ETV 家庭教师辅导丛书

左右逢源

——高中数学解题思路

唐盛昌 吕宝兴 著

复旦大学出版社

“ETV 家庭教师”辅导丛书

左右逢源

——高中数学解题思路

唐盛昌
吕宝兴 编著

复旦大学出版社

(沪)新登字 202 号

责任编辑　周仲良

"ETV 家庭教师"辅导丛书
左右逢源——高中数学解题思路
唐盛昌　吕宝兴编著
复旦大学出版社出版发行
(上海国权路 579 号)
上海堡港印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 4.25　字数 94,000
1994 年 9 月第 1 版　1994 年 10 月第 2 次印刷
印数 20,001—40,000
ISBN7-309-01427-8/G・240
定价：3.80

内 容 提 要

本书借助于大量精选的例题，系统地讲述了高中数学解题的思路和技巧，并将其归纳为理解转换、模式识别、命题转换、变量代换、形数结合、猜想论证、分类讨论、映射反演、回顾反思等方法，从而为在校学生和高考应试者提供了一本良好的辅导读物，对中学数学教师也是一本非常有益的参考书。

本书是根据两位富于中学数学教学经验的老师在上海教育电视台“ETV 家庭教师”节目的讲课记录整理而成的。为了真实地反映作者的教学特色和授课风格，各讲保留了原有的标题和讲解体制，敬请读者注意。

目　　录

第一讲　理解转换

数学解题思维过程大致可分为四个阶段,即弄清问题,拟定计划,实现计划和回顾,也可以概括为理解,转换,实施和反思.

在理解问题以后,转换问题是解题思维活动的核心,理解转换是探索解题方向和途径的积极尝试和发现的过程,也是思维策略的选择和调整过程.

掌握和使用好基本的数学概念、定义、定理等是实施有效转换的基础.本讲想把重点放在如何利用数学基本概念解题上.这需要我们对概念有正确的理解,它的外延和内涵是什么?有哪些限制与约束?等等.还需要我们根据问题的特点,灵活合理地使用概念或定义.基本功扎实了,对问题的理解就比较深刻,实施转换也就更加有的放矢、切中要害了.

例 1　判断下列四个关于单调性的命题的正确性:

(1) $y=\sin x$ 在第一象限是增函数;

(2) $y=\operatorname{tg} x$ 是增函数;

(3) $f(x)$ 在 $x>0$ 为增函数,在 $x<0$ 时为增函数,则 $f(x)$ 在其定义域内为增函数;

(4) 若 $f(x)$ 是增函数,$g(x)$ 是增函数,则 $F(x)=f(x)g(x)$ 为增函数.

解　单调性是一区间概念,单调性是指:"对同一定义区

间上任意两点 $x_1>x_2$，若 $f(x_1)-f(x_2)$ 保持同号，则说 $f(x)$ 在这一区间具有单调性.”

据以上定义可以判明这四个命题无一正确.

命题(1)错. 反例：$\alpha=\frac{13}{6}\pi$，$\beta=\frac{\pi}{3}$ 同属第一象限，$\alpha>\beta$，但 $\sin\alpha<\sin\beta$.

命题(2)错. 反例：$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2}{3}\pi$，$\alpha<\beta$，但 $\mathrm{tg}\alpha>\mathrm{tg}\beta$.

命题(3)错. 反例：$f(x)=-\frac{1}{x}$，在 $x>0$ 时递增，$x<0$ 时也递增，但 $f(1)<f(-1)$，可见命题不正确.

命题(4)的错误是明显的，首先是命题没有指出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有没有公共的定义区间，其次是在有公共定义区间时结论也是错误的，反例：$f(x)=4^x$，$g(x)=-2^{-x}$ 都是增函数，但 $f(x)g(x)=-2^x$ 为减函数.

例 2 判断下列关于函数性质的命题的正确性：

(1) $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 在原点有定义，则 $f(0)=0$；

(2) $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)f(-x)\geqslant 0$；

(3) 若 $f(x)$ 对一切实数 x 满足 $f(x+a)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为周期函数(a 为定值)；

(4) 若 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2m-x)$，$x\in R$，则 $f(x)$ 的图像关于 $x=m$ 对称(m 为定值).

解 (1) $f(x)=-f(-x)$，设 $x=0$ 得 $f(0)=0$，故命题正确.

(2) 由 $f(x)=f(-x)$ 得 $f(x)\cdot f(-x)=f^2(x)\geqslant 0$，故命题正确.

(3) 令 $x=t+a$，则 $f(t+2a)=-f(t+a)=-[-f(t)]$

$=f(t)$，据定义知命题成立.

(4)令$x=m+t$，则$f(m+t)=f(2m-m-t)=f(m-t)$，可知 $f(x)$图像关于 $x=m$ 对称，命题(4)正确.

例 3　已知 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$x\in R$.

(1) 证明 $f(x)$是单调增函数；

(2) 求 $f^{-1}(f(3))$和 $f(f^{-1}(3))$.

解　(1) 任取 $x_1>x_2$，

$$\begin{aligned}
f(x_1)-f(x_2)&=\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}-\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}\\
&=\frac{1}{2}[(e^{x_1}-e^{x_2})+(e^{-x_2}-e^{-x_1})]\\
&=\frac{1}{2}[(e^{x_1}-e^{x_2})+\frac{1}{e^{x_1x_2}}(e^{x_1}-e^{x_2})]\\
&=\frac{1}{2}(e^{x_1}-e^{x_2})(1+e^{-x_1x_2})>0.
\end{aligned}$$

所以 $f(x)$在其定义域内为增函数.

(2) $f(x)$是 1—1 映射函数，故它存在逆映射．所以它存在反函数. 其映射过程为：$f:3\longrightarrow f(3)$；$f^{-1}:f(3)\longrightarrow f^{-1}(f(3))$，由1-1映射定义知$f^{-1}(f(3))=3$. 另一种解释是：$(3,f(3))$是原函数曲线上的点，所以$(f(3),3)$是其反函数曲线上的点，因此 $f^{-1}(f(3))=3$，同理可知 $f(f^{-1}(3))=3$.

如果通过求出反函数，然后代入 3 求得结果，徒费精力，还可能出错，事实上，互为反函数满足：

$$f(f^{-1}(x))=x,$$

$$f^{-1}(f(x))=x.$$

例 4　定义域为$[-2,2]$的函数 $f(x)$既是奇函数，又是增函数，求满足 $f(a+1)+f(2a-1)>0$ 的实数 a 的范围.

解 $\because\quad f(a+1)>-f(2a-1)$,

$\therefore\quad f(a+1)>f(1-2a)$.

$$\therefore\quad \begin{cases} a+1>1-2a \\ -2\leqslant a+1\leqslant 2 \\ -2\leqslant 2a-1\leqslant 2 \end{cases}$$

解不等式组得 $1\geqslant a>0$.

例 5 已知复数 z_1,z_2,z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，求证 $\left|\dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=1$.

证 本题自然也可以对 z_1,z_2,z_3 设三角式或代数式，然后代入原式求得结果，但麻烦是显见的，尤其是设代数式. 如果从模与其他的基本概念出发，情况就完全不同了.

$|z_1|=1\Rightarrow z_1\bar{z}_1=1$，$\dfrac{1}{z_1}=\bar{z}_1$. 同理 $\dfrac{1}{z_2}=\bar{z}_2$，$\dfrac{1}{z_3}=\bar{z}_3$.

$$\therefore\quad 原式=\left|\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3}{z_1+z_2+z_3}\right|$$

$$=\left|\frac{\overline{z_1+z_2+z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|$$

$$=\frac{|\overline{z_1+z_2+z_3}|}{|z_1+z_2+z_3|}=1.$$

证明中分别用到“和的共轭等于共轭的和”，“商的模等于模的商”，“互为共轭复数的模相等”这几个基本结论.

例 6 实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 有两个虚根 z_1,z_2，它们的对应点分别为 F_1、F_2，求以 F_1、F_2 为焦点且过原点的椭圆的长轴长(用 p,q 表示).

解 由椭圆定义，长轴长 $2a=|OF_1|+|OF_2|=|z_1|+$

$|z_2|$，z_1，z_2 互为共轭复数，它们的模相等.

$$\begin{aligned}\therefore\quad 2a&=2|z_1|=2\sqrt{|z_1|^2}\\&=2\sqrt{z_1\bar{z}_1}=2\sqrt{z_1z_2}\\&=2\sqrt{q}.\end{aligned}$$

求解中用到椭圆定义、模的性质、实系数一元二次方程两虚根的关系以及韦达定理.

例 7 椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，$AB$ 为过左焦点的弦，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 $x_1+x_2=-3$，求弦 AB 的长.

解 1 左焦点为$(-2,0)$，设 AB：$y=k(x+2)$.

代入椭圆得：

$$3x^2+4k^2(x+2)^2=48,$$

$$x^2(3+4k^2)+16k^2x+16k^2-48=0.$$

$$x_1+x_2=-\frac{16k^2}{3+4k^2}=-3,$$

$$k=\pm\frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|\\&=\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{256k^4-4(4k^2+3)(16k^2-48)}}{3+4k^2}\\&=\frac{\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\sqrt{576k^2+576}\\&=\frac{24(1+k^2)}{3+4k^2}.\end{aligned}$$

代入 $k=\pm\dfrac{3}{2}$， 得$|AB|=6.5$.

解 2 设左焦点为 F，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，左准线为 $x=-8$，由椭圆定义：

$$|AF| = e(x_1+8),$$
$$|BF| = e(x_2+8).$$
$$\therefore \quad |AB| = |AF| + |BF| = \frac{1}{2}(x_1+x_2+16) = 6.5.$$

比较两种不同的解法，可见定义对解题有很大的作用，这一点在解析几何中尤其明显，练习中所选解几习题都可用定义求解.

例 8 已知数列$\{a_n\}$是等比数列，$b_n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$C_n = 2 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，若已知 C_n 为等比数列，分别求出 a_n，b_n，C_n 的通项公式.

解：设$\{a_n\}$的首项为 a、公比为 q.

若 $q=1$，则 $b_n = na+1$，$c_n = 2 + a(1+2+3+\cdots+n) + n = 2 + n + \frac{n(n+1)a}{2}$，则 c_n 是一个从第二项开始的等差数列，与题意不符. 因此 $q \neq 1$.

$$\therefore \quad b_n = 1 + \frac{a(1-q^n)}{1-q} = 1 + \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n.$$

$$\therefore \quad c_n = 2 + n\left(1+\frac{a}{1-q}\right) - \frac{a}{1-q}\frac{q(1-q^n)}{1-q} = 2 - \frac{aq}{(1-q)^2} + n\left(1+\frac{a}{1-q}\right) + \frac{aq}{(1-q)^2}q^n.$$

因为 c_n 为等比数列，所以它是 n 的指数函数.

$$\therefore \quad \begin{cases} 2 - \dfrac{aq}{(1-q)^2} = 0 \\ 1 + \dfrac{a}{1-q} = 0, \end{cases}$$

解得 $a=1, q=2$.

$$\therefore\quad a_n=2^{n-1};$$

$$b_n=1+1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n;$$

$$c_n=\frac{aq^{n+1}}{(1-q)^2}=2^{n+1}.$$

解答本题的关键是明确 c_n 是 n 的指数函数,且不含其他的项.

练习一

1. 命题:

a. 幂函数 $y=x^a$ 在 $x>0$ 时必是单调函数;

b. 两个不同的幂函数至多有三个不同交点;

c. 幂函数的图像不可能出现在第四象限;

d. 作为偶函数的幂函数必过 $(-1,1)$ 点.

以上命题正确的有(　).

A 1个;　B 2个;　C 3个;　D 4个.

2. 抛物线 $y^2=4x$,定点 $P(2,2)$,F 为焦点,A 为抛物线上点,则 $|AF|+|AP|$ 的最小值为(　).

A 2;　B 3;　C 4;　D 其他值.

3. 已知函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的反函数就是它本身,那么原函数的定义域是(　).

A $(1,1)$;　B $[-1,1]$;　C $[-1,0]$;　D $[0,1]$.

4. 复数 $a+bi=\cos\theta+i\sin\theta$,$(a,b\in R,\frac{3\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant2\pi)$,则 $-b+ai$ 的辐角主值为 ________.

5. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，过焦点 F_1 的弦 AB 长为 m，以另一焦点 F_2 为顶点的三角形 ABF_2 的周长为________.

6. α 为第二象限角，比较 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$的大小.

7. $x>0$，判别函数 $y=x+\frac{1}{x}$的单调性.

8. 已知P为椭圆$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$上一点，$F_1$，$F_2$为焦点，$\angle F_1PF_2=60°$，求$\triangle F_1PF_2$的面积.

9. 已知 P 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 右支上点，F 为右焦点，证明：以 PF 为直径的圆与以实轴为直径的圆相外切.

10. 设复数 z_1，z_2 满足 $z_1\bar{z}_2+\bar{A}z_1+A\bar{z}_2=0$（$A\in C$，$A\neq 0$），求证：

（1）$|z_1+A||z_2+A|=|A|^2$；

（2）$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}$.

11. 已知双曲线$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1$，$F(0,5)$为双曲线的一个焦点，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,6)$，$C(x_3,y_3)$为双曲线上支上不同三点，且$|AF|$、$|BF|$、$|CF|$成等差数列.

（1）求 y_1+y_3 的值；

（2）证明线段 AC 的垂直平分线与 y 轴交于定点.

第二讲　模式识别

数学习题浩如烟海，解法各异，结论更不相同．但不少问题依然具有固有规律，例如二次函数的极值问题，不管条件如何千变万化，也不管设问如何冷僻古怪，它的求解过程总不外乎这样三个步骤：(一)得到二次函数；(二)确定变量范围；(三)据抛物线对称轴的位置及开口方向确定极值．像这种固定的解题格局与程序我们称之谓模式．

模式识别的含义包括两个部分：其一是对模式的认识，熟悉各种解题模式．这不仅需要多做多练，更重要的是及时小结，认真学习他人经验，积累和记住各种常用解题模式，其二是模式判别，对一些数学问题不被假象所迷惑，剥去伪装，适时代换，合理变形，转化为熟悉的题解模式．

下面提供的一些例题仅是一些常用解题模式的很小一部分．

例 1　$\arcsin\sin\sqrt{3}$的值为(　)．

A $\sqrt{3}$；　**B** $\frac{\pi}{3}$；　**C** $\pi-\sqrt{3}$；　**D** $\sqrt{3}-\pi$．

解　当x为反正弦主值区间内的角时，$\arcsin\sin x=x$，这里$\sqrt{3}\notin[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，选择A是错误的．这类题目的解题模式是：(1) 通过诱导公式把非主值区间角转化为主值区间角：

$$\sin\sqrt{3}=\sin(\pi-\sqrt{3}),$$

$$\pi-\sqrt{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

（2）主值区间内角直接表示：

$\arcsin\sin\sqrt{3}=\arcsin\sin(\pi-\sqrt{3})=\pi-\sqrt{3}$，故选 C.

上述提到的解题模式同样适用于下面两个问题：

问题 1：求 $y=\cos x$，$x\in[\pi,2\pi]$的反函数.

第一步　化入主值区间：

$$y=\cos x=-\cos(x-\pi),$$

$$x-\pi\in[0\ \pi].$$

第二步　直接用反三角函数表示：

$$x-\pi=\arccos(-y)$$

$$\therefore\quad y=\pi+\arccos(-x),$$

$$x\in[-1,1].$$

问题 2：已知 $\operatorname{ctg}\alpha=5$，$\alpha\in(3\pi,4\pi)$，求 α.

第一步　化入主值区间：

$$5=\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(\alpha-3\pi).$$

$$\alpha-3\pi\in(0,\pi).$$

第二步　直接用反三角函数表示

$$\therefore\quad \alpha-3\pi=\operatorname{arcctg}5,$$

$$\alpha=3\pi+\operatorname{arcctg}5.$$

例 1 中提到的 3 个问题，形式各异，设问不同，但解题过程如出一辙. 可见熟悉模式、识别模式在解题中的作用.

例 2　求 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$，$x\in[1,3]$，的值域.

解 1

$$x=\frac{-1-2y}{y-2},$$

$$1\leqslant\frac{-1-2y}{y-2}\leqslant 3,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1.$$

解 2 $y=\frac{2x+4-5}{x+2}=2-\frac{5}{x+2}$在区间[1,3]上为增函数.

$$\therefore \quad f(1) \leqslant y \leqslant f(3),$$

即
$$\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1.$$

本题的两种解法给出了利用函数性质求极值的两种不同模式.

解 1 是利用变量的有界性求极值,其模式为:定变量范围;解出变量;转化为 y 的不等式.如求 $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$的值域:

$$y=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1},$$

$$10^{2x}=\frac{-1-y}{y-1}>0,$$

$$\therefore \quad -1<y<1.$$

解 2 是利用单调性求极值,其模式为:判定单调性;定变量范围;代入变量的边界值.如求 $y=2x-1+\sqrt{x+1}$的值域:y 为增函数,$x \geqslant 1$,所以 $y \geqslant f(1)=1$.

例 3 求下列三角函数的最大值和最小值:

(1) $y=3\sin(x+20°)+5\sin(x+80°)$;

(2) $y=\frac{\operatorname{tg}x-\sin^2 x}{\operatorname{tg}x+\sin^2 x}\left(\frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{5}{12}\pi\right)$.

解 (1)观察函数中含变元的仅为 $\sin x$ 和 $\cos x$,所以本题最值问题不过是大家熟知的 $a\cos x+b\sin x$ 类型.

$$y=3\sin(x+20°)+5\sin(x+80°)$$

$$=3\sin x\cos 20^\circ+3\cos x\sin 20^\circ$$
$$+5\sin x\cos 80^\circ+5\cos x\sin 80^\circ$$
$$=\sin x(3\cos 20^\circ+5\cos 80^\circ)$$
$$+\cos x(3\sin 20^\circ+5\sin 80^\circ).$$

$\because \quad (3\cos 20^\circ+5\cos 80^\circ)^2+(3\sin 20^\circ+5\sin 80^\circ)^2$

$$=9+25+30(\cos 20^\circ\cos 80^\circ+\sin 20^\circ\sin 80^\circ)$$
$$=34+30\cos 60^\circ=49.$$

$\therefore \quad y_{max}=7;$

$y_{min}=-7.$

（2） 把所求函数变形为 $y=\dfrac{2-\sin 2x}{2+\sin 2x}$，这是利用正、余弦函数有界性的三角极值类型.

$$\sin 2x=\frac{2-2y}{y+1}.$$

$\because \quad \dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant \dfrac{5}{6}\pi,$

$\therefore \quad \dfrac{1}{2}\leqslant \sin 2x\leqslant 1,$

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{2-2y}{y+1}\leqslant 1,$$

$\therefore \quad y_{max}=\dfrac{3}{5}, y_{min}=\dfrac{1}{3}.$

例 4 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$，求 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ 的值.

解 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1}{4}$，

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1}{3}.$