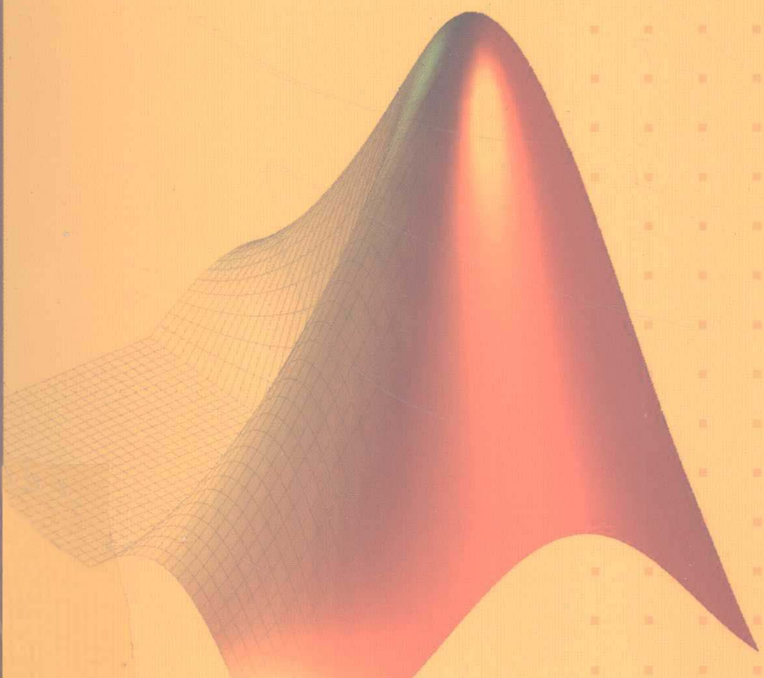
复变函数及其应用

石辛民 翁 智 编著



清华大学出版社

复变函数及其应用

石辛民 翁 智 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书针对理工科应用类专业的教学需求，编写中力求简明易懂、深入浅出、文字精炼、思路清晰、重点突出、篇幅适当，例题的选择强调典型性和覆盖性，难度适当。在吸取现有教材优点的基础上，适度加强了基础知识，增多了应用实例。为减少读者在手工演算上过多花费精力，加入了计算机软件 MATLAB 应用的介绍。

本书适于各类工科、经济学、管理学等专业读者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数及其应用/石辛民，翁智编著. --北京：清华大学出版社，2012.11
ISBN 978-7-302-30349-7

Ⅰ.①复… Ⅱ.①石… ②翁… Ⅲ.①复变函数 Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 240824 号

责任编辑：石　磊　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　**印　　张**：14.5　**字　　数**：311 千字
版　　次：2012 年 12 月第 1 版　**印　　次**：2012 年 12 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：27.80 元

产品编号：048189-01

前言

FOREWORD

复变函数是理工科、经济学、管理学等许多专业的基础课，它对于培养学生的抽象思维、逻辑推理、空间想象和科学计算等诸多能力，都起着特殊的重要作用。

现行的复变函数教材大多保留了20世纪传统的理论架构和叙述特点，内容丰富，叙述翔实，论证严谨且充分。但是，应用方面的内容相对偏少，不利于应用学科读者和初学者入门学习和深入理解。另外，由于没有引进计算机软件辅助计算，使许多学生在手工演算上花去太多的时间。本书针对这些缺憾，对传统复变函数教材的内容，在不同方面做了一定的删减和增添，在叙述上进行了多方面的改进。在内容选取和编排上，增强了基础知识和应用方面的内容，删减了一些纯理论性的推导。此外，特别地增加了运用计算机软件 MATLAB 的内容。

本书在内容组织上由浅入深，尽量拉近理论与实际的距离；在结构上做了精心编排，大力吸取现有教材的优点，使其体系严谨，逻辑性更强；在内容的表述上，极力做到简单、明了、直白；在材料选取上，充分考虑复变函数作为基础工具课的需求，着重加强了基础知识、基本理论和计算技巧方面的内容。

为使读者在应用 MATLAB 软件时感到简单方便，书中只介绍运用 MATLAB 指令进行计算的方法，不涉及编程方面的内容。鉴于可能有些读者已经学过这个软件，从实用角度出发，把该软件的内容分散在各章中相关部分介绍，内容的多寡取舍，完全根据需要确定。针对部分没学过这个软件的读者需求，书后加有“附录 A MATLAB 简介”，便于读者了解和查阅。

由于作者水平所限，错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正！

编　者

2012年7月

（电子信箱：aushixm@126.com，wzhi@imu.edu.cn）

目录

CONTENTS

第1章 复数与复变函数

复变函数的主要内容就是研究复数域上的微积分。

本章对复数的基本概念和四则运算做了简要复习、总结和补充，在此基础上介绍了复变函数及其极限和连续性，最后介绍了 MATLAB 软件在这些运算中的应用。

1.1 复数及其基本运算

1.1.1 复数的基本概念

复数的概念起源于求方程的根，在二次、三次代数方程的求解中，经常遇到负数开平方的问题，随着数学的发展，负数开平方的重要性也日益凸显出来。于是，就定义了虚数单位 i 或 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，提出了与实数对应的复数概念。

复数 z 的一般代数式为

$$z = x + \mathrm{i}y$$

其中 x 和 y 都是实数，分别称为复数 z 的实部(Real)和虚部(Imaginary)，记作

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

如果复数 z 的实部 $x=0$，虚部 $y\neq 0$，则 z 为纯虚数；反之，若 $x\neq 0$，$y=0$，则 z 为实数。一个复数等于零，即 $z=0$ 是指它的实部和虚部都等于零，即 $x=y=0$。两个复数相等，必须是它们的实部和虚部分别相等，可见复数之间是无法比较大小的。

把实部相等、虚部绝对值相等而仅差一个符号的两个复数，称为共轭复数。复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数记作$\bar{z}$，所以$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$。

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用有序的实数对(简称序对)(x,y)唯一确定。如果用平面直

角坐标系的横坐标 x、纵坐标 y 所确定的点表示复数 $z=x+iy$(图 1-1)，就能够建立起平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系。由于 x 轴上的点对应着实数，y 轴上的点对应着虚数，因此，分别称 x 轴和 y 轴为实轴和虚轴，把表示复数 z 的平面称为复平面或 Z 平面。

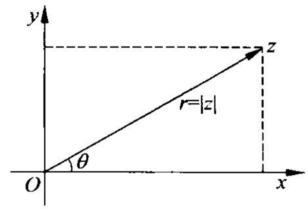


图 1-1　直角坐标系中的复数

引进复平面后，就可以用几何语言和方法研究复数及其相关问题。例如，一个复数 z，可以视为复平面 Z 上的点

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

等式右侧称为复数 z 的三角式，式中 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数 z 的模，θ 称为复数 z 的辐角(或相角)，记作

$$\operatorname{Arg}z = \theta$$

由图 1-1 显见

$$\tan\theta = \tan(\operatorname{Arg}z) = \frac{y}{x}$$

由于任何一个不为零的复数，都有无穷多个辐角，通常称$[-\pi,\pi]$间的辐角为主值，记作 $\arg z$。这样，任何一个辐角都可以写成

$$\operatorname{Arg}z = \arg z + 2k\pi,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

通过欧拉公式 $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$，可以把复数的三角式变换成复数的指数式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

于是，一个复数可以表示成三种形式：代数式、三角式和指数式。

例 1.1　将下列复数变换成三角式和指数式：

(1) $z=-\sqrt{12}-2i$；　　　(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$。

解　(1) 复数 z 的模 $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$，辐角 $\theta=\arctan\dfrac{-2}{-\sqrt{12}}=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

由于 x 和 y 均取负值，故 θ 在第 3 象限，于是得出 $\theta=-\frac{5}{6}\pi$。所以

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

据此可以写出复数 z 的指数式

$$z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$$

(2) 题设的 z 虽然是三角函数形式，但与复数的标准三角式不同，应该使其标准化。由题设可知，复数 z 的模 $r=1$，而

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10},\quad \cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}$$

所以得出复数 z 的三角式和指数式分别为

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10};\quad z=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{10}\mathrm{i}}$$

1.1.2 复数的代数运算

1. 复数的加减和乘法运算

复数由实部和虚部组成，因此，两个复数进行加减运算规定为它们的实部和虚部分别进行加减运算。设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，它们的加减运算则为

$$z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

复数 z_1 和 z_2 相乘，规定为

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$$

如果将复数写成三角式和指数式，设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$$

则有

$$z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

于是便可得出

$$|z_1z_2|=r_1r_2,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$$

可见，两个复数乘积的模等于它们模的乘积，辐角等于它们的辐角相加。由于辐角具有多值性，因此，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)$和 $\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$ 都表示由无穷多个数构成的数集，它们间的相等则表示两个数集的全体是相同的。

n 个相同复数 z 连乘，称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，即

$$\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}=z^n$$

若把复数 z 表示成三角式和指数式，则有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

若把复数 z 的 $n(n\in\mathbb{Z}^+)$次方根$\sqrt[n]{z}$记作 w，即 $w=\sqrt[n]{z}$，假设

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$

让 n 个 w 连乘，得出 w 的 n 次幂

$$w^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

于是可得

$$\rho^n=r,\quad \cos n\varphi=\cos\theta,\quad \sin n\varphi=\sin\theta$$

使两个三角函数等式成立的充要条件是

$$n\varphi=\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

由此得出

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

根据代数方程的有关理论可知，$\sqrt[n]{z}$ 有 n 个根 $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$，所以得出

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

每个 k 值对应一个根。若取 $k \geqslant n$ 时，上式的取值将会重复出现，例如，当取 $k=n$ 时，$\sqrt[n]{z}$ 的值与取 $k=0$ 的值是一样的。

在上述的三角式中，如果取复数 z 的模 $r=1$，便得出棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

如果定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$，则上面的公式在 n 为负整数时依然成立。

例 1.2 求 $z = \sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$。

解 由于 $|1+\mathrm{i}| = r = \sqrt{2}$，故 $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$。根据 $\sqrt[n]{z}$ 的三角式，得

$$w_k = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right]$$

由于 $k < n = 4$，故取 $k = 0,1,2,3$，得出 w_0, w_1, w_2, w_3 四个解，它们分别为

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

这四个根是内接于圆心在原点、半径为 $\sqrt[8]{2}$ 圆周的正方形的四个顶点(图 1-2)，且

$$w_1 = \mathrm{i}w_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -\mathrm{i}w_0$$

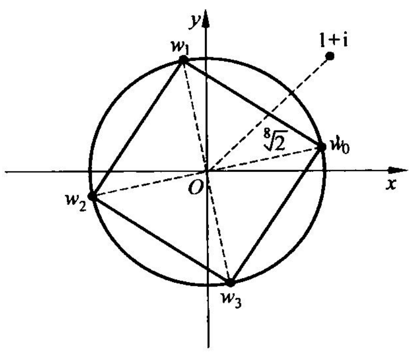


图 1-2 复平面上的 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$

2. 复数间的除法运算

通常规定满足下述关系的复数 z 为 z_1 除以 z_2 的商

$$z_2 z = z_1, \quad z_2 \neq 0$$

其中复数 $z = x + \mathrm{i}y$。由于 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$，若 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，则可得出

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

可见

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

如果将复数写成指数式，即 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

可见，两个复数商的模等于它们模的商，辐角等于被除数与除数辐角之差。

实数中的二项式公式，移植到复数域中仍然成立，即(式中规定 $0!=1$)

$$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^{n-k}z_2^k,\quad n=1,2,\cdots$$

此外，很容易证明复数的代数运算满足如下规律：

(1) 交换律　　$z_1+z_2=z_2+z_1$；$z_1z_2=z_2z_1$

(2) 结合律　　$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$；$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$

(3) 分配律　　$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

例 1.3　设复数 $z_1=5-5i$，$z_2=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $z_1\bar{z}_2$ 和 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$。

解　复数 z_1 已经是代数式，将复数 z_2 也化成代数式

$$z_2=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=\frac{i}{i(-i)}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

(1) $z_1\bar{z}_2=(5-5i)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{15}{2}+\frac{5}{2}-\frac{15}{2}i+\frac{5}{2}i=5(2-i)$；

(2) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{10(1-i)}{3-i}=\frac{10(1-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=3+1-2i=4-2i$

所以得出

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=4+2i$$

例 1.4　利用棣莫弗公式把复数$(\sqrt{3}+i)^7$ 展开。

解　先将复数写成指数式，再用棣莫弗公式。于是，有

$$(\sqrt{3}+i)^7=(2e^{i\frac{\pi}{6}})^7=2^7e^{i\frac{7\pi}{6}}=(2^6e^{i\pi})(2e^{\frac{i\pi}{6}})=-64(\sqrt{3}+i)$$

1.1.3　平面图形的复数表示

既然一个复数 $z=x+iy$ 与复平面上的一点相对应，则平面图形就可以用复数形式的方程(或不等式)来表示；反之，由给定的复数形式方程(或不等式)，便可确定出它所表示的平

面图形。

例 1.5 求出过两点 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的直线的复数表示式，并求出线段 $\overline{z_1z_2}$ 的中点。

解 过点 z_1 和 z_2 的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

换成复数形式，为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty$$

取 $t=1/2$，可得出线段 $\overline{z_1z_2}$ 的中点为

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

例 1.6 求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z+\mathrm{i}|=3$；(2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$；(3) $\mathrm{Re}(\bar{z}+2\mathrm{i})=3$。

解 (1) 方程表示所有与点 $-\mathrm{i}$ 间距离均为 3 的点的轨迹，即中心为 $-\mathrm{i}$、半径为 3 的圆(图 1-3(a))。它的直角坐标方程为

$$|x+\mathrm{i}(y+1)| = 3, \quad 即 \quad x^2 + (y+1)^2 = 9$$

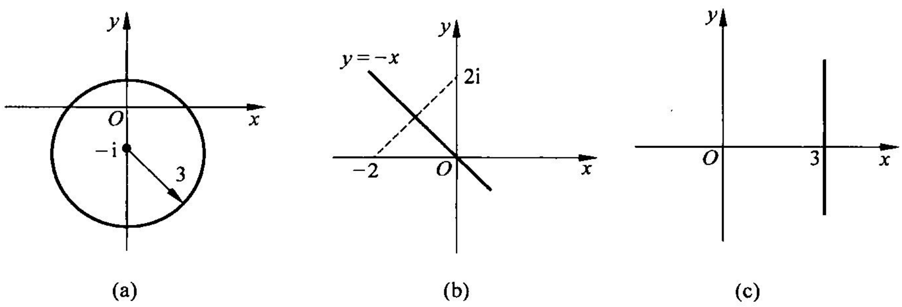


图 1-3 例 1.6 用复数方程表示的图形

(2) 方程表示到点 $2\mathrm{i}$ 和 -2 距离相等的点的轨迹，即连接 $2\mathrm{i}$ 和 -2 两点线段的垂直平分线(图 1-3(b))。所以方程应该为

$$y = -x$$

(3) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}+2\mathrm{i}=x+\mathrm{i}(2-y)$，所以有

$$\mathrm{Re}(\bar{z} + 2\mathrm{i}) = x$$

再据题设 $\mathrm{Re}(\bar{z}+2\mathrm{i})=3$，则得出所求曲线方程为 $x=3$，即一条平行于 y 轴的直线(图 1-3(c))。

1.2 复变函数

以复数作为自变量的函数,称为复变函数,它的定义域和值域都是复数域。复变函数的理论和方法在自然科学及工程技术中有着广泛的应用。

1.2.1 邻域和区域

同研究实变函数一样,首先要给出复变函数的定义域和值域。复数自变量在复平面上变化的范围,称为复变函数的定义域,复变函数取值的范围,称为复变函数的值域。复变函数的定义域和值域都是区域,而不再像实变函数那样是区间了。在研究区域问题时,首先得熟悉下面几个概念。

邻域 在复平面上以复数 z_0 为圆心,正数 δ 为半径的圆 $|z-z_0|<\delta$ 内的所有点的集合,称为 z_0 的 δ 邻域,而把满足不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 的点集,称为 z_0 的去心 δ 邻域(图 1-4)。

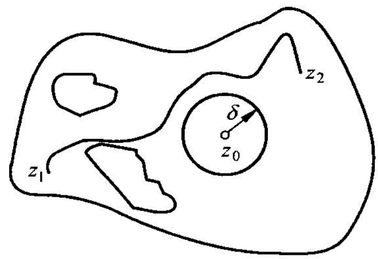


图 1-4 邻域、区域示意图

内点 若 z_0 及其某一邻域内的所有点都属于点集 D,则称点 z_0 是点集 D 的内点。

外点 若 z_0 及其某一邻域均不属于点集 D,则称 z_0 是点集 D 的外点。

边界点 对于区域 D 来说,点 P 不属于 D,但在 P 的任意小邻域内总是含有属于 D 的点,则称 P 为 D 的边界点。它既不是 D 的内点,也不是 D 的外点,边界点的全体称为边界线。

区域 指满足下述两个条件的点集:①该点集全由内点组成;②该点集具有连通性,即该点集中任意两点都可以用一条折线连接起来,而折线上所有的点都属于该点集。

闭区域 区域 D 及其边界线共同组成的点集,称为闭区域(包含边界线的点集)。

复平面上的区域可以有多种形式,例如,用不等式 $|z-z_0|<r$ 表示的圆域;用不等式 $a<|z-z_0|<b$ 表示的环域,它的边界由两个圆周 $|z-z_0|=a$ 和 $|z-z_0|=b$ 组成;若将圆域和环域中的 $<$ 换成 $\leqslant$,则它们就分别表示闭圆域和闭环域(包含边界线的区域)。另外,还有无界域,像用 $0<\arg z<\varphi$ 表示的角形区域;用 $a<\mathrm{Im}z<b$ 表示的带形区域等。

在复平面上的区域 D 内,任作一条简单的闭曲线,它所围起的部分总是属于 D,则称区域 D 为单连通区域。不是单连通的区域,称为多连通区域或复连通区域。

一般把不包含无穷远点的复平面称为复平面,包含无穷远点的复平面称为扩充复平面。在复数集合中引入唯一的复数 ∞ 与扩充复平面上的无穷远点相对应。如果复数 $z^*=\infty$,则

它的实部、虚部、辐角均无意义。它的模$|z^*|$规定为∞，对于其他任何复数 z，都有$|z|<\infty$。任何一个不为零的有限复数 α 与这个 z^* 间的运算，规定如下：

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty; \quad \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty; \quad \frac{\alpha}{0} = \infty; \quad \frac{\alpha}{\infty} = 0$$

而且约定$\infty \cdot \infty$，$\infty \pm \infty$，$0 \cdot \infty$，$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$均无意义。

1.2.2 复变函数的概念

1. 复变函数的定义

设 G 是复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的一个集合，如果存在一个法则，使得 G 中的每个点 z，即一个复数，都与一个或多个复数值 $w=u+\mathrm{i}v$ 相对应，则称 w 是 z 的函数，记作

$$w = f(z), \quad z \in G$$

由于自变量 z 和函数值 w 都是复数，故称 $f(z)$为复变函数。把集合 G 称为函数 $f(z)$的定义域，与之对应的值 $w=f(z)$组成的复数集合 G^* 称为它的值域。如果一个 z 值与一个 w 值对应，则称 $f(z)$为单值(或单叶)函数；若一个 z 值与多个 w 值对应，就称 $f(z)$为多值函数。一般情况下，我们只讨论单值复变函数。

例如，函数 $w=1/z$(其中 $\mathrm{Im}z>0$)是定义在上半平面的单值函数；$w=z^2$，$w=\bar{z}$都是单值函数。而 $w=\sqrt{z}$是定义在整个复平面上的多值函数；$w=\sqrt[n]{z}\,(z\neq 0, n\geqslant 2)$，$w=\mathrm{Arg}z\,(z\neq 0)$都是多值函数。

复变函数 $w=f(z)$也可以看成是复平面 Z 上的点集 G 与复平面 W 上的点集 G^* 间的对应关系。以后常把这种由函数 $w=f(z)$确定的对应关系，称为映射或变换。把点 z 称为 $f(z)$的原像，而把点 w 称为 $f(z)$的像点。实变函数 $y=f(x)$研究的是实数轴上一点 x 与实数轴上一点 y 间的对应关系；而复变函数 $w=f(z)$研究的是复平面 Z 上的一点与复平面 W 上一点或多点间的对应关系。

一个复数由其实部和虚部构成，实际上它是由一对实数确定的。因此，一个复变函数 $w=f(z)$相当于确定了两个实变函数，其关系为

$$w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

例如，复变函数 $w=z^2$，若 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$u + \mathrm{i}v = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$$

它相当于两个二元实变函数，即

$$w = f(z) = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

2. 复变函数的几何意义——映射

复变函数 $w=f(z)$ 反映了两对实变量 (x,y) 和 (u,v) 之间的对应关系，这已无法像实变函数那样用一个平面形象地表示。但是，可以用两个复平面上点集间的对应关系来表示。假设单值函数 $w=f(z)$ 在复平面 Z 的点集 G 上有定义，它的值域是复平面 W 上的点集 G^*，则函数 $w=f(z)$ 可视为 Z 上的点集 G 到 W 上的点集 G^* 之间的一种变换关系，这种变换也称为映射。集合 G 中的 z 映射成集合 G^* 中的 w，则称 w 为 z 的像，z 为 w 的原像。

例如，函数 $w=f(z)=z^2$ 就把 Z 上的扇形区域 $\{0<\theta<\pi/4, 0<r<2\}$ 映射成 W 上的扇形区域 $\{0<\varphi<\pi/2, 0<\rho<4\}$（图 1-5）。

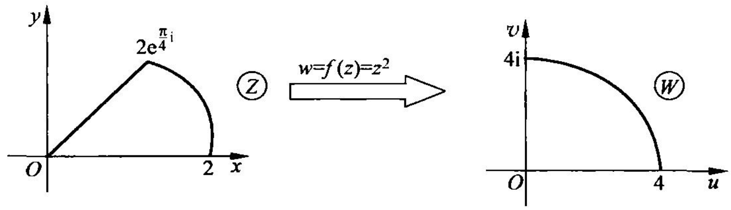


图 1-5 复平面 Z 上的扇形映射成复平面 W 上的扇形

如果把复平面 Z 和复平面 W 叠放在一起，根据映射的意义可以看出，复变函数 $w=z+1$ 是把复平面 Z 上的每个点都右移一个单位；复变函数 $w=\mathrm{i}z$ 是把复平面 Z 上的向量逆时针旋转 $\pi/2$ 角度；复变函数 $w=\bar{z}$ 是把复平面 Z 上的每一点都映射成它关于实轴的对称点；……。

例 1.7 复变函数 $w=f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ 将把复平面 Z 上的圆周 $|z|=R$ 映射成什么图形？

解 把 Z 上的圆周写成指数式，即 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，因为 $w=u+\mathrm{i}v$，所以

$$w=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+\frac{1}{R}(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$$
$$=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+\mathrm{i}\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

若令 $a=R+\dfrac{1}{R}$，$b=R-\dfrac{1}{R}$，则得

$$u=a\cos\theta,\quad v=b\sin\theta$$

显然，当 $R\neq1$ 时，有

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$$

表明这时函数 $w=f(z)$ 把 Z 上的圆周映射成 W 上的椭圆，其长、短轴分别为 $2a$ 和 $2|b|$。

若取 $R=0.5$，可得 $a=2.5$，$b=-1.5$，表明圆周 $|z|=0.5$ 被 $f(z)$ 映射成椭圆 L_1：