中学教学参考

（理科版）

中学数学电视讲座专辑

1
1981

南京市教师进修学院

目　　录

（以上系按播出顺序排列）

数学的发展与现代化

南京大学 周伯壎

今天要我来向大家讲这样的一个题目，事实上是给了我一个非常繁重而力不能胜任的任务。首先，这个问题非常之大，在工业、农业、国防以及科学研究、尖端技术等等各个方面都有现代化的问题，因而也都与数学有极其密切的关系，内容极其广泛；其次，尽管我学数学，教数学，研究数学已有四十多年的历史，但是仍然知之甚微，特别是，数学中也分门别类，越分越细，越分越尖，不要说在数学内部也隔行如隔山，就是在我的主攻方向，要想较全面地了解世界上这一方向的发展现况也是很不容易的。因此，今天我仅就我的管见所及，提一点粗浅的看法，供同志们参考。其中有挂一漏万，以至谬误之处，尚祈指正。

数学是一门非常古老而又始终充满着活力的学科。英国有一位数学家曾经认为数学是文化的镜子，他的意思是说，文化水平的高低可以用数学的水平来衡量。这句话并不全面，因为"文化"一词的含义很广，它包含着科学，生产技术，艺术，文学，政治制度，社会结构，甚至于宗教，风俗习惯等等各个方面，但是，可以认为，数学水平是与一般生产水平密切相关的。数学可以促进各门学科与生产的发展，而反过来，科学的发展与生产上提出的数学问题也将能促进数学水平的提高。事实上，人类在生产过程与宇宙现象中会积累到大量的经验与知识，把这些经验与知识经过提炼就可以总结出一套设想，学说与理论，再经过实践的检验就成为规律，于是人们就依据这些

规律来改造自然，为人民谋福利。在这些累积，提炼，总结与检验的过程中，数学往往起着决定性的作用，没有数学这个工具，这些理论与规律就无法准确地表达，因而也就无法准确地运用这些理论来了解自然与改造自然。

数学是研究数与形的科学。在研究数与形的过程中，往往会提出或发现一些问题，而为了解决这些问题，往往要提出一些新的概念与理论。在用这些理论解决或部分解决原提出的问题以后又往往会发现或提出更高一级的新问题，为了解决这些新的问题，又需要提出新的概念与理论。像这样不断循环反复，层出不穷也推动了数学的向前发展。

总之，科学——包括自然科学与社会科学——以及生产中提出的问题与数学内容的矛盾所提出的问题就形成数学发展的两大动力。

一、数学发展的概况

从历史上看，数学的发展大体上可以分成三个时期。

十七世纪以前的漫长岁月在数学的发展上可以叫做初等数学的时期，这个时期的数学大致就是我们目前中学数学课程的内容。中国、印度、埃及这些具有几千年文化的文明古国的人民在几千年以前就已开始发展数学，他们首先从一些外界的量得出了1、2、3、……这些数，他们认为这些数来自自然，因此直到现在我们仍然称1、2、3、……这些数为自然数。十进位记数法是数学中最早也是最重要的发明创造，如果没有及时地创造出这种记数法，世界文化的发展势必大大推迟。随着十进位记数法，人们得到分数、小数、负数等概念，同时，加、减、乘、除、乘方、开方这些代数运算的理论与方法也发展起来。这些理论与解方程的理论一道构成初等代数的基本内容。它是数学发展的两个起源之一。

数学发展的另一起源的几何学，古代埃及人民由于尼罗河的泛滥在农业生产上所产生的影响而研究了量地学。量地学的的发展与当时已由一些哲学家们所研究的逻辑学一道发展成为完整的初等几何学。2300年前的欧几里德写的“几何原本”到今天仍然是人们所称道的一本几何教本。

在这一时期中，我们中国人民在数学上的发展基本上与印度、西亚、埃及、希腊以及罗马等国家与地区有相同的水平，我们举两个最伟大的发现的例子来作为我国古代数学的代表。

一个是勾股定理。中国最古的一本数学书周髀算经中曾有勾3股4弦5之说，这本书初见于杨雄(公元前53—公元后18)所著法言一书中。其后晋书隋书均曾提到。宋本周髀算经则题汉赵君卿撰，所以赵君卿应是汉初或甚至汉朝以前的人。赵君卿曾作过勾股方圆图注，其后刘徽（第三世纪）注九章算术也沿用此法：〔赵君卿曰：勾股各自乘，并之为弦实，开方除之，即弦也〕，这句话完全是欧洲人后来所称的毕塔哥拉斯定理。赵的图注也就是我们现在证明勾股定理时所常用的证法，可见，汉朝初年以前，我们就已有了勾股定理的严格证明。

勾股定理是几何学中的精髓，也是数学以及应用到数学的各门学科中直接或间接引用最多的定理之一。

另一个有代表性的例子是圆周率。周髀算经中就曾提到圆周率（一个圆之周长与其直径之比）近似等于3，其后刘歆、张衡、刘徽等人都研究过，所得之值都逐步准确。南北朝时宋末的祖冲之、祖暅之父子得出圆周率的值约等于3.14159265，这是一个很了不起的成就，比欧洲人要早好几百年，更应该提出的是，祖冲之的算法虽久已失传，但其子祖暅之却可能是依刘徽的割圆术而求得的。如果此说属实，那么，我国至少在南北朝的时代就已有逐次逼近的与极限的想法了，而这些概念却正

是12个世纪以后才创立起来的微积分学的理论基础。

17世纪，英国的牛顿与德国的莱卜尼兹基本上在同时（只差几年）都相互独立地创立了微积分学。这标志着数学发展进入了一个新的时代，即高等数学的时代。有必要用一个简单的例子来说明一下微积分学的基本想想。假定要求一个圆（或其它任意的一个图形）的面积，我们先用一些铅直的平行线来把这个圆分切成许多窄条，每一个窄条的上下两边都是圆弧，稍稍修整使变成一个窄而长的矩形，这些矩形的面积之和可用来近似地表达这个圆的面积，但有误差。如果所取的平行线无限增多，使得每个窄条的宽度无限变小，而窄条的个数却无限增大，于是其和就无限接近于圆的面积，其误差就无限制地接近于零，终至消失。这种无限细分的方法叫做微分，而无穷积累的方法叫做积分，合称微积分。这个新型的算法成效卓著，许多用初等数学很难解决或甚至无法解决的问题，用上微积分以后往往能迎刃而解。

微积分学所起的另一个重要作用是帮助我们认识自然。举一个例子，牛顿本人曾提出过万有引力定律：两个物体之间必有相互的吸引力，吸引力的大小与此两物体的质量成正比，与距离的平方成反比，另外，在长期观测行星的运行规律时，也总结出开普勒定律（1）行星绕太阳转，其轨道是一个椭圆，而太阳为此椭圆的一个焦点；（2）行星绕太阳转一周所用时间的平方与此椭圆之长轴的立方成正比；（3）当行星运行时，由太阳联向行星的向径在相等的时间内所扫过的面积是相等的。这两者初看起来是没有什么联系的，但是微积分学都可以把它们连结在一起，若万有引力定律正确，则开普勒定律也必正确，反之亦然。从实践中尚未发现此二定律有谬误之处。所以此二者中的任何一个都可以帮助我们认识行星运行的规律。把上述行

星换成人造卫星，把太阳换成地球，那么，人造卫星绕地球转时，其规律也依照开普勒定理。由于掌握了人造卫星的运行规律，我们在把一个人造卫星放上天以后，就可准确无误地知道其速度，何时在何地点，等等，而不致于迷失。

其它，由微积分学以及由它产生的微分方程学可以帮助我们了解许多力学、电学等方面的规律。

任何一个理论在其开创之初都往往不是完整无缺的。微积分学也不例外。在牛顿的微积分出现以后，许多数学家都致力于微积分学的研究，研究其性质，拓宽其运用的范围，加深其理论基础等等。这些工作到十九世纪基本完成。当然，这并不说明，微积分学，特别是积分学，已无发展的余地，相反，在二十世纪，积分学却在更高的水平，在更抽象的条件下被继续研究，但是初等数学中所提出的问题并未全部解决。例如古代几何学上的三大难题（三等分角问题、圆求方问题与二倍立方问题），以及五次以上方程的求解问题都未解决，尚在被继续研究。不意这两类已被拖延很久（前者已达两千年，后者也已数百年）未能解决，许多著名数学家都对之束手无策而又看来毫无相互联系的问题，却在上一世纪的三十年代被一个未考取大学的二十一岁的高中毕业生伽罗瓦运用群论一下子全部解决了。不但这一件事情本身出人意外，其结果却更是出人意外。其结果是：仅用尺与圆规来三等分一个任意角，二倍立方，求一个正方形等于已知圆的面积是完全不可能的；用代数方法来解任意的一个五次或五次以上的方程也是完全不可能的这里所述的“不可能”不是现在不会，将来也许能会，而是指现在不可能，将来也永远绝对地不可能。这样一来，群论就登上了数学发展的历史舞台，伽罗瓦成了划时代的人物，近代数学的时代开始了。

群论的出现使得数学家们意识到，数学研究的对象不仅有数与形，还有变换与对称，等等。随着十九世纪晚些时候出现的集合论，人们把这些变换、对称等对象的具体意义摒弃掉，使之变成抽象的集合，但却保留其一些基本的规律，这样就得到抽象的群。这种处理的方法到了二十世纪有了更大的发展，人们对一些抽象的集合加上了某些限制以后就变成各种各样的数学系统。数学家们对这些抽象的数学系统进行了研究，提出了各种各样的理论，创立了许许多多的学派。二十世纪的数学真正变成了百家争鸣百花齐放的园地，它象万花筒一样，千变万化，丰富多采。

数学的高度抽象性带来了高度的概括性，它可以用来发现表面上千变万化的事物中的共同性。

由于数学的研究对象是一些数学系统，而这些数学系统又是建立在抽象集合上的，所以，为明确计，在研究之先，必需对所研究的集合作一些约定，也即：这些集合必须满足一些基本条件，这些条件合称为所述数学系统的公理系。于是“一切从公理出发”然后应用严格的逻辑推理来建立一套严密的数学理论。

除了抽象性与公理化以外，近代数学的第三个特点是加强了相互渗透，建立边缘性理论与科学。数学内部各分支的相互渗透一方面可以建立一些新的分支。例如，代数学渗透到函数论内就得到论函分析，代数学与几何学的相互渗透变成代数几何学，等等。另一方面，有些分支因得到其它分支的渗透而提高了自己的理论水平，解决或部分解决了本分支中以前所没有解决的问题，此外，数学中的许多基本概念直接来自物理学。例如，线性空间中场的概念直接来自物理学中的引力场，在另一方面，二十世纪以来，各门学科都在高速度地发展着，它们

对数学的需要也越来越迫切。例如核物理学需要群论，工程设计中需要微分方程；而经济数学，生物学等早已是经济学与生物学中的主要工具了。二次大战期间，数学家们曾经协助军事当局破译敌方的密码，协助制度战术方案，著名抽象代数学家美国人马克兰在所发表的一篇论文中曾提到，在战时他曾受美国政府的任命领导过一个应用数学小组，在此小组中曾研究空降火灾与研究空间枪炮问题等课题。

二、二十多年来西欧北美等国数学教育的动态

一九五七年苏联第一颗人造卫星上天给了北美西欧与日本等国以巨大的震动，造成所谓“人造卫星冲击”。他们意识到，他们的科学技术正在落后，于是，他们奋起直追，一方面制定了庞大的科研计划，另一方面从数学基础理论着手，他们新办了许多大学，在许多大学中增设了博士学位的课程与计划，用以培养高级的理论研究人才。同时，改革了中小学数学课程的教学计划，他们把原来在大学中才能学得到的群、集合等抽象概念深入浅出地编入中学甚至小学教科书中，以从小培养学生们的抽象想维能力。为了不使中小学生过重地增加学习负担，同时也由于袖珍电子计算机的大量问世（中学生们每人都可以有一台计算机），他们废除了在中小学生中大量计算的训练，他们认为，在学生们将来工作时反正任何计算都可以借助于计算机，现在大可不必学习计算，腾出时间与脑力来多学习考虑数学中的抽象理论，这样会对科学技术的发展更为有利。他们不鼓励宣传会计算的神童。于是，与计算有关的数表，例如平方根表、三角函数表等都不见了。计算尺则早已绝迹了。他们的这种做法取得了很大的成效，不多几年后就不但使基础理论更加蓬勃发展，而且也第一次把人类送上了月球。

但是，这种做法到了七十年代中期却出现了问题，主要表

现在理论人才过剩，许多获得数学博士学位受过高深而严格训练的人却找不到适当的工作，于是，一方面由于求职业的问题，另一方面也是由国民经济发展上的需要，北美西欧各国的数学系中增设了许多应用数学的课程，于是，应用数学，主要是最优化问题，概率统计、计算数学等方面又再一次提了出来，今后的一段时间内可能成为他们的数学教学与科研中更重视的方向。

最近，又有少数的数学家对于一、二百年来为了要求严密性所提出的一些较难理解的基本概念，例如严格的极限理论，函数的一致连续性，级数的一致收敛性等提出了一些看法。这些看法是仅针对着应用数学的。他们认为，在一般工程与工艺中，用到数学时往往最后都是通过电子计算机，因此，凡是电子计算机不会受到影响的不严格之处就不必考虑了。所以对工程技术人员来说，数学的某些部分，特别是微积分的某些理论部分可以简化。这种看法是否恰当待实践证明。

三、国民经济中的一些数学方法与问题

国民经济中所用的数学方法很多，要处理的问题是多方面的。我们现在仅介绍最优化方面的一些理论与问题，它是目前世界上用于国民经济中的最受重视的一些理论。在生产上，所谓最优化问题将包含三个方面，即：最优设计、最优控制与最优管理。下面我们用最简单的例子来说明几个有关问题，实际的应用要比所举的例子复杂得多。

1．线性规划与非线性规划。这个问题是苏联数学家在三十年代由于交通运输上的问题而提出来的。举一个浅近的例子。设有甲、乙、丙、丁四个煤矿，需将其所生产的煤分别送到A，B，C，D，E五个城市，煤产量已知，且质量相同，五个城市的需要量也是知道的，现在要制定一种运输方案能使总

的运输费最小。用数学的语言来表达这一类的问题就是：在一些限制条件下（各煤矿的产量，各城市的需量都是一定的，因而也是受到限制的）要求一个目标函数（运费）最小。

2．排队论。这个问题本来是由自动电话占线的问题而提出来的，一个大城市有一个电话总局，总局下设若干电话分局，用户的每一个电话都有电线通到分局。如果总局到分局的电话线太多，则势必有许多长期空闲造成浪费，提高了成本。若电话线太少，则又容易占线，用户不满意而造成损失。数学家们根据数学原理与统计数据来制定一个最佳方案。这类问题的解决方法适用于例如决定售货员的人数，码头工人的人数，大工厂仓库管理的人数等等。

3．对策论。这个理论是匈牙利数学家冯·诺似曼提出来的，原名（外文名）博弈论，在科学画报上曾举出过一个简单而典型的例子，二次大战期间美日两军在南太平洋的俾斯麦海大战，日本海军由西向东有南北两路可供选择进军，美国空军由东向西迎战。数学家们为了美国军方设计，根据当时的气候地理及美军力量等条件，应用对策论的原理来制定战术计划，结果取得大胜。在生产上，制订计划者应事先估计到生产进行时可能会会遇到的各种情况，应用对策论的原理来制订生产方案使得遇到任何情况时，若有损失则损失最小，若有收获，则收获最大。

4．质量控制。在生产的各个环节都需进行检查，有些产品不可能全部检查（例如制造火柴），只能选择少量产品进行抽样检查，数学工作者们针对各种不同的产品，在各种不同的环节，根据数理统计学的原理制订检查方案使得由抽样检查所得的数据可以较准确地推断整批生产出的产品的质量，如遇异常，即可即时找出原因以免造成很大的损失。

5、统筹方法。这个方法的要点是在生产管理上制订一种最优方法，使得在主生产线上能做到不窝工，不待料，需要什么到时就必能有什么，以最短的时间来完成生产的全过程。华罗庚先生多年来推广统筹法在全国各地取得了很大的效果。美国最突出的例子是北极星核潜艇的制造。原设计人员估计要化八年，美国国防部要求六年完成，结果由于用了统筹法，四年不到就完成了。因此在美国所有的大型工程都必先统筹后施工，以最短的时间来完成任务。

6．优选法。在生产某种产品时，必须配料，而各成分所占的百分比就决定此产品的质量，但要决定各成分的最优百分比（使得产品质高量大）必须事先作大量的试验，优选法可以提供一种数学方法，使得实验次数最少，而效果最好。华先生曾在全国大量推广此法。

7．正交试验设计。此法的目的与优选法相同，但作法各异，所根据的数学理论也不相同。我省的几所师范学院过去都在一些工厂中推广过此法。

此外，最优化方面还有自动控制等理论与方法，因其牵涉面过大，不易简单介绍，此处从略。

四、谈谈中学的数学教育

最后我想趁这个机会来与我们的中学老师们谈谈中学的数学教育问题，与大家共同商量。

中学阶段是一个非常重要的学习阶段，一方面，中学将要向高等学校提供成绩优秀的学生，以供进一步培养成为高级建设人才，向另一方面，由于能进高等学校的毕业生，毕竟是极少数，中国如此，世界各国也莫不如此，程度不等而已，大多数学生将走向社会，中学是他们受正规学校教育的最后的一个环节，对于进高校的学生来说，除了极少数的专业以外，数学

将是他们在学习，研究，工作中的不可少的工具，中学数学基础不打好，将对他们有很大影响，对于进入社会走向各个不同的工作岗位的毕业生出来说，有的在其本职工作中就要用到数学，也有的在研究改进其所用的工具，提高工作效率，增加产量等方面将要用到数学，所以，对于这方面的学生，中学应能培养他们具有独立思考与自学的能力，不论从哪一方面来说，学习基础理论都是中学学习数学的主要目的，只有在掌握基础理论以后，才能有进一步学习与解决问题的能力。

学习基础理论的一个重要内容是学习逻辑推理的能力，数学是一向逻辑性极强的学科，数科理论正确与否首先是看逻辑推理是否正确，然后才是在实践中检验所立的公理是否符合实际。

学习理论的另一个重要内容是提高抽象思维的能力，数学中所研究的对象事实上都是一些程度不等的抽象概念，只有抽象的数与抽象的点线面体，没有具体的数与具体的点线面体，正是由这种抽象的概念才有高度的概括性，抽象程度越高概括性也就越大，其所得理论适用的范围也就越广泛，中学生正是长知识的大好时期，从青少年时代就培养他们抽象思维的能力对于整个科学的发展是起着积极作用的。

综合法在解析几何中的应用

南京东方红中学　薛叔华

平面几何和解析几何虽然都是中学数学中研究几何图形性质的两门基础学科，但就研究的方法而言，两者是大不相同的。前者以综合法为主，后者以解析法为主。为了把这两门基础学科有机地结合起来，我们在教学过程中必须重视用解析法来处理平面几何中的一些问题；同时，也要恰当地运用综合法来解决解析几何中的一些问题；这样一方面既能弥补目前学生中逻辑推理能力的不足，另一方面又能避免过繁的计算，得到较好的证明。

关于用解析法论证平面几何的问题，已有不少文章作了详尽的讨论，下面只谈谈“综合法在解析几何中的应用”。

请先看几个例子：

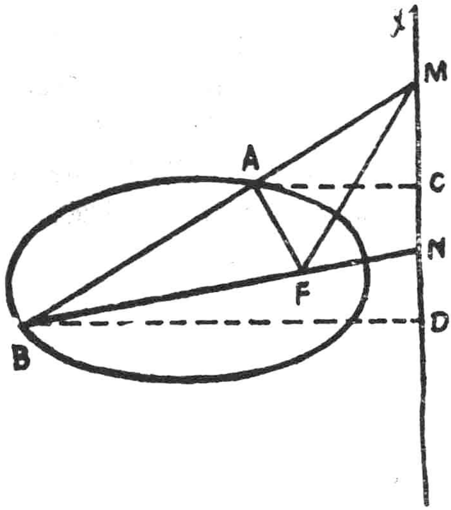

图2—1

例1．如图2—1：设A、B是以F、l为相应焦点、准线的椭圆上任意

两点，BA、BF的延长线分别交 l 于 M、N 两点。

求证：MF平分 ∠AFN

证明：过AB分别作 l 的垂线，C、D为垂足。

∵AF：AC＝BF：BD＝c

∴AF：BF＝AC：BD

得 AM：BM＝AC：BD

∴AF：BF＝AM：BM

∴MF平分∠AFN

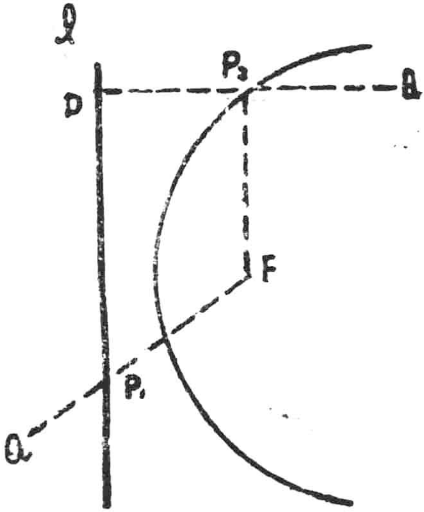

图 2—2

例 2．已知F 是抛物线的焦点，Q是平面上一定点，试在抛物线上求一点P，使 P点到F与 Q两点距离之和为最小。

解：设F、l 是抛物线的焦点、准线，Q是平面上的定点，分两种情况：

（1）点Q与F在抛物线的异侧，线段QF与抛物线交于P_1点，则P_1点为所求；

（2）点Q与F在抛物线的同侧，过Q作 QD⊥ l 交抛物线于P_2点，则P_2点为所求。

例 3．如图2—3，设F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，l 是椭圆上任一点P的切线，F_1'是F关于切线 l 的对称点，求证：F_2、P、F_1'三点共线。

证明：连接PF_1、PF_2、PF_1'

由椭圆的光学性质得：$\angle 1 = \angle 2$

又 F_1'、F，关于切线 l 对称，$\angle 1 = \angle 3$

$\therefore \angle 2 = \angle 3$

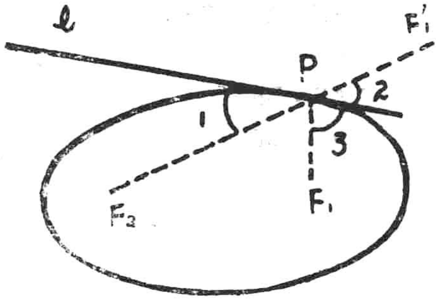

图 2 — 3

即三点F_2、P、F_1'共线，顺便指出：设椭圆长轴为2a，

则 $F_2F_1' = F_2P + PF_1 = 2a$，

这三个例题，从内容上看都是关于圆锥曲线的命题，属于解析几何的范围，但是由于使用了综合法，使问题得到了简便的证明，若用解析法论证，虽然思路径直，但其证明过程要复杂的多。

为了进一步说明在某些场合使用综合法的优点，让我们再看一例。

例 4．如图2—4，设PT_1，PT_2是以F_1、F_2为焦点的椭圆的两切线，T_1，T_2是切点，求证

$\angle F_1PT_1 = \angle F_2PT_2$

为便于比较，把解析法证明的要点介绍如下：

证 1．设椭圆方程为$\frac{a^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$　P点坐标为(x_1, y_1)

则 $k_{PF_1} = \frac{y_1}{x_1 - c}$，$k_{PF_2} = \frac{y_1}{x_1 + c}$

又设 $k_{PT_1} = k_1$，$k_{PT_2} = k_2$．

$$\therefore tg\angle F_1PT_1 = \frac{k_{PT_1} - k_{PF_1}}{1 + k_{PT_1} \cdot k_{PF_1}}$$

$$=\frac{k_1(x_1-c)-y_1}{(x_1-c)+k_1y_1}$$

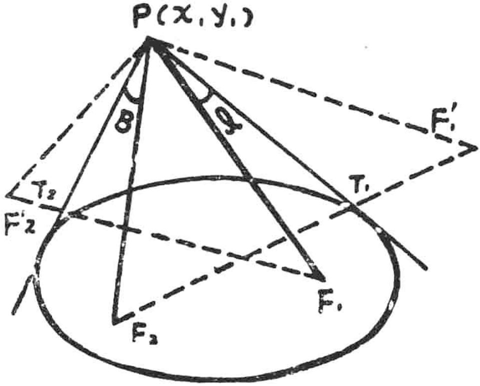

图 2—4

$$\mathrm{tg}\angle F_2PT_2=\frac{k_{PF_2}-k_{PT_2}}{1+k_{PT_2}\cdot k_{PF_2}}=\frac{y_1-(x_1+c)k_2}{(x_1+c)+k_2y_1}$$

要证：$\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$

只要证：$\dfrac{k_1(x_1-c)-y_1}{(x_1-c)+k_1y_1}=\dfrac{y_1-(x_1+c)k_2}{(x_1+c)+k_2y_1}$　　（1）

即　只要证$(k_1+k_2)(x_1{}^2-c^2-y_1{}^2)+$

$$2x_1y_1k_1\cdot k_2-2x_1y_1=0$$　　（2）

但注意到k_1，k_2是$y_1=kx_1\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$

即　$(x_1{}^2-a^2)k^2-2x_1y_1k+y_1{}^2-b^2=0$的两根，

$\therefore\quad k_1+k_2=\dfrac{2x_1y_1}{x_1{}^2-a^2}$，$k_1k_2=\dfrac{y_1{}^2-b^2}{x_1{}^2-a^2}$