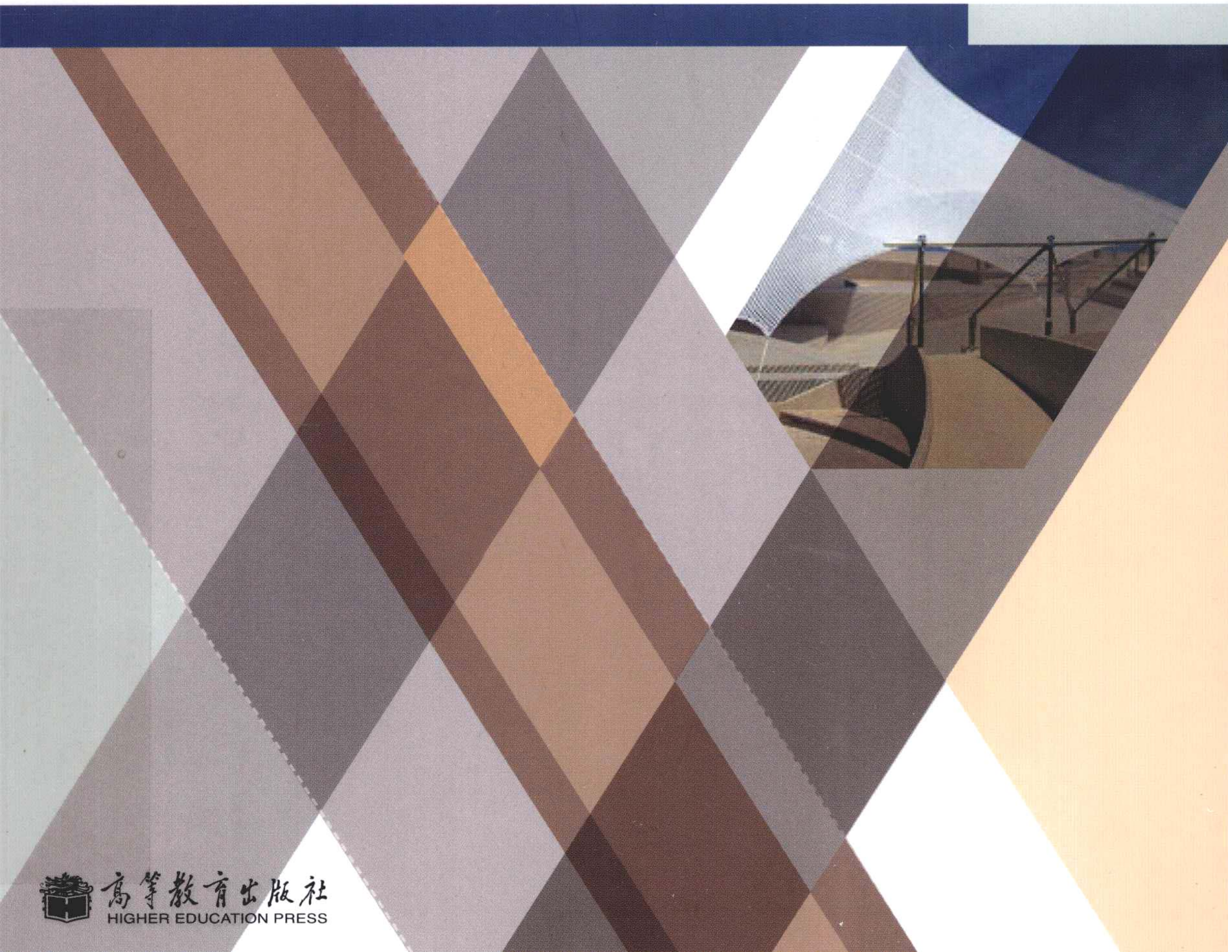
大学工科数学核心课程系列教材

自主创新
方法先行

高等数学（上册）

主　编　陶祥兴　朱婉珍



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学工科数学核心课程系列教材

自主创新
方法先行

高等数学（上册）

Gaodeng Shuxue

主 编 陶祥兴 朱婉珍
编 者 李未材 严永仙 申国伦
孙莉萍 李峰伟 盛宝怀
倪仁兴 黄玲娣 章迪平

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是根据编者多年的教学实践和教改经验，按照新形势下教材改革的精神和以培养高素质应用型人才和卓越工程师为目标的精神，参照"工科类本科数学基础课程教学基本要求"编写而成的。

全书分上下册出版。上册内容为函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，一元函数积分学，定积分的应用，常微分方程六章。节后配有A，B两组习题，章后配有A，B，C三组总复习题，并安排了以MATLAB为工具的数学实验。上册附常用数学公式、常用曲线、MATLAB基础、部分参考答案四个附录。

本书注重与中学数学教学相衔接，以直观理解为切入点；突出重要概念的实际背景和理论知识的应用；结构严谨、逻辑清晰、说理浅显；例子和习题精心挑选，题目丰富，有梯度，便于自学；对一些理论推导和扩充知识用不同字体或以 * 号表示，增强教学伸缩性。本书可供高等院校理工类本科学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 陶祥兴，朱婉珍主编. -- 北京：高等教育出版社，2012.8
ISBN 978-7-04-035887-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陶… ②朱… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第167555号

策划编辑 杨 波　责任编辑 杨 波　封面设计 赵 阳　版式设计 余 杨
插图绘制 黄建英　责任校对 杨雪莲　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 三河市春园印刷有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 24
字 数 430千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2012年8月第1版
印 次 2012年8月第1次印刷
定 价 34.90元

物 料 号 35887-00

学数学需掌握理论与方法，更要培养数学素养

——“大学工科数学核心课程系列教材”序言

我国于2010年颁布了《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》，教育部2011年开始实施了《高等学校本科教学质量与教学改革工程》，2012年又出台了“教育部关于全面提高高等教育质量的若干意见”。这为我国实现高等教育强国目标提出了战略部署，为高校培养具有实践能力、创新精神、国际视野的高素质高级专门人才提出了更高要求。我国高等教育进入大众化教育阶段的新形势、新任务，让我们深刻地感受到新一轮教育教学改革的必要性和紧迫性，也为大学工科数学教育教学改革明确了方向。

根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“大学数学基础课程教学基本要求”，结合本科高校的特点，以培养高素质应用型人才、复合型人才和卓越工程师为目标，浙江省高等学校数学类专业与数学基础课程教学指导委员会组织编写了大学工科数学核心课程系列教材，含《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》与《数学软件与大学数学实验》。本系列教材融合了编者的长期教学经验和教学改革成果，着眼于培养学生学习能力、实践能力和创新能力，让学生不仅学会数学知识、理论与方法，还使其数学思想和数学思维得到培养。该系列教材的特点可概括如下：

(1) **问题驱动，融合背景**。在内容的编排上既考虑如何与中学衔接，又考虑到内在的逻辑关系，并注意到专业后续课程的需要。教材注重讲解“如何应用基本理论和方法分析与解决实际问题”的思想方法，适度增加工程技术应用领域中的案例、具有趣味性和活学活用的数学建模内容。融入数学建模方法，增加MATLAB数学软件介绍，培养学生运用其理论和方法解决实际问题的能力。内容力求简明，削减一些公式演算内容，降低对一些定理、公式的证明和一些数学表达形式的要求，使学生在正确理解的基础上，能够熟练地应用基本理论与方法。

(2) **剖析思想，深入浅出**。突出思想性，保持严谨性，着力揭示数学思想与概念的本质和解决问题的思想方法，充分体现数学理论的“源”与“流”的关系。为了使学生的数学思维得到必要的训练，教材的叙述与推理保持应有的严谨性，对于某些重要结论仍保留必要的分析、证明与讨论。讲解力求深入浅出，富有启发性。教材编写尽力从学生熟悉的实例和知识出发，用其熟悉的语言、知识、思

想方法或直观的几何形象，凭借联想、类比等思维方法，进行自然的、合乎规律的扩展和深化；尽量以问题为导向，采用“提出问题、讨论问题、解决问题”的方式来展开，以适应学生的思维习惯；语言叙述力求直观清晰、通俗易懂。

(3) **体例新颖，强化训练。** 以加强学生数学素养的养成、综合应用能力的增强为目标，设计新体例。新体例将充分体现问题引入、数学模型、理论与方法、综合训练、拓展阅读、研究性学习等特点。注重基本运算能力的培养，特别注重数学思想方法的培养，以适量的应用实例为学生提供应用能力训练的素材；为培养学生的综合能力，精心设计了各种不同类型的习题，包括基本理论题、有一定难度的综合题和研究性应用题。书中附录编入 MATLAB 上机演练与实验题目。

(4) **资源丰富，实现共享。** 系列教材具有丰富的课程数字化资源，教学设计能较好反映教学中重点、难点的巧妙处理。利用现代化网络技术，把这些精彩的数字教学资源(含讲稿、教案、课件、案例、专题论文和研究性课题)集成，建成一个数字化的课程教学资源网站，构建一个内容丰富的、师生共享的、“活的”课程教学环境。

该系列教材力求内容简明，体系科学合理，揭示数学思想，融入数学建模，展示思维方法，引入现代数学软件，强化应用能力和创新能力的培养，深入浅出，富于启发性，促进学生学习。本系列教材适合于高等院校工科专业的本科生，也可供理科专业和其他相关专业大学生、研究生学习。

浙江省高等学校数学类专业
与数学基础课程教学指导委员会
主任委员　裘松良
2012 年 5 月 15 日

前　言

随着我国国民经济及高等教育的飞速发展，培养高素质应用型人才成为各类具有鲜明特色的本科院校的目标之一，这无疑对高校的教学内容，特别是对高等数学这类重要的基础课程的教材提出新的要求，即要满足高素质创新型应用人才培养的需要。本书是浙江省“十一五”重点教材建设项目暨大学工科数学核心课程系列教材的建设成果之一，是编者根据多年的教学实践和教改经验，参照高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，按照以培养高素质应用型人才和卓越工程师为目标的精神编写而成的。在吸收众多同类教材优点的基础上，本书有如下特点：

(1) 与高中新的数学课程标准衔接。不重复中学数学教学内容，适当补充极坐标、反三角函数、向量代数等内容，加深理解导数等重要概念，函数性态重点讨论凹凸等中学未涉及内容。

(2) 课程体系和章节结构为理工科专业量身定制。围绕极限的理解、计算和应用，把函数、极限和连续放在同一章，在理解比较直观的无穷小概念的基础上再开展极限理论的学习；将导数与微分同时讲，帮助学生理解两者之间密不可分的关系和计算法则的相似性，减少重复环节；将定积分和不定积分同时讲，将不定积分作为解决定积分的计算问题引入；把常微分方程安排在上册，强调它是一元微积分知识的应用与延伸；多元微积分内容安排呼应一元微积分，增加它们在工科领域的应用，以及理工科专业学习需要的场论知识。

(3) 融合背景、以直观理解为切入点，问题驱动、突出理论知识的应用。极限和导数、定积分和曲线曲面积分、微分方程和级数等概念的引入都强调直观理解，其知识的展开都以问题为驱动、应用为目的，采用“提出问题、讨论问题、解决问题”的方式。使数学概念有丰富的背景内容，不再那么抽象、枯燥，便于读者理解，同时着力培养学生的应用意识和应用能力。

(4) 突出思想性、把握科学性。例如以无穷小这个直观概念为基础，极限理论就不需要深陷于 $\varepsilon-N$ 语言的“苦涩”。无穷小量和等价量的思想的运用对于工科专业学生理解(例如第三章定理 3.5 的证明)和解决实际问题(工程问题往往可忽略一些无穷小因素)是非常有益的。再例如微元累积思想，作为主线贯穿定积分和多元积分以及曲线曲面积分中，着力揭示数学基本思想与概念的本质和解决问题的思想方法。反复推敲细节，做到全书结构严密、逻辑清晰，例如

通解的概念等,既考虑工科学生的理解习惯,又追求概念的准确。

(5) 浅显说理、注重可读性。结合编者多年的教学经验,对许多重要内容的学习,都以学生的理解习惯,提炼出诸多通俗易懂好记的方法和要诀。例如积分定义的“四步曲”“积分形式不变性”“换元必换限、未换元不换限”等。内容力求简明,减少符号演算、降低定理公式的证明要求,增加实际应用。

(6) 精心选择例题和习题,体例新颖、分层设计、强化训练。为加强学生数学素养和应用能力,设计了大量例题和习题,分为 A,B,C 三类,A 为基本题,B 为提高题,C 为应用题,为读者提供理论与方法的强化训练、应用能力的综合训练、拓展阅读的研究性学习,还配备 MATLAB 上机演练与实验,以提高学生利用计算机及数学软件求解高等数学问题及建立数学模型解决实际问题的能力。

本书由陶祥兴、朱婉珍主编。朱婉珍、李未材、严永仙、李峰伟、盛宝怀、倪仁兴、黄玲娣、章迪平分别编写了第一章和第六章、第二章和第三章、第四章和第五章、第七章、第八章、第九章、第十章、第十一章,各章的数学实验由申国伦和孙莉萍编写。全书由陶祥兴和朱婉珍统稿,由陶祥兴审定。

本书主要针对应用型本科学生编写,注重高等数学基础知识和基本方法的训练,注重学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力训练。本书适合作为普通高等院校理工类(非数学类专业)高等数学课程的教材,也可供成教学院或高职高专院校选用,并可供相关专业人员和广大教师参考。

本书在编写过程中,得到了浙江省高等学校数学类专业与数学基础课程教学指导委员会主任委员裘松良教授、秘书长徐定华教授以及浙江大学吴明华教授的指导和帮助,在这里谨向他们表示最诚挚的感谢。在本书的编写过程中参考了诸多文献,部分内容与例题是来自这些文献的,我们对各位参考文献的作者表示真挚的谢意,也感谢高等教育出版社的编辑们为本书的出版付出的辛勤劳动。

限于作者自身的水平,书中难免有不足之处,敬请专家、教师和读者不吝赐教。

编　者

2011 年 12 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

以牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)为主要创立者,创立于17世纪的微积分是数学发展史上的里程碑.函数描述了现实世界中各种变量之间的相互依赖关系,它是微积分研究的基本对象.极限是对变量在某种变化状态下最终变化趋势的描述,它既是一个重要的概念,也是研究微积分学的重要工具和思想方法.连续性是许多常见函数的一种共同特性,也是微积分研究的对象.本章将衔接中学数学内容,讲解函数、极限、连续等基本概念及其性质.希望读者在学习本章知识的同时,提高自己的观察和抽象能力、归纳和推理能力、思维和应用能力,为学习这门重要的大学基础课程打下良好的基础.

第一节　曲线的极坐标方程与参数方程

我们一般是在直角坐标系下讨论函数及其图形,但是利用极坐标系有时比直角坐标系更方便,尤其是在台风预报、地震预报、航空航海、测量等方面.

1.1　极坐标系

例1.1(台风预报)　据国家气象台某日台风播报:8号台风凤凰的中心位置,今天下午16时已经到达甲地东偏南45度方向大约800 km附近的洋面上,也就是在北纬22.3度,东经123.8度.试在平面地图上标出该台风中心的位置.

在直角坐标系中标出该台风中心的位置比较麻烦,如果在极坐标系中标出该位置就要容易得多.下面我们给出极坐标系的定义.

定义1.1　在平面内取一个定点 O(称为极点),自极点 O 引一条射线 Ox(称为极轴);再选取一个长度单位、一个角度单位(通常取弧度)和正方向(逆时针方向),这样就在此平面上建立了极坐标系.

对平面上的任一点 M,线段 OM 的长度称为极径,记为 ρ;以极轴 Ox 为始边,以射线 OM 为终边的沿逆时针方向旋转的角称为极角,记为 θ.那么有序数对 (ρ,θ) 就称为点 M 的极坐标,记为 $M(\rho,\theta)$.如图1.1.

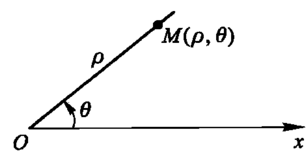


图1.1

一般地,规定 $\rho \geqslant 0$,θ 取任意实数.有时为了方便起见,也将极角 θ 限制在 $[0,2\pi)$ 或 $[-\pi,\pi)$ 等特殊区间上,以此建立平面上的点与极坐标之间的一一对应

关系.

例 1.1 的图解　以甲地为极点 O，正东方向为极轴 Ox 建立极坐标系，那么台风中心的位置在点 M 处，如图 1.2.

例 1.2　如图 1.3，写出点 A,B,C 的极坐标，并在极坐标系中标出点 $D\left(2,\frac{\pi}{6}\right),E\left(4,\frac{3\pi}{4}\right),F\left(3.5,\frac{5\pi}{3}\right)$ 所在的位置.

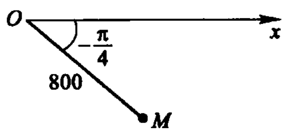


图 1.2

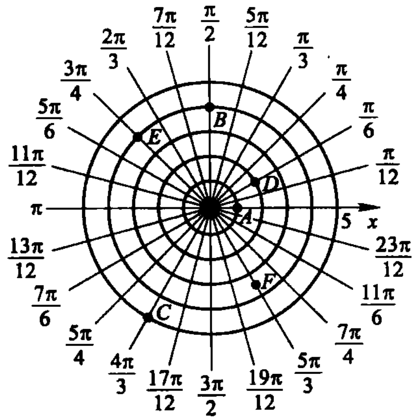


图 1.3

解　点 A,B,C 的极坐标分别为 $A(1,0),B\left(4,\frac{\pi}{2}\right),C\left(5,\frac{4\pi}{3}\right)$，点 D,E,F 的位置如图 1.3.

在直角坐标系下，$x=k_1,y=k_2$（其中 k_1,k_2 为常数）分别表示平行于 x 轴和 y 轴的直线，那么在极坐标系中 $\rho=R,\theta=C$ 表示怎样的曲线呢？

根据极坐标系的定义易知，$\rho=R$ 表示平面上到极点的距离恒为常数 R 的所有点，即以极点 O 为圆心，R 为半径的圆周，如图 1.4.

$\theta=C$ 表示平面上极角为 C 的所有点 M，即极角为 C 的射线 OM，如图 1.5.

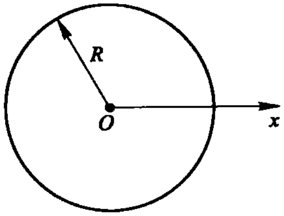


图 1.4

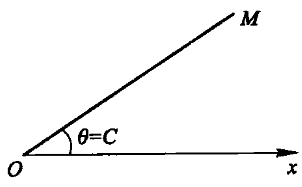


图 1.5

下面我们讨论直角坐标与极坐标之间的关系.

如果把直角坐标系中的原点作为极坐标系的极点，x 轴的正向作为极轴，并取两种坐标系的单位长度相同（如图 1.6），那么平面上任一点 M 的极坐标 (ρ,θ) 与直角坐标 (x,y) 有如下关系：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases} \tag{1.1}$$

我们将式(1.1)称为直角坐标与极坐标的坐标转换公式.

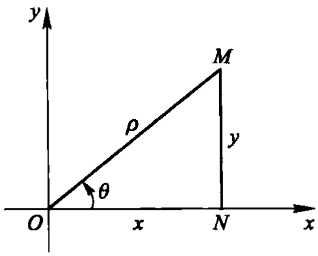


图 1.6

例 1.3　将圆的直角坐标方程 $x^2+y^2=R^2$ 化为极坐标方程.

解　将式(1.1)代入直角坐标方程 $x^2+y^2=R^2$ 得 $\rho^2=R^2$. 由于 $\rho>0, R>0$，故 $\rho=R$ 就是所求的圆的极坐标方程.

例 1.4　将下列极坐标方程化为直角坐标方程，并指出方程表示怎样的曲线.

(1) $\rho=\dfrac{1}{2+\cos\theta}$;　　(2) $\rho=\dfrac{1}{1+2\cos\theta}$.

解　(1) 变形 $\rho=\dfrac{1}{2+\cos\theta}$ 得，$2\rho=1-\rho\cos\theta$，由公式(1.1)得

$$2\sqrt{x^2+y^2}=1-x,$$

两边平方并整理，得

$$\frac{9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{4}+3y^2=1,$$

所以该方程表示的曲线为一个椭圆.

(2) 同理，由 $\rho=\dfrac{1}{1+2\cos\theta}$ 得对应的直角坐标方程为

$$9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-3y^2=1,$$

所以该方程表示的曲线为一条双曲线.

1.2　曲线的极坐标方程

下面我们介绍在高等数学中一些常用曲线的极坐标方程.

(1) 阿基米德(Archimedes)螺线　当一动点 M 以速度 v 匀速沿一条射线运动，而这条射线又以角速度 ω 等速绕极点 O 转动时，那么动点 M 的轨迹就是阿基米德螺线.