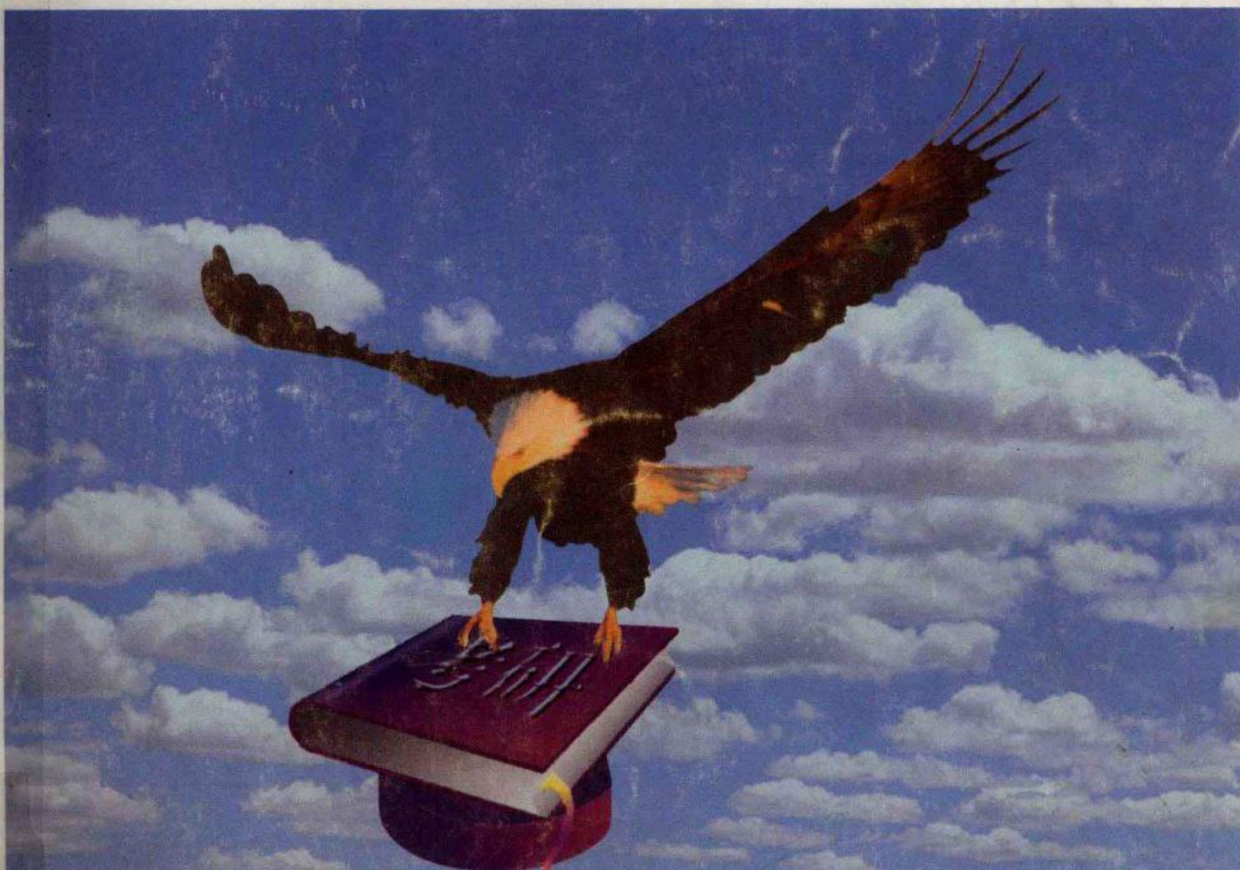
硕士研究生入学考试

历年数学试题汇编

(1994年-2000年)

附赠陈文灯教授全套2001年数学考研最新全真模拟题



理工类(一)

北京文登考研辅导中心

2000年·北京

前　言

1987 全国工学硕士研究生入学考试已经超过 13 届，所以很难保证每年试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年试题有一部分是雷同的。比如：

2000 年的数学一的第二大题第 2 小题与 1988 年数学一的第二大题第 3 小题雷同。

1991 年数学一的第七大题与 1998 年数学二的第十二大题雷同。

2000 年数学一的第七大题与 1995 年数学一的第一大题第 4 小题雷同。

2000 年数学二的第二大题第 2 小题与 1997 年数学二第二大题第 3 小题雷同。

1999 年数学一的填空题第 2 小题与 1998 年选择题的第 1 小题雷同。

1999 年数学二填空题第 1 小题与 1994 年数学四的第五大题雷同。……

由此可见，最近几年数学考题中，有近 20 道题与往届考题雷同或相似，考生若把这些历年数学试题细致做一遍，将为考研的成功打下坚实的基础。

按照 2001 年新的命题动态，我们精心编制四套数学理工一文登标准题库模拟题，供考生们选做。

目 录

一、2000 年理工数学一试题及解析

2000 年理工数学一试题

考生注意：

(1) 本试卷共十三个大题，满分 100 分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x =$ ________.

(2) 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 的法线方程为________.

(3) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为________.

(4) 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解，则 $a =$ ________.

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A) =$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$，则当 $a < x < b$ 时，有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$　　[　　]

(2) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有

(A) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$　　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$　　(D) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S$　　[　　]

(3) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$　　[　　]

(4) 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件为

(A) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 等价

(D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ 等价　　[　　]

(5) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为

(A) $E(X) = E(Y)$　　(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$　　(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$

[　　]

三、(本题满分 5 分)

求 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

四、(本题满分 5 分)

设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心,R 为半径的圆周($R>1$)取逆时针方向.

六、(本题满分 7 分)

设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S,都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.求 $f(x)$.

七、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为 R 的球体,P_0 是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$),求球体的重心位置.

九、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.试证:在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

十、(本题满分 6 分)

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,其中 E 为 4 阶单位矩阵,求矩阵 B.

十一、(本题满分 8 分)

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n,记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$；

(2) 验证 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

十二、(本题满分 8 分)

某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0 < p < 1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X. 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & x \leqslant \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数，又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

2000 年理工数学一试题解析

一、填空题

(1) $\underline{\frac{\pi}{4}}$.

[解析] $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{1-x=t} \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$

$\xlongequal{t=\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \cos u \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}u = [\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

(2) $\underline{\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}}$.

[解析] 令 $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$ 则

$F'_x(1,-2,2) = 2x\Big|_{(1,-2,2)} = 2$

$F'_y(1,-2,2) = 4y\Big|_{(1,-2,2)} = -8$

$F'_z(1,-2,2) = 6z\Big|_{(1,-2,2)} = 12.$

因此所求法线方程为

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z-2}{12}$,即$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$

(3) $\underline{y = C_2 + \frac{C_1}{x^2}}$.

[解析] 令 $p = y'$,则 $xp' + 3p = 0$,解得 $p \cdot x^3 = \overline{C_1}$ 即 $y' = \frac{\overline{C_1}}{x^3}$

积分得 $y = -\frac{\overline{C_1}}{2}x^{-2} + C_2 = C_2 + \frac{C_1}{x^2}$.

(4) $\underline{-1}$.

[解析] 由题设必有$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = (3-a)(a+1) = 0$

即 $a = 3$ 或 $a = -1$

当 $a=3$ 时

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&5&3\\1&3&-2&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&1&-3&-1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

显然此时 $R(\overline{A})=R(A)=2$,方程组有解,因此正确答案必为 $a=-1$.

(5) $\frac{2}{3}$.

[解析] 由题设 A、B 相互独立,即 $P(AB)=P(A)P(B)$,且 $P(\overline{A}\overline{B})=\frac{1}{9}$,$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$,即有

$$\begin{cases}P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=\frac{1}{9}\\P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\end{cases}$$

也即 $\begin{cases}1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=\frac{1}{9}\\P(A)=P(B)\end{cases}$

$\Rightarrow\quad 1-2P(A)+P^2(A)=\frac{1}{9}$

解得 $\quad P(A)-1=\pm\frac{1}{3}$,$P(A)=\frac{4}{3}$ 或 $P(A)=\frac{2}{3}$

由于 $P(A)\leqslant 1$,故 $P(A)=\frac{2}{3}$.

二、选择题

(1) 应选(A)

[解析] $\because f(x)>0,g(x)>0$,由 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$ 有

$$\frac{f'(x)}{f(x)}<\frac{g'(x)}{g(x)}$$

两端从 $x(a<x<b)$ 到 b 积分得

$$\ln f(b)-\ln f(x)<\ln g(b)-\ln g(x)$$

即 $$\ln f(b)g(x)<\ln f(x)g(b)$$

故有 $\quad f(x)g(b)>f(b)g(x)$,因此应选(A).

(2) 应选(C)

[解析] S 关于 $x=0$ 和 $y=0$ 均对称,且(A)、(B)、(D)中左端项的被积函数关于 x 或 y 为奇函数,因此左端的积分均为0,而(A)、(B)、(D)中右端积分显然不为零,故正确答案必

为(C).事实上,由对称性和轮换对称性,有

$$\iint_S z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S.$$

(3) 应选(D)

[解析] 此题为无穷级数的一个基本性质:收敛的级数加括号后仍收敛.因此(D)正确.(A)、(B)、(C)易找反例说明均不成立.

(4) 应选(D)

[解析] (A)、(B)、(C)均不是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的必要条件.例如:$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,则 $\beta_1\neq 0$ 线性无关.但(A)、(B)、(C)均不成立,因此只有(D)为正确答案.事实上,$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关,即 $R(\beta_1,\cdots,\beta_m)=m\Leftrightarrow R(\beta_1,\cdots,\beta_m)=m=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\Leftrightarrow R(\mathrm{A})=R(B)$,即 A、B 等价.

(5) 应选(B)

[解析] $\rho_{\xi\eta}=0\Leftrightarrow \operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$,即

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi\cdot E\eta=E(X^2-Y^2)-(EX+EY)(EX-EY)$$

$$=EX^2-EY^2-[EX]^2+[EY]^2=0$$

也即 $EX^2-[EX]^2=EY^2-[EY]^2$.

三、[解析]

函数表达式中含有绝对值符号,实际上是分段函数在分段点的极限问题,应用左右极限进行讨论.另外,形如 $\lim\limits_{x\to x_0} a^{\frac{1}{x-x_0}}$ 的极限问题也均应用左右极限进行分析.

因 $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

故原式 = 1.

四、[解析]

本题直接利用复合函数求偏导公式即可.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f'_1 + y(xf''_{11} - \frac{x}{y^2}f''_{12}) - \frac{1}{y^2}f'_2 + \frac{1}{y}(xf''_{21} - \frac{x}{y^2}f''_{22}) - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''$$

$$= f'_1 - \frac{1}{y^2}f'_2 + xyf''_{11} - \frac{x}{y^3}f''_{22} - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''$$

五、[解析]

闭曲线上的曲线积分自然联想到用格林公式,但本题在闭曲线所围区域内含有奇点,应先去掉奇点.为此可考虑作一足够小的椭圆挖去奇点,之所以作一小椭圆,主要是在此小椭圆上使得分母部分 $4x^2 + y^2$ 为一常数.一般情形,此类辅助曲线均可由分母部分为常数得到.

$$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \neq (0,0)$$

作足够小椭圆 C:$\begin{cases} x = \dfrac{\delta}{2}\cos\theta \\ y = \delta\sin\theta \end{cases}$ ($\theta \in [0,2\pi]$,C 取逆时针方向)

于是由格林公式有

$$\oint_{L+C^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = 0$$

即得 $$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}\delta^2}{\delta^2}\mathrm{d}\theta = \pi$$

六、[解析]

先由高斯公式引出一微分方程,解此方程得通解,再由极限式确定任意常数.本题虽然考查到多个知识点,但每一部分均为基本要求掌握的内容.

由题设和高斯公式得

$$0 = \oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm \iiint_V (xf'(x) + f(x) - xf(x) - \mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}V$$

其中 V 为 S 围成的有界闭区域,当有向曲面 S 的法向量指向外侧时,取“+”号,当有向曲面 S 的法向量指向内侧时,取“−”号.由 S 的任意性,知

$$xf'(x) + f(x) - xf(x) - \mathrm{e}^{2x} = 0 \quad (x > 0)$$

即 $$f'(x) + (\frac{1}{x} - 1)f(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x} \quad (x > 0)$$

按一阶线性非齐次微分方程通解公式,有

$$f(x) = e^{\int(1-\frac{1}{x})dx}\left[\int \frac{1}{x}e^{2x} \cdot e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} + C\right]$$

$$= \frac{e^x}{x}\left[\int \frac{1}{x}e^{2x} \cdot xe^{-x}dx + C\right]$$

$$= \frac{e^x}{x}(e^x + C)$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{e^{2x} + Ce^x}{x}\right] = 1$,故必有 $\lim\limits_{x\to0^+}(e^{2x} + Ce^x) = 0$

即　$C + 1 = 0$,从而　$C = -1$.

于是　$f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x - 1)$.

七、[解析]

本题应注意收敛区间特指开区间.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[3^n + (-2)^n]n}{[3^{n+1} + (-2)^{n+1}](n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[1 + (-\frac{2}{3})^n]n}{3[1 + (-\frac{2}{3})^{n+1}](n+1)} = \frac{1}{3}$

所以收敛半径为 3,收敛区间为 $(-3,3)$.

当 $x = 3$ 时,因为 $\frac{3^n}{3^n + (-2)^n}\cdot\frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以原级数在点 $x = 3$ 处发散

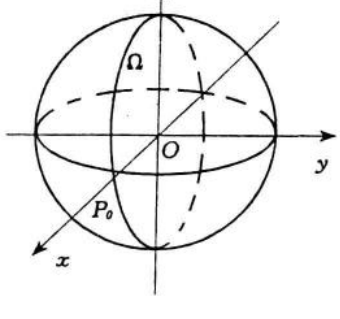
当 $x = -3$ 时,由于 $\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n}\cdot\frac{1}{n} = (-1)^n\frac{1}{n} - \frac{2^n}{3^n + (-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n + (-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ 都收敛,所以原级数在点 $x = -3$ 处收敛.

八、[解析]

先建立空间直角坐标系,再转化为三重积分计算即可.当然,坐标系的建立应便于利用对称性简化计算.

方法一　记所考虑的球体为 Ω,以 Ω 的球心为原点 O,射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系,则点 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$,球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性,得

$$\bar{y} = 0, \bar{z} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x \cdot k[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V}$$

而 $\iiint\limits_{\Omega} [(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V + \iiint\limits_{\Omega} R^2\mathrm{d}V$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2 \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r + \frac{4}{3}\pi R^5$$

$$= \frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega} x[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V = -2R\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V$$

$$= -\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V$$

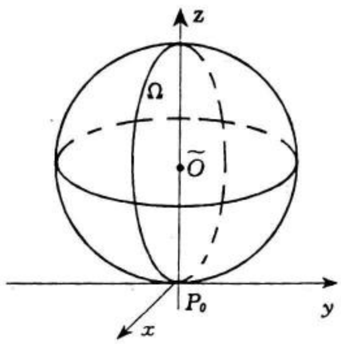
$$= -\frac{8}{15}\pi R^6$$

故 $\bar{x} = -\frac{R}{4}$.

因此,球体 Ω 的重心位置为$(-\frac{R}{4},0,0)$.

方法二　设所考虑的球体为 Ω、球心为 $\widetilde{O}$,以定点 P_0 为原点,射线 $P_0\widetilde{O}$ 为正 z 轴建立直角坐标系,则球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$$



设 Ω 的重心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性,得

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{32}{15}\pi R^5$$

而 $\iiint\limits_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$= \frac{64}{3}\pi R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\pi R^6$$

故 $\quad \bar{z} = \frac{5}{4}R.$

因此，球体 Ω 的重心位置为$(0,0,\frac{5}{4}R)$.

九、[解析]

本题属介值问题，形式上是连续函数的介值问题，实质上是对变限的积分函数用罗尔定理.

方法一 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$

则有 $F(0) = 0, F(\pi) = 0$. 又因为

$$0 = \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dF(x) = F(x)\cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x)\sin x dx = \int_0^{\pi} F(x)\sin x dx$$

所以存在 $\xi \in (0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi = 0$.

因若不然，则在 $(0,\pi)$ 内或 $F(x)\sin x$ 恒为正，或 $F(x)\sin x$ 恒为负，均与 $\int_0^{\pi} F(x)\sin x dx = 0$ 矛盾.

但当 $\xi \in (0,\pi)$ 时，$\sin\xi \neq 0$，故 $F(\xi) = 0$.

由上证得 $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0 \quad (0 < \xi < \pi)$.

再对 $F(x)$ 在区间$[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$上分别用罗尔定理，知至少存在 $\xi_1 \in (0,\xi)$，$\xi_2 \in (\xi,\pi)$，使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

即 $\quad f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

方法二 由$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ 知，存在 $\xi_1 \in (0,\pi)$，使 $f(\xi_1) = 0$.

因若不然，则在$(0,\pi)$ 内或 $f(x)$ 恒为正，或 $f(x)$ 恒为负，均与$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ 矛盾.

若在$(0,\pi)$ 内 $f(x) = 0$ 仅有一个实根 $x = \xi_1$，则由$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ 推知，$f(x)$ 在$(0,\xi_1)$ 内与(ξ_1,π) 内异号，不妨设在$(0,\xi_1)$ 内 $f(x) > 0$，在(ξ_1,π) 内 $f(x) < 0$.

于是再由$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$与$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$及$\cos x$在$[0,\pi]$上的单调性知：

$$0 = \int_0^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\mathrm{d}x = \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\mathrm{d}x + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\mathrm{d}x > 0$$

得出矛盾.

从而推知，在$(0,\pi)$内除ξ_1外，$f(x) = 0$至少还有另一实根ξ_2，故知存在ξ_1、$\xi_2 \in (0,\pi)$，$\xi_1 \neq \xi_2$，使$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

注：方法一中的ξ和方法二的ξ_1也可用积分中值定理得到.

十、[解析]

本题与A^*有关，立即联想公式　$AA^* = A^*A = |A|E$

由此推出$|A^*| = |A|^{n-1}$，得$|A| = 2$，又有

$$AB = B + 3A$$

$$A^*AB = A^*B + 3A^*A$$

于是有　$|A|B = A^*B + 3|A|E$，即　$(2E - A^*)B = 6E$，进一步即可求得B，具体求解如下：

方法一　由$|A^*| = |A|^{n-1}$，有$|A|^3 = 8$，得$|A| = 2$

又　$(A - E)BA^{-1} = 3E$，有　$(A - E)B = 3A$

从而　$A^{-1}(A - E)B = 3E$，由此得　$(E - A^{-1})B = 3E$

即　$(E - \frac{A^*}{|A|})B = 3E$，亦即　$(2E - A^*)B = 6E$

又　$2E - A^*$为可逆矩阵，于是

$$B = 6(2E - A^*)^{-1}.$$

由$2E - A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$　有　$(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

因此　$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

方法二　由 $|A^*|=|A|^{n-1}$，有 $|A|^3=8$，得 $|A|=2$

$$A=|A|(A^*)^{-1}=2(A^*)^{-1}$$

$$=2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&\frac{3}{8}&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

可见 $A-E$ 为可逆矩阵，于是由 $(A-E)BA^{-1}=3E$ 有

$$B=3(A-E)^{-1}A$$

由 $A-E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$，得 $(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

因此 $B=3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$.

十一、[解析]

(1) 由题设可列出 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式；(2) 已知特征向量求特征值，一般用定义式 $A\eta=\lambda\eta$；(3) 求 A^n 可通过对角化实现．具体求解过程如下：

$$(1)\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n+y_n)\\y_{n+1}=\frac{3}{5}(\frac{1}{6}x_n+y_n)\end{cases}$$

化简得 $\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n\\y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n\end{cases}$

即 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$，　于是　$A=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$