/2, 0<\rho<4\}$  (图 1-5)。

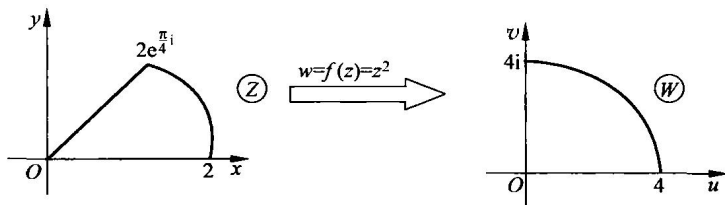


图 1-5 复平面  $Z$  上的扇形映射成复平面  $W$  上的扇形

如果把复平面  $Z$  和复平面  $W$  叠放在一起, 根据映射的意义可以看出, 复变函数  $w=z+1$  是把复平面  $Z$  上的每个点都右移一个单位; 复变函数  $w=iz$  是把复平面  $Z$  上的向量逆时针旋转  $\pi/2$  角度; 复变函数  $w=\bar{z}$  是把复平面  $Z$  上的每一点都映射成它关于实轴的对称点; ……。

**例 1.7** 复变函数  $w=f(z)=z+\frac{1}{z}$  将把复平面  $Z$  上的圆周  $|z|=R$  映射成什么图形?

**解** 把  $Z$  上的圆周写成指数式, 即  $z=Re^{i\theta}$ , 因为  $w=u+iv$ , 所以

$$\begin{aligned} w &= Re^{i\theta} + \frac{1}{Re^{i\theta}} = R(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{R}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\theta + i\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\theta \end{aligned}$$

若令  $a=R+\frac{1}{R}$ ,  $b=R-\frac{1}{R}$ , 则得

$$u = a\cos\theta, \quad v = b\sin\theta$$

显然, 当  $R \neq 1$  时, 有

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

表明这时函数  $w=f(z)$  把  $Z$  上的圆周映射成  $W$  上的椭圆, 其长、短轴分别为  $2a$  和  $2|b|$ 。

若取  $R=0.5$ , 可得  $a=2.5$ ,  $b=-1.5$ , 表明圆周  $|z|=0.5$  被  $f(z)$  映射成椭圆  $L_1$ :