

# 电磁场

# 数值方法

主编 方宙奇 孟敏

DIANCICHANG  
SHUZHI FANGFA



电子科技大学出版社

# 电磁场

# 数值方法

常州大学图书馆  
藏书章

主编 方宙奇

主审 聂在平



DIANCICHANG  
SHUZHIFANGFA



电子科技大学出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场数值方法 / 方宙奇, 孟敏主编. —成都:

电子科技大学出版社, 2012. 8

ISBN 978-7-5647-1279-2

I. ①电… II. ①方… ②孟… III. ①电磁场—数值方法 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 174533 号

## 内 容 简 介

本书在论述电磁场数值方法产生的历史、现状和发展趋势的基础上,系统地论述了求解电磁场问题的三大方法——差分法、有限元法和矩量法。本书阐明了各种计算方法的基本原理和实施步骤,并对现在常用的电磁场数值方法——快速算法和混合算法做了介绍;最后提供了部分计算程序,以供参考。

本书为高等工科院校本科生教材,立足于学生在完成《电磁场理论》和《高级语言设计》学习的基础上,进一步培养学生利用计算机分析工程问题的能力。本书也可作为从事电磁场应用等相关研究的学者、技术人员等的参考用书。

## 电磁场数值方法

主 编 方宙奇 孟 敏

主 审 聂在平

---

出 版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编: 610051)

策划编辑: 杜 倩

责任编辑: 李述娜

主 页: [www.uestcp.com.cn](http://www.uestcp.com.cn)

电子邮箱: [uestcp@uestcp.com.cn](mailto:uestcp@uestcp.com.cn)

发 行: 新华书店经销

印 刷: 四川经纬印务有限公司

成品尺寸: 185mm×260mm 印张 10.75 字数 265 千字

版 次: 2012 年 8 月第一版

印 次: 2012 年 8 月第一次印刷

书 号: ISBN 978-7-5647-1279-2

定 价: 25.00 元

---

■ 版权所有 侵权必究 ■

- ◆ 本社发行部电话: 028-83202463; 本社邮购电话: 028-83201495。
- ◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

# 序 言

随着计算机的出现和发展,使许多无法求解的电磁问题得以解决。比如,当理论模型复杂或理论模型尚未建立,或者实验费用昂贵甚至不能进行实验时,计算就成为研究这些问题的唯一或主要手段。它已成为当今研究电磁场问题不可或缺的一条重要途径。在高科技竞争日益激烈的今天,以电磁场理论为基础的数值计算在电磁场与微波学科中发挥着越来越重要的作用。本书的目的就在于帮助电磁场专业的本科学生学习一些常用的数值方法,为今后更加深入学习和应用数值方法打下基础。

全书共 6 部分。第一部分为绪论。第一章至第四章分别介绍了电磁场数值方法中的几种重要方法——有限差分法、时域有限差分法、有限元法和矩量法,从基本理论到应用实例都有深入浅出的讲解,力图使学生在学习了这些基本理论后能通过上机实践很快掌握这些方法。第五章介绍电磁场数值方法中的一些快速算法及混合方法,力图使学生对电磁场数值方法现在的发展应用状况有更详细的了解。本书附录程序选择简单易用的 MATLAB 语言,帮助学生理解本书数值方法的过程及应用。本书绪论、第一章和第三章由方宙奇编写,第二章、第四章、第五章和附录由孟敏编写。

本书在编写过程中,得到了学校“电磁散射与辐射”团队的大力支持。在此衷心感谢该团队提供的数据和资料,尤其感谢聂在平教授、胡俊教授、宗显政副教授和阙肖峰副教授的支持和帮助!此外,还要感谢香港大学沙威博士后、陈涌频博士的建议与帮助!

限于作者学识水平,书中难免有不足、疏漏和错误之处,敬请使用本书的师生和广大读者批评指正。

编 者

2012 年 5 月

于电子科技大学

绪论.....	1
一、数值方法产生的历史和发展现状.....	1
二、数值方法的地位和作用.....	2
三、数值方法的分类和共性.....	2
第一章 有限差分法.....	6
1.1 有限差分法的基础.....	6
1.1.1 差分与差商.....	6
1.1.2 求解步骤与网格划分.....	8
1.2 静态场问题的差分法.....	9
1.2.1 差分格式的建立.....	9
1.2.2 边界条件的处理.....	12
1.3 差分方程组的求解.....	18
1.3.1 差分方程组的特性.....	18
1.3.2 差分方程组的解法.....	21
1.4 工程应用举例.....	24
1.5 场强及相关量的求解.....	30
1.6 时谐场的差分解法.....	32
习题.....	37
第二章 时域场中的有限差分法.....	38
2.1 波动方程的差分法.....	38
2.1.1 收敛性.....	40
2.1.2 稳定性.....	40
2.2 FDTD 的基本原理.....	41
2.2.1 Yee 网格和差分格式.....	41
2.2.2 边界条件.....	45
2.2.3 解的稳定性和数值色散.....	47
2.3 激励源.....	49
2.4 处理开放域问题的关键技术.....	51
2.4.1 总场散射场分离.....	51
2.4.2 吸收边界条件.....	52
2.4.3 近远场变换.....	54



2.5 应用举例.....	55
习题.....	60
<b>第三章 有限元法.....</b>	<b>61</b>
3.1 变分原理.....	62
3.2 与线性边值问题等价的变分问题.....	66
3.3 基于变分原理的差分方程.....	68
3.4 有限元法的求解过程.....	72
3.4.1 场域剖分.....	74
3.4.2 单元插值与插值函数.....	76
3.4.3 有限元方程的建立.....	78
3.4.4 方程组求解.....	91
3.5 应用举例.....	96
习题.....	100
<b>第四章 矩量法.....</b>	<b>101</b>
4.1 矩量法的概述.....	101
4.2 基函数和权函数选择.....	103
4.3 电磁场表面积分方程.....	108
4.3.1 等效原理和格林函数.....	108
4.3.2 电磁场中的散射辐射公式.....	111
4.3.3 三种形式的表面积分方程.....	112
4.4 应用举例.....	114
习题.....	124
<b>第五章 快速算法及混合方法.....</b>	<b>125</b>
5.1 快速算法的简介.....	125
5.1.1 快速多极子方法.....	126
5.1.2 自适应积分方程.....	134
5.1.3 自适应交叉近似方法.....	140
5.2 混合方法的简介.....	146
5.2.1 有限元边界积分.....	147
5.2.2 矩量法与物理光学法.....	151
5.3 加速计算手段.....	154
<b>附录 程序示例 (Matlab) .....</b>	<b>155</b>
<b>参考文献.....</b>	<b>163</b>

# 绪 论

数值解是相对于解析解而言的,它是求解场域内若干点的离散值,数值方法就是求得这些点的数值解的方法。

## 一、数值方法产生的历史和发展现状

### 1. 数值方法产生的历史

宏观电磁现象的基本规律可以用麦克斯韦方程组(积分形式和微分形式)表示,再加上边界条件(三类边值问题和不同媒质分界面上的边界条件)和初始条件,就可以描述不同的实际电磁问题,经过数学抽象后归结为微分方程模型、积分方程模型和属于优化模型的变分方程模型三大类。比如:

最初求解电磁问题,是用分离变量法和其他数学方法严格求解偏微分方程和积分方程,得到的是严格解(或称解析解)。其优点是:

- ①严格解是一个明确的表达式,各物理量之间的关系直观,便于优化设计;
- ②精度高,计算量小;
- ③可以作为近似解和数值解的检验标准,也可作为近似方法和数值方法的基础。

而其局限性是:

①解题范围有限,仅能解决很少量的问题。比如标量亥姆霍兹方程只有在 11 种坐标系下才能用分离变量求解,并且要求边界面是该坐标系的一个坐标面或几个坐标面的组合,且边界条件是第一类或第二类,又比如积分方程中的积分核在某些形式时才能用变换数学严格积出;

②难掌握;

③往往在理想条件下得到,也有其不严格的一面。

由于工程电磁场问题的复杂性,致使各种解析方法已经无法适应广泛工程问题分析求解的需要。随着计算机的出现,属于近似计算方法范畴的电磁场数值计算方法得到了长足的发展,最初是始于 20 世纪 60 年代。

最开始的近似解包括一些高频方法:物理光学法(PO)、几何光学法(GO)、一致绕射理论(UTD)、几何绕射理论(GTD)……这些方法至今仍占有重要地位。

近似法的优点是:①计算简单、省时,参量间关系直观,便于优化;②借助于计算机,存储量小,计算速度快;适合电大尺寸目标。

局限性为:①准确度低;②处理复杂目标比较困难。

近似解法首先要根据求解问题的解的范围作出在该范围内成立的近似假设,从而达到简化模型和求解过程的目的。根据不同的实际问题,近似假设也不同,于是派生出不同的近似方法。

近似解法中包括了部分的解析法和部分的数值结果。其解析部分比严格解中的解析部分



要少些,但计算工作量却较大,且随着期望精度的提高而增大,反之,工作量小,数值结果就不会太精确。

数值法是指直接将待求解的数学方程进行离散化处理,将无限维的连续问题化为有限维的离散问题,将解析方程的求解问题化为代数方程的计算问题的一类方法。在这类方法中,应尽量保持数学上的严谨性,少作物理上的近似,以保证当离散精度无限提高时所得数值解也可无限地趋于精确解。从这个意义上讲,数值法既是一种近似方法,又留有提高计算精度的无限空间。解析法所求得的往往只是方程的经典解,数值法则突破了这一限制,能够求得方程的广义解(仍然是近似的)。数值法从原理上讲没有局限性,是一种普遍适用的方法,只是计算机的存储空间和计算速度限制其应用范围。

数值方法的优点有:①原则上可以求解任意复杂边界的电磁工程问题;②准确度高。

其局限性主要受限于计算的容量、速度和有效位数。

综上所述,三种解法各有千秋,它们相互促进,相互补充。而对于大量的工程实际问题,只能求其数值解。

### 2. 数值方法的发展现状和前景

数值方法的发展大致分为两个阶段,已经从“能否解决”问题的阶段发展到了“如何更快地解决”问题的阶段。为了实现这一目标,近期的数值法研究均围绕工程实际问题研究各种改进方法、手段及相应的计算技术。近年来,越来越多的研究单位和人员参与到电磁场数值方法的研究中,各单位和人员间也日益加强了交流与合作。

提高计算能力的手段包括两方面,一是计算机技术的进步,包括内存增大、计算速度提高及并行技术的发展;二是快速算法及混合算法的发展。

近来出现了多种商用软件,如:FEKO(基于积分方程法)、HFSS(基于有限元法)、CST(基于时域有限积分方法)、XFDTD(基于时域有限差分法)等等。这些方法及软件各有优势,但仍有其不能解决的问题,所以致力于电磁场数值方法的研究还是很有前景的。

## 二、数值方法的地位和作用

各种电磁场数值方法(现在称为计算电磁学)已广泛地应用于军民两方面,如 RCS 分析与隐身技术、天线分析与设计、电磁干扰、遥感技术、通信、生物工程、电路设计等,如图 1 所示。对于这些复杂的电磁问题,不仅解析方法无能为力,实验手段也不可能给予全面的解决,更不用说经济上付出的代价,而且,计算电磁学所能提供的信息的丰富程度也是实验方法无法比拟的。可以说,计算电磁学的发展改变了现代电磁场工程的设计过程,越来越多地依赖计算机辅助设计。这也充分说明了电磁场数值方法是一种解决电磁工程问题强有力的现代化方法,是电磁场理论的重要组成部分。

## 三、数值方法的分类和共性

数值方法按其数学模型的形式分为微分方程法和积分方程法;还可以按照求解域分为频域方法和时域方法,如图 2 所示。其共同特点是:将连续函数离散化,将描述的微分方程或积分方程化为代数方程组,再利用求解代数方程组的解法求得其数值解。



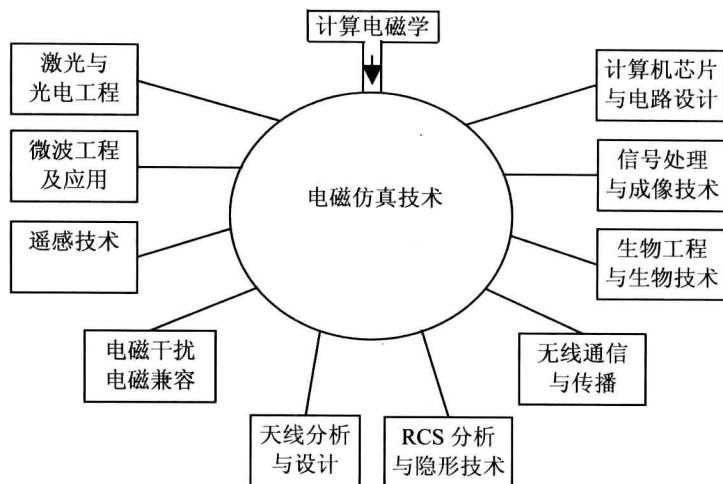


图 1 计算电磁学的应用图示

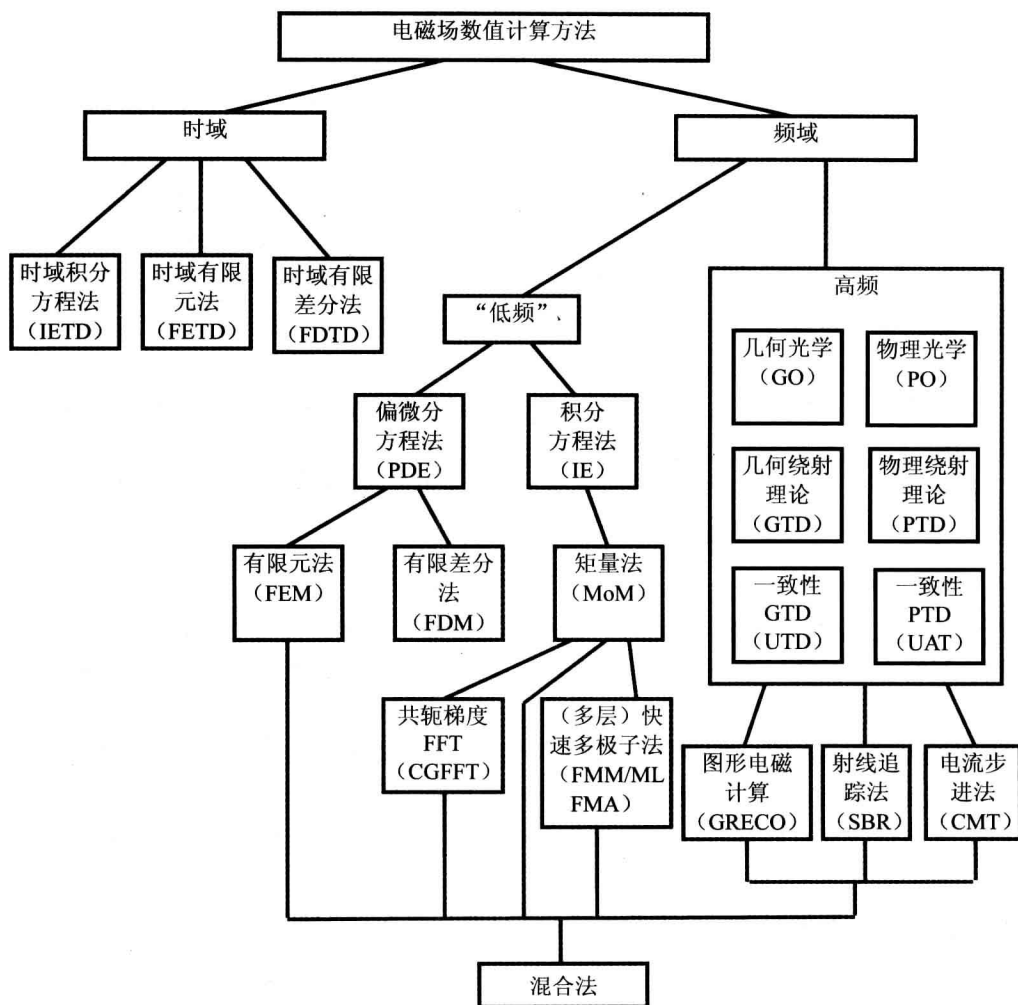


图 2 数值方法分类



在应用数值方法解题时，大致可按以下步骤进行：

(1) 分析问题，构造模型。即从实际问题出发，进行一定的简化，构成物理模型，然后用数学语言描述，建立其数学模型；比如，要计算一个金属波导，其导电率为有限值，其中填充的介质可能是非线性或不均匀的。我们在建立物理模型时，将其导电率视为无穷大，将介质视为线性的、均匀的，而且假设波导中无自由电荷和传导电流，波导工作的匹配状态、假定截面是均匀的。在这些假设前提下，我们采用亥姆霍兹方程来描述它，即  $\nabla_c^2 \varphi + K_c^2 \varphi^2 = 0$ 。

(2) 选择适当的数值方法将数学模型离散化。即化为一组代数方程或矩阵特征值问题；比如，选用差分法将亥姆霍兹方程化为矩阵特征值问题  $[K][\varphi] = \lambda[\varphi]$ 。

(3) 求解代数方程组（或矩阵特征值问题），得到数值结果。

(4) 误差分析及检验。

我们得到的数值结果是否有效？是否可用呢？这是一个极为重要、必须解决的问题。只有通过检验证明所得数值结果是所求问题的数值解，该结果才是有用的。

事实上，任何的数值方法在解题过程中都有近似，都会带来误差。所以对其数值结果进行检验、判断是必不可少的步骤。下面简单介绍一下误差的来源及数值结果的检验方法。

### 1. 主要误差来源

①模型误差。将实际问题抽象为物理、数学模型时，可能将某些条件理想化，或者加上了某些限制，或忽略某些次要因素，建立的是一个理想化模型（比如学习波导时，假定了波导是匀直的、无限长的），它只是客观实际的一种近似、粗糙描述，必然带来误差。

②观测误差。数学模型中常常包含着一些通过实验测量得到的物理参数，如介电常数、导电率、电磁耦合系数等等。这些实验测量参数不可避免地带有误差，这种误差称为观测误差。

③方法误差（截断误差）。比如，差分方程用差商代替微商，截断了泰勒级数的高阶项。如果碰到积分，也是取有限项之和；且迭代是迭代有限次数。

④计算机舍入误差（累积误差）。这是由计算机的有限字长带来的，也称计算误差。在计算机上进行很多次运算以后，其舍入误差的累积也是相当惊人的。

### 2. 主要检验方法

既然有这么多误差，则计算结果一定要进行检验（比如和实验结果比），以判定结果是否可用。不符合检验的一定是错误的，符合检验的也不一定就是正确的。主要检验的方法包括：

①利用先验知识检验。如解的互易性、对称性等，以及从经验和概念上去判断与参量之间的关系、变化趋势或极限情况等等。例如对静态场，常用的检验方法有：是否满足边界条件，电位变化是否具有连续趋势，等位线走向是否与边界条件呈相似变化，对称场是否对称等。

②对比检验。利用已有成果的数据来检验（现在常用，比如先计算出有文献结果或解析结果的目标，与之对比，结果正确则程序可以推广到其他目标的计算上）；同时利用几种方法对计算结果进行比较。

③收敛试验。现在通常在计算结果与对比结果相近但不吻合时使用，以耗费大量机时为

代价。具体做法是逐渐细化场（剖分加密）或提高收敛精度。

最后，我们把数值方法的解题步骤概括为如图 3 所示的简图。由图 3 可见，除了各种数值方法为核心内容外，执行电磁场数值计算必须具备一定的数学、物理基础和电磁场的专业知识，建模中还需实践知识和经验的积累，合理地利用理想化或工程化假设，准确地给出问题的定解条件（初始条件、边界条件）；并在计算流程的前处理（如场域剖分、数据文件构成等）、数据处理和后处理等计算机编程和应用方面具备相应的基础。

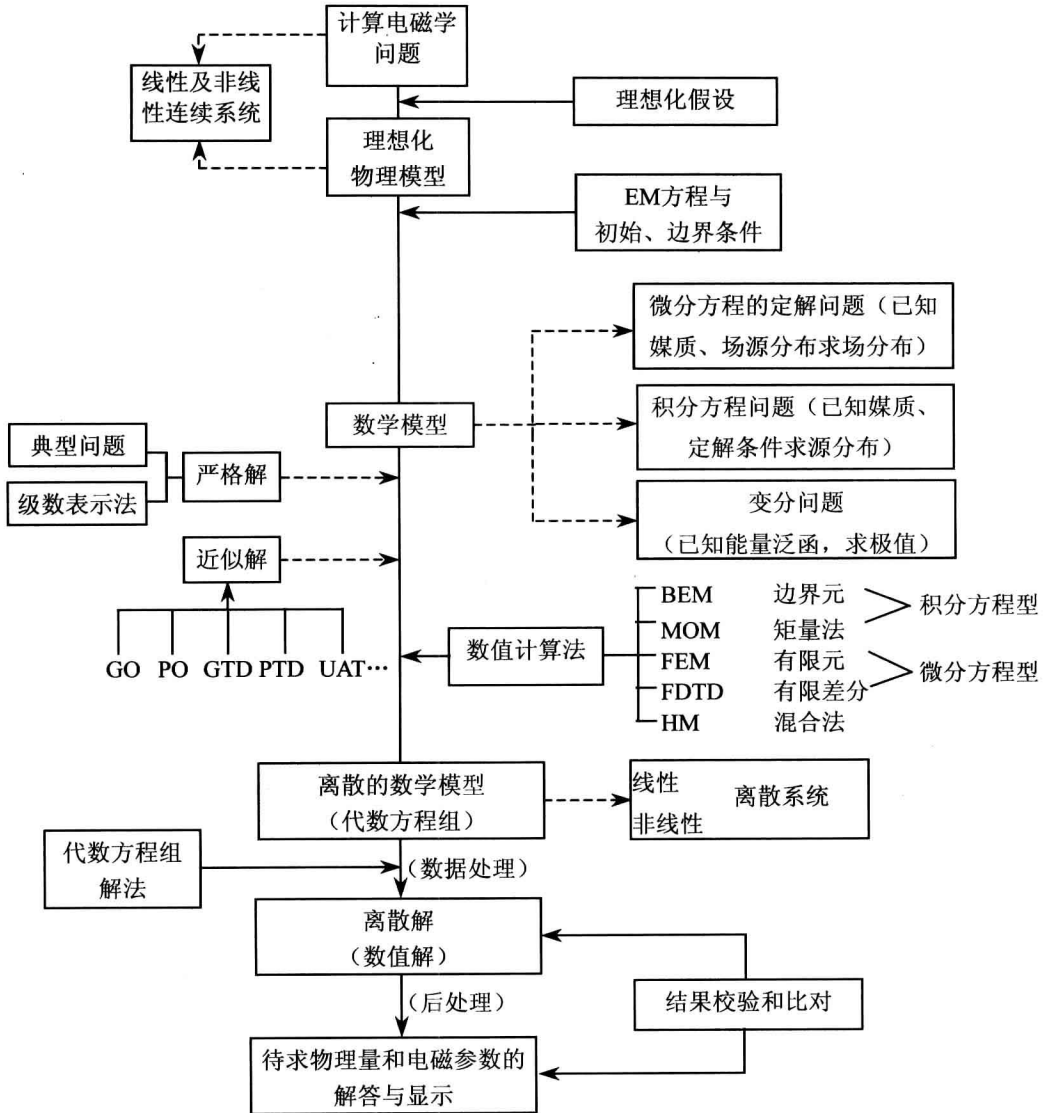


图 3 电磁场数值计算流程图



# 第一章 有限差分法

有限差分法 (Finite Difference Method) 于 19 世纪末提出, 自 19 世纪 50 年代以来得到了广泛的应用, 是电磁场数值方法中应用得最早的一种, 至今仍被广泛运用。因为该方法是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法, 数学概念清晰, 表达简单、直观。无论是常微分方程还是偏微分方程、各种类型的二阶线性方程, 甚至是高阶或非线性方程, 均可利用差分法转化为代数方程组, 而后利用计算机求其数值解。

有限差分法的基础是差分原理, 它把电磁场连续域内的问题变为离散系统的问题, 即用各离散点上的数值解来逼近连续场域内的真实解, 因而它是一种近似的计算方法。根据目前计算机的容量和速度, 对许多问题可以得到足够高的计算精度。

该方法将求解域划分为差分网格, 用有限个网格节点代替连续的求解域。有限差分法以 Taylor 级数展开等方法, 用网格节点上的函数值的差商代替控制方程中的导数进行离散, 从而建立以网格节点上的值为未知数的代数方程组。

## 1.1 有限差分法的基础

### 1.1.1 差分与差商

设函数  $f(x)$  的自变量  $x$  有一小增量  $\Delta x = h$ , 则  $f(x)$  的增量为

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (1-1)$$

$\Delta f(x)$  称为函数  $f(x)$  的一阶差分, 它与微分不同, 因为是有限量的差, 故称为有限差分。

式 (1-1) 为一阶向前差分, 与之对应的  $\Delta f(x) = f(x) - f(x-h)$  为一阶向后差分, 组合一下得  $\Delta f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2}$ , 此一阶差分称为中心差分。

而一阶差分  $\Delta f$  除以增量  $h$  的商, 就称为一阶差商

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1-2)$$

当增量  $h$  足够小, 差分  $\Delta f$  与微分  $df$  之间的差才足够小,  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$  将接近于一阶导数  $\frac{df}{dx}$ 。

一阶差分  $\Delta f$  是自变量  $x$  的函数。按式 (1-1) 计算一阶差分  $\Delta f(x)$  的差分, 就得到二阶差分  $\Delta^2 f(x)$ 。

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \quad (1-3)$$

函数  $f(x)$  的一阶导数  $f'(x)$  为

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

它是无限小的微分  $df = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)$  除以无限小微分  $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$  的商。应用差分,  $f'(x)$  可近似表示为

$$\text{一阶向前差商} \quad f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1-4)$$

故  $f'(x)$  可表示为有限小的差分  $\Delta f(x)$  除以有限小差分  $\Delta x$  的商, 称为差商。同理, 一阶导数  $f'(x)$  还可表示为

$$\text{一阶向后差商} \quad \frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (1-5)$$

$$\text{中心差商} \quad \frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (1-6)$$

它们对于一阶导数的逼近度可以通过泰勒公式的展开式得知。

由泰勒公式, 其近似表达式可以写成

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \dots \quad (1-7)$$

和

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \dots \quad (1-8)$$

可见式 (1-4) 和式 (1-5) 都截断于  $h \frac{df(x)}{dx}$  项, 而把  $h^2$  项以及更高幂次的项全部略去。式 (1-6) 相当于把相应的泰勒公式

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h \frac{df(x)}{dx} + \frac{2}{3!} h^3 \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \dots \quad (1-9)$$

截断于  $2h \frac{df(x)}{dx}$ , 略去了  $h^3$  项以及更高幂次的项。很明显, 以上 3 种差商表达式中以式 (1-6) 所示的差商截断误差最小。其误差大致和  $h$  的二次方成正比。显然, 采用中心差商代替导数, 其精度更高。这种抛弃了泰勒展开式高阶项带来的误差就称为截断误差。  $h \rightarrow 0$ , 截断误差  $\rightarrow 0$ 。

函数  $f(x)$  的二阶导数 (差商的差商)  $f''(x)$  为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{df}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{df}{dx} \Big|_{x-\Delta x} \right) \\ &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right] \\ &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \end{aligned} \quad (1-10)$$

上式相当于把泰勒公式  $f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{2}{4!} h^4 \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \dots$  截断于  $h^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$  项, 略去了  $h^4$  项以及更高幂次的项。

对偏导数, 可仿照上述方法, 将  $\frac{\partial u}{\partial x}$  表示为



$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, y, z) - u(x, y, z)}{h} \quad (1-11)$$

同样，二阶偏导数可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y, z) - 2u(x, y, z) + u(x-h, y, z)}{h^2} \quad (1-12)$$

由此可见，有限差分法误差的关键之一： $\Delta x$  的大小。

### 1.1.2 求解步骤与网格划分

有限差分法的应用范围很广，不但能求解均匀或不均匀线性媒质中的位函数和有关参量，而且还能解决非线性媒质中的场；它不仅能求解恒定场或似稳场，还能求解时变场。从前面的数学分析可以看到，有限差分法是以差分原理为基础的一种数值方法，它实质上是将电磁场连续域问题变换为离散系统的问题来求解，也就是通过网格状离散化模型上各离散点的数值解来逼近连续场域的真实解。通常的步骤为：

(1) 采用一定的网格划分方式离散化场域。从原则上说，离散点可以采取任意方式分布，但为了简化问题，减少所用的差分格式数目，提高解题速度，通常使得离散点按一定的规律分布，即用规则网格划分求解域。常见规则网格有正方形、矩形、平行四边形、等角六边形和极坐标网格等，如图 1-1 所示。这些规则网格线的交点（节点）就是我们要计算其场值的离散点，网格间的距离称为步长，用  $h$  表示。其中最常用，也是最重要的是正方形网格。

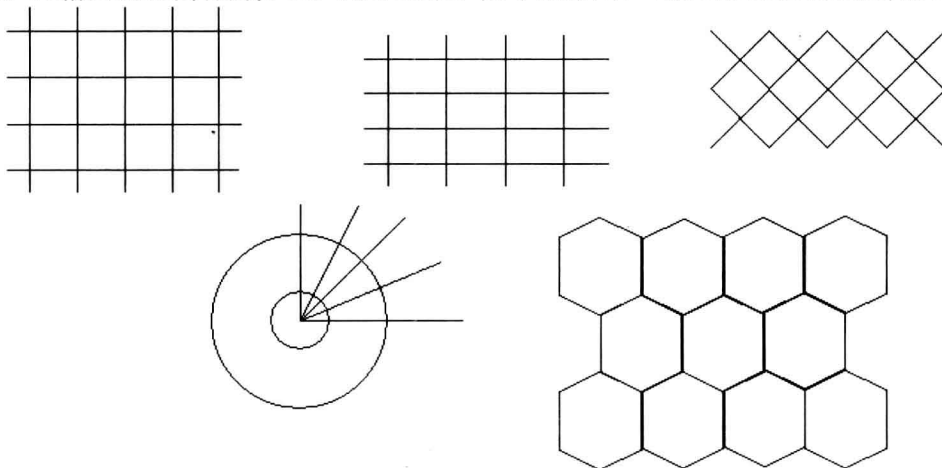


图 1-1 常见规则差分网格

当然，规则划分网格也有其局限：

- ① 不适合场的变化十分剧烈的问题。变化剧烈要取密网格，于是增加计算量和存储量；
- ② 不适用于曲线边界或分界面，因为它们与网格斜交而不在节点处。在第二类边界条件或含有法向导数的边界条件下将造成不少困难，它需要使用更高级的插值。

(2) 基于差分原理的应用，对场域内偏微分方程以及场域边界上的边界条件，也包括场域内不同媒质分界面上的边界条件，进行差分离散化处理，给出相应的差分计算格式。

(3) 结合选定的代数方程组的解法，编制计算机程序，求解由上所得的对应于待求边值问题的差分方程组，所得解答即为该边值问题的数值解。

## 1.2 静态场问题的差分法

在实际计算中,对于不同问题,所采用的差分方程的具体形式是不同的;具体取决于所求问题所选用的坐标系、网格形状和问题的边界条件。比如直线边界选用直角坐标系,圆形边界可以选用极坐标系等。下面我们以直角坐标系下的二维泊松方程为例讲解不同差分格式的形成。

### 1.2.1 差分格式的建立

泊松方程在物理中是用来描述稳定场的状态的, 写为

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1-13)$$

相应的边界条件有三类:

$$\phi|_G = g(p) \quad (\text{第一类边界条件}) \quad (1-14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_G = g(p) \quad (\text{第二类边界条件}) \quad (1-15)$$

$$\phi|_G + g_1(p) \frac{\partial \phi}{\partial n}|_G = g_2(p) \quad (\text{第三类边界条件}) \quad (1-16)$$

介质不连续处还要增加连接条件

$$\begin{cases} \phi_1|_G = \phi_2|_G \\ \epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial n}|_G - \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial n}|_G = \sigma \end{cases} \quad (1-17)$$

式中,  $G$  为区域边界,  $p$  为边界上的点,  $n$  为边界的法向单位向量。

按照前面所说的步骤进行数值求解。

首先离散化场域,通常采用完全有规律的分布方式,这样在每个离散点上可得出相同形式的差分方程,有效地提高解题速度。比如,用矩形网格,如图 1-2 所示。

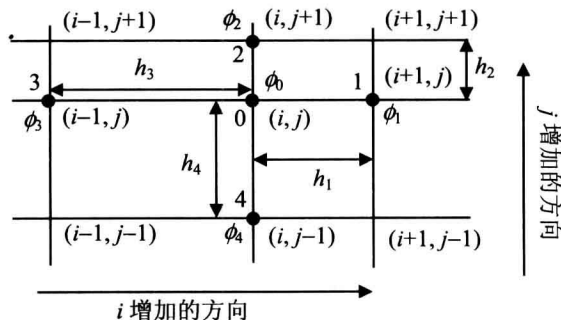


图 1-2 矩形差分网格的节点配置

取  $h$  为不相等的最一般情况。 $\phi_0$  代表中心点的函数值,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ ,  $\phi_4$  分别代表节点 1, 2, 3, 4 上的待求电位值。



然后形成差分格式，包括内点（场域中的节点）和边界点的差分格式。推导差分方程的方法有很多，在此我们采用泰勒级数展开法来推导点 0 的差分方程。

将任一点的位函数  $\phi$  沿  $i(x)$  方向展开节点为 0 的位函数  $\phi_0$  的泰勒级数

$$\phi = \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0(x-x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_0(x-x_0)^3 \dots \quad (1-18)$$

于是我们得到  $\phi_1$  和  $\phi_3$

$$\phi_1 = \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 h_1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 h_1^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_0 h_1^3 \dots \quad (1-19)$$

$$\phi_3 = \phi_0 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 h_3 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 h_3^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_0 h_3^3 \dots \quad (1-20)$$

$h_3$  乘式 (1-19) 加上  $h_1$  乘式 (1-20)，并忽略步长（步长很小）的三阶以上的高阶项，得到  $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0$  为

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 \approx 2 \frac{h_3(\phi_1 - \phi_0) + h_1(\phi_3 - \phi_0)}{h_1 h_3 (h_1 + h_3)} \quad (1-21)$$

当取相等步长时， $h_1 = h_3 = h_x$ ，有

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{\phi_1 - 2\phi_0 + \phi_3}{h_x^2} \quad (1-22)$$

同理可得

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 \approx 2 \frac{h_4(\phi_2 - \phi_0) + h_2(\phi_4 - \phi_0)}{h_2 h_4 (h_2 + h_4)} \quad (1-23)$$

相等步长时， $h_2 = h_4 = h_y$ ，有

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\phi_2 - 2\phi_0 + \phi_4}{h_y^2} + O(h^3) \quad (1-24)$$

将式 (1-21) 和式 (1-23) 代入泊松方程，得

$$\nabla^2\phi = 2\left[\frac{h_3(\phi_1 - \phi_0) + h_1(\phi_3 - \phi_0)}{h_1 h_3 (h_1 + h_3)} + \frac{h_4(\phi_2 - \phi_0) + h_2(\phi_4 - \phi_0)}{h_2 h_4 (h_2 + h_4)}\right] = f(x_0, y_0) = f_0 \quad (1-25)$$

取相等步长时， $h_1 = h_3 = h_x$ ， $h_2 = h_4 = h_y$ ，上式化为

$$\frac{\phi_1 - 2\phi_0 + \phi_3}{h_x^2} + \frac{\phi_2 - 2\phi_0 + \phi_4}{h_y^2} = f_0 \quad (1-26)$$

用节点的角标表示为

$$\frac{1}{h_x^2}(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}) + \frac{1}{h_y^2}(\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}) = f_{i,j} \quad (1-27)$$

此为“五点格式”或“菱形格式”。当然，不一定非要如图 1-2 所示的那样以最近的 4 个点来表示  $\phi_0$ ，例如也可以用包围  $\phi_0$  的 8 个点的电位。通常，如果把相邻的网格节点数取得愈多，则在同样分割的情况下，其计算结果的精确度愈高。但是有关系的节点数增多，则不仅差分计算式变得复杂，而且边界处理也将变得麻烦。所以当分割正方形或长方形时，通常是用上下左右 4 个点的电位来表示中心节点的电位。网格步长常常随场域的情况不同而改



变。由于场域的某些区域场值变化很急剧，对这部分局部性地分割且分割得较密，以提高计算的精确度，同时对一些不重要的部分则可以分割得较稀疏，以减少总的节点（未知量）数目。为了改变网格的步长，可以将场域划分为若干个块，把块内的网格步长取为定值，但各个块之间，网格步长的变化不能过大，否则用逐次超松弛法所求得解将变成不收敛。场域究竟应当分割得多细，首先关系到其结果的精确度，其次也关系到计算时间和计算机存储容量的重要问题。当  $h_x = h_y = h$  时，有

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = h^2 f_{i,j} \quad (1-28)$$

对拉氏方程， $f=0$ ，有

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0 \quad (1-29)$$

注意，微分方程在场域中每一点上都完全成立，而一个具体的差分方程仅在场域的各个具体的点上成立。即差分方程的公式形式相同，但在每一点上却有不同的内容，参见式(1-49)。

在旋转对称场的情况下（球、柱、回旋体等形状的问题都可以归结为平面轴对称场的计算），拉氏方程可表达为[根据柱坐标  $(r, \varphi, z)$ ， $\phi(r, \varphi, z)$  关于  $z$  对称推导]

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-30)$$

进行如图 1-3 所示的不等距网格划分，根据前面学过的式(1-20)~式(1-23)可得

$$\phi_0 \left( \frac{2}{h_2 h_4} + \frac{2r_0 + h_3 - h_1}{h_1 h_3 r_0} \right) = \frac{2}{h_2 (h_2 + h_4)} \phi_2 + \frac{2}{h_4 (h_2 + h_4)} \phi_4 + \frac{2r_0 + h_3}{r_0 h_1 (h_1 + h_3)} \phi_1 + \frac{2r_0 - h_1}{r_0 h_3 (h_1 + h_3)} \phi_3 \quad (1-31)$$

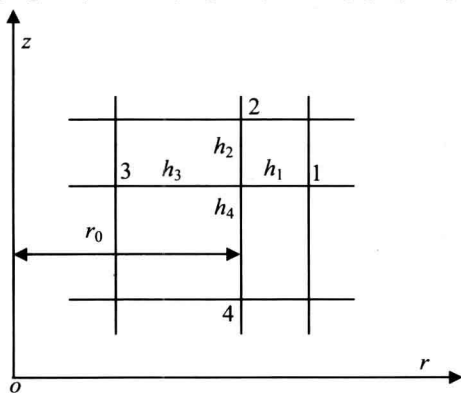


图 1-3 旋转对称场的不等距网格

在等距网格情况下， $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$ 。如果令轴线处  $j=1$ ，而点 0 落于第  $j$  行 ( $j > 1$ )，则  $r_0 = (j-1)h_0$ 。根据式(1-31)可得

$$4\phi_0 = \phi_2 + \phi_4 + \left[1 + \frac{1}{2(j-1)}\right] \phi_1 + \left[1 - \frac{1}{2(j-1)}\right] \phi_3 \quad (1-32)$$

若点 0 落在  $j=1$  的轴上，需另作处理，因为这时  $\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ ， $\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$  为不定值。由洛必达法则知