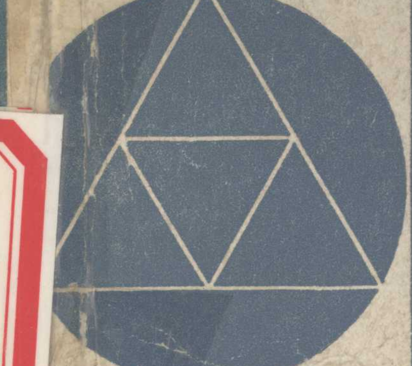
中学教师《专业合格证书》数学教材

SHUXUE

# 数学分析

上册

杨守廉 主编



北京师范学院

中学教师《专业合格证书》数学教材

# 数 学 分 析

## 上 册

杨守廉 主编

北京师范学院出版社

1987年 · 北京

## 内 容 提 要

本书是根据1986年国家教育委员会制定的中学教师专业合格证考试《数学教学大纲》编写的。全书分上、下册，包括一元函数、极限、连续函数、实数及实数连续性、级数、二元函数的相应理论及微分方程。

中学教师《专业合格证书》数学教材

**数 学 分 析**

上 册

杨守廉 主编

北京师范学院出版社出版

（北京阜城门外花园村）

新华书店首都发行所发行 国防工业出版社印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张：15.5 字数：336千

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数 1—64000本

ISBN 7—81014—055—8/G·54

统一书号：7427·180

定 价：2.70元

# 说　明

《中共中央关于教育体制改革的决定》提出："要争取在五年或者更长一点的时间内使绝大多数教师能够胜任教学工作。在此之后，只有具备合格学历或有考核合格证书的，才能担任教师"。为了贯彻落实这一要求，国家教育委员会决定建立中小学教师考核合格证书制度，并于 1986 年 9 月颁发了《中小学教师考核合格证书试行办法》。根据该《试行办法》的规定，我们已经组织编写出版了中小学教师《专业合格证书》文化专业知识考试各科教学大纲。现在，我们又按照教学大纲的基本要求，组织编写出版这套教材，供中小学教师参加《专业合格证书》文化专业知识考试用。这套教材包括：中等师范 11 门课程、高等师范专科 14 个专业的 48 门课程、高等师范本科 12 个专业的 40 门课程，以及公共教育学、心理学课程用书。

这套教材的编写力求具有科学性、系统性和思想性，并努力体现以下原则和要求，要有鲜明的师范性，紧密联系中小学教学的实际；要符合成人在职进修的特点，便于教师自学、自检；要使大多数教师经过努力可能达到规定的要求。

考核合格证制度刚刚试行，且缺少经验，加之这套教材出版时间仓促，难免存在一些问题，我们准备继续在实践中探索和研究，争取用几年的时间，建设一套适合我国中小学在职教师进修的教材。希望全国师范教育工作者，尤其是从事在职中小学教师培训工作的同志为此共同努力。

这套教材在编写、出版和发行工作中，得到了各省、自治区、直辖市教育行政部门，许多师范院校、教育学院、教师进修学校和师资培训中心，许多专家和教师，以及有关出版和教材发行部门的大力支持和帮助，在此一并致谢。

国家教育委员会师范教育司

一九八七年六月一日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 前　言

本书是按照国家教委关于中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试的要求，作为培训初中数学教师的一本教学用书。

本书是在多年师范大学本科和成人师范教学经验的基础上，按照保持教学水平、突出师范特点、适合成人自学的原则编著而成。我们希望这本书对培训工作是一本合用的教材；对广大自学者是一本好读的书籍；对那些已学过本门课程的中学教师也能从中得到裨益；对师范教学工作者是一本尚可暂存案头的参考书。

在内容的取舍编排上有三个主要特点。

（1）重点在一元函数的分析理论，压缩了二元函数等章节的内容；简略处理和删减了实数连续性理论，但在这一理论的应用方面，特别是应用于对中学数学课程的分析方面，得到充分加强。

（2）注重联系和分析中学数学知识，如函数的概念、初等函数的性质、有理数及其无穷小数表示、开方运算和无理指数幂、线段的公度以及面积、体积概念等都在相关章节进行了较为详细的阐述和分析。这些内容构成了本课程的主体之一。

（3）对概念的掌握、逻辑推证能力的培养、分析、综合能力的提高，以及运算技能等方面都坚持在一个适当的基本要求上。不求技能技巧的高超，但在基本要求的扎实掌握

上则求之甚严。

本书是职业培训教材，不同于一般的大专课本。但为了使那些希望进一步学习的读者能够使用本书，增写了一个附录，其中收入了一些为进一步学习必不可少的概念和理论。

参加本书编写的其他作者有何怡生、周祖逵、金闽、刘培娜、王书芸和杨锡文。本书的附录由周祖逵、王书芸编写。

由于我们水平有限，错误和不妥之处一定很多，希望广大读者批评指正。

北京师范学院王景鹤先生审阅了本书全稿；北京师范大学邝荣雨先生仔细审阅了本书前二章，提出了许多宝贵的原则性意见，对本书基调的确定起了很大作用；北京市海淀区教研所张士充先生对本书前二章也提出了许多宝贵的意见，在这里一并表示感谢。

杨守廉

1987.6. 于北京师范学院

# 致 读 者

我们谨以此书奉献给广大中学数学教师和有志于自学成材的青年。希望对他们的教学和学习有所帮助。

学习数学分析难不难？应该怎样阅读这本书？怎样才能学到手？这里我们与读者谈谈这些问题。

如果说学习数学分析有一定难度，基本原因就是它的理论要求比初等数学高了一层。要求读者能理解和掌握变量数学的论证方法——通常称为“$\varepsilon-\delta$”论证法；要求读者逐步培养起抽象思维和严格论证的能力。虽然本书只坚持基础性的要求，读者仍须花很大力气才能学懂和掌握。不过这不是一座很高的山峰，只要下了实劲是完全可以攀登上去的。

本书的第一章是预备，第二章是关键，第四章和第九章的可积性理论是难点，其它阐述微积分基本理论的章节是主体。

第一章除了复习中学的某些知识、研究了函数这一重要概念外，还安排了逐步提高逻辑推证能力的训练内容，如对命题的否定、反证法、穷举证明法等。对初学者，这是重要的入门训练，望读者重视。

第二章讲极限。导数和积分都是某种形式的极限。因此这一章是理论基础，是学好本课程的关键。跨过了这个门槛，登堂入室就较容易了。

第四章和第九章的前几节是本书的难点，由于论证的抽象性，初学者会感到相当费解。读者可按本人情况适当处置。

如果读不懂，可在了解了第四章的主要结论后，先读第五、六、七、八章，然后再回头细读第四章，或者放到最后学习。一般说来，有了一定的阅读能力和抽象思维能力后，通过努力是可以读懂的。

联系和分析中学数学知识是本书的重要组成部分，我们期望读者能结合本人的教学实践进行学习，能提出更多的问题进行讨论和分析。

关于学习方法，提出以下几点供读者参考。

（1）首先要学会阅读。由于初学者通常没有阅读过在逻辑上要求较严格的书籍，往往匆匆而过、泛泛一读，结果是似懂非懂，甚至不知所云。阅读本书，特别是定义、定理及其论证，必须逐字逐句仔细推敲。要弄懂每一步推理及其依据，不惜时力地加以各种注记，把书读厚。

（2）读书要与独立思考结合起来，并且要在学习过程中逐步提高独立思考的水平。从逻辑上弄懂了某个定理的证明，并不等于理解了这个定理。还有一个把书本上的思想变成自己的思想的过程。当然，这不能一蹴而就，是个反复阅读和体会的过程。譬如，从逻辑上读通以后，应该合上书本想一想，定理证明的总思路是什么？定理给出的条件在哪些点上起了作用？没有这个条件行不行？不行的话能举出反例来吗？定理有什么直观形象的解释？即使你的解释和体会尚有若干毛病也不要紧，可在以后慢慢修正。而且吃一堑、长一智，长进更快。在独立思考能力有了相当提高以后，再学一些新的定理，就不妨先作一些想象和试证，然后再来阅读书本，这样可把证明思想弄得更透，提高更快。

（3）要用具体实例为思想背景去理解抽象的表述和论证。举个例子说，在中学我们已经学过了数学归纳法。现在

我们用一种抽象语言来表述它："设$P$是依赖于自然数$n$的性质。若$P(1)$成立；又若$P(n)$成立便可推知$P(n+1)$成立，则$P(n)$对一切自然数$n$都成立"。正因为我们做过具体的数学归纳，例如，证明公式$1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$，此时$P(n)$就表示这个公式对$n$成立，对照之下，我们对那段抽象表述就不难理解了。在数学分析中的抽象表述和论证比比皆是，读者切不要望之生畏；用实例去对照、去验证、去思考，功夫做到，定能见效。

学习方法是活的，因人而异，有待读者自己去摸索和创造。

预祝大家自学成功。并期望听到对本书的意见。

编　　者

1987.6.于北京

# 目　录（上册）





此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第一章 函　数

函数是最重要的数学概念之一，是本课程研究的中心和主体。在任何一门数学课程中，函数都是研究的对象和不可缺少的工具。即使在其它自然科学领域和工程技术中，函数的概念也被广泛地应用，是最重要的概念之一。

初中代数课本中已经引入了函数的概念，高中代数课本中应用集合和映射的观念重新定义了函数。这两个定义虽然要刻划的是同一个事物，但落脚点是不同的（见§1.2）。初中的函数定义已有很长的历史，高中的定义则是近代为大家所接受的。在本章中采用的函数定义大体与高中课本中的相同，但要走得更远一些。首先要澄清函数概念与解析表达式纠缠在一起的模糊观念，其次是要建立函数就是映射的观念。

在中学不论函数的定义如何，所研究的只是初等函数。初等函数虽然仍是我们研究的主要对象，但本课程涉及的将是更广泛的一类函数。

## §1.1 集合与不等式

### 一、集合与集合的运算

集合与集合的运算已在高中代数课本中学过了，这里只是作一个复习。

在数学中总是用旧的概念去定义新的概念。譬如我们说：两边相等的三角形称为等腰三角形，“等腰三角形”是一个新

概念，而“三角形”“三角形的边”“边相等”等都是旧概念。旧的概念又要更旧的概念去定义。追本朔源，总有一些概念是不加定义而只能用例子、用描述性的语言来说明。集合就是这样的概念。

把一些东西看作一个总体称之为一个集合。如整数的集合，代数式的集合，中国人的集合，3，9，15这三个数的集合等等。

若用$\boldsymbol{Z}$记整数的集合，则5便属于这个集合，这件事就记作$5\in\boldsymbol{Z}$，读作“5属于$\boldsymbol{Z}$”，或读作“5是$\boldsymbol{Z}$的元素”。再如

$$-5\in\boldsymbol{Z},\quad \frac{2}{3}\notin\boldsymbol{Z}.$$

集合常常是由某种特征来划定的，例如整数的集合，便是由整数这个特征划定的。中学已经学过用大括号来表示一个集合的方法。例如正整数的集合就可表示成

$$\{x\mid x\in\boldsymbol{Z}\text{且}x>0\},$$

即在大括号内竖线的右边写上划定这个集合的特征，有时为了方便上述集合也可表示为

$$\{x\in\boldsymbol{Z}\mid x>0\}.$$

不一定每个集合都由某种特征划定，例如“3，9，15这三个数的集合”就不是按数的某种特征来划定的，而是人为地划定的。但一般说来无限集总是由某种特征来划定的。

有限集如果个数不多，常常用穷举法表示，例如3，9，15这三个数的集合可表示作

$$\{3,\ 9,\ 15\}.$$

中学我们还学过**子集**、**交集**、**并集**和**补集**的概念。它们的符号表示与定义可简述如下：

$$A \subseteq B \text{意为} \quad \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

“$\forall$”是一个逻辑符号读作“任意的”;“$\Rightarrow$”也是一个逻辑符号，读作“可推出”。上述逻辑表达式的意思就是：$A$的每个元素也都是$B$的元素。如果$A \subseteq B$，则称$A$是$B$的子集。对两个集合$A$与$B$，如果$A \subseteq B$，同时$B \subseteq A$，就说这两个**集合相等**，记作$A = B$。

集合$A$和$B$的并集记作$A \cup B$，交集记作$A \cap B$，它们的定义是：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{同时} x \in B\}.$$

如果要表示$n$个集合$B_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，或无限多个集合$B_i$，$i = 1, 2, \cdots$，的并（或交），可采用以下三种表示法：

（1）$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n;$$
$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup \cdots;$$

（2）$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i; \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i;$$

（3）$$\bigcup \{B_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\};$$
$$\bigcup \{B_i \mid i = 1, 2, \cdots, n, \cdots\},$$

它们的意义是相同的。(1),(2)两种表示法借用了无限个数字或$n$个数字相加的记法，例如

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \text{ 记作 } \sum_{i=1}^{n} i^2,$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + \cdots\cdots \text{ 记作 } \sum_{i=1}^{\infty} i^2$$

等。第三种表示法表示把集族$\{B_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$或



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com