普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

主编/马　戈

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

马　戈　主编
梁　瑛　吴宏锷　牛玉俊　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书较系统地介绍了概率论与数理统计的基本内容，主要包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、Matlab 在统计分析中的应用.

本书注重对学生基础知识的训练及知识应用能力的培养，部分小节精选了相当数量的例题、基本练习题(A组)和提高练习题(B组)，部分章最后还配有复习题，书后附有各章习题参考答案或提示，便于教师教学和学生自学.

本书可作为高等院校工科、农医、经济、管理等专业的概率论与数理统计课程教材，也可作为工程技术人员等实际工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/马戈主编. 一北京：科学出版社，2012
(普通高等教育"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-03-034298-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①马… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 094862 号

责任编辑：戴 薇 李 瑜 / 责任校对：马英菊
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者工作室
版式设计：科地亚盟

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 7 月第一次印刷 印张：20 3/4
字数：406 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新科〉)
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135763-2038

前 言

概率论与数理统计是随机数学的两个分支，其理论和方法的应用已经遍及科学研究、工农业生产、医药卫生及国民经济的各个领域. 概率论与数理统计不仅是高等院校理工科及经管类专业必修的基础理论课，也是这些专业的学生考研的重要内容之一.

随着我国本科教育改革的深入，很多地方高校提出了培养应用型复合人才的目标要求，启动了卓越工程师培养计划等，更加突出了"应用性"在课程教学中的地位. 概率统计教材如何适应时代发展的需要？我们结合多年来课程建设的教改实践，在广泛参阅国内外优秀教材的基础上，编写了本书.

本书在取材和编写过程中，注重突出以下几个方面的特点：

(1) 在概念、定理及理论叙述上，力求准确、精炼，在符号的使用上标准、规范.

(2) 注重概率论、数理统计应用的广泛性，精选例题和习题，用"巧妙的思维"和"有趣的结论"吸引学生，帮助学生从不同的侧面理解概念，掌握方法.

(3) 为帮助学生更好地掌握课程内容，本书部分小节分层次配有 A、B 两组习题，A 组为基本练习题，B 组是带有一定难度的提高练习题. 另外，部分章还配有复习题，以供学生巩固所学知识.

(4) 借助于统计分析实验，引导学生注重现代科学技术成果的应用，提高学生的数学应用能力.

书中标"＊"的内容为选学内容，各学校可根据实际情况自主选择.

本书由马戈主编，并对全书进行统稿. 具体编写情况：第一、二章由梁瑛执笔；第三、四章由吴宏锷执笔；第五、六、八章由马戈执笔；第七、九章由牛玉俊执笔.

在本书的编写与出版过程中，得到了南阳理工学院和科学出版社的大力支持与帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平所限，书中不妥和错误之处在所难免，恳请同行及读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科，它以概率论为基础，具有严格的概念体系和严密的逻辑结构. 概率论与数理统计的理论和方法已经被广泛地应用在自然科学、技术科学、社会科学和人文科学等各个领域，是科技、经济、管理等领域工作者必备的数学工具. 本章先介绍与随机事件及其概率有关的概念、性质与公式等.

§1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机现象和随机试验

自然界和人类社会中所发生的现象是多种多样的，但从结果能否准确预知的角度去划分，大致可分为两类. 一类是确定性现象，即在一定条件下必然发生的现象. 例如，“在标准大气压下，水烧到 100℃必然会沸腾”、“同性电荷排斥，异性电荷吸引”、“上抛一石子必然下落”等. 这类现象的结果是能准确地预知的，研究这类现象的数学工具是线性代数、微积分等经典数学理论与方法. 另一类是**随机现象**，即在一定的条件下，可能会出现这样的结果，也可能会出现那样的结果，具有不确定性（或随机性），事先我们无法准确预知其结果的现象. 例如，抛掷一枚质地均匀的硬币，其落地后可能会出现正面，也可能会出现反面，每次抛掷前我们不能准确预知将出现正面还是反面；又如，用同一大炮向同一个目标射击，每次弹着点的位置不尽相同，射击之前无法预测弹着点的确切位置. 随机现象在实际生活中还有很多，比如，某人参与抽奖，此人能否中奖？从含有不合格的一批产品中任意抽取一件，它是否一定为合格品？从装有红白两种颜色球的袋子中任意取一个球，它是什么颜色的？某种股票明天的价格是多少？商店一天的销售额是多少？这些问题事先都不能准确预测.

为了研究随机现象，通常是先通过试验进行观察. 例如，观察某射手对固定目标进行射击的情况；抛掷一枚质地均匀的骰子，观察其出现的点数；记录某交通路口，在给定的时间段内所通过的车辆数；记录急救电话一昼夜接到的呼叫次数等. 我们把对随机现象的这种观察或观测称为**随机试验**，简称**试验**，并记为 E. 随机试验的特征如下.

• 可重复性：试验可以在相同条件下重复进行.

• 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，但事先能明确试验的所有可能结果.

• 不确定性：每次试验可能出现这一结果，也可能出现另一结果，将要出现哪一结果事先不能准确预知.

就一次随机试验而言，其结果不能实现预测，似乎难以捉摸，但在大量重复试验下，人们会发现其结果总呈现出某种规律性. 例如，抛掷一枚质地均匀的硬币，在多次重复抛掷时，就会发现"出现正面"和"出现反面"这两个实验结果出现的次数大致相等. 再如，一名优秀的射手向某一靶子进行射击，就一次射击而言，"击中十环"与"不能击中十环"这两个实验结果都有可能发生，因此一两次射击不足以反映其真实水平，但当大量重复射击时，"击中十环"的次数与总射击次数的比会呈现出某种稳定性. 这种随机现象在大量重复实验时所呈现出的内在规律性，我们称为随机现象的统计规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科.

1.1.2 样本空间与随机事件

尽管一次随机试验将要出现的结果事先无法准确预知，但其所有可能出现的结果是事先明确的. 我们把随机试验可能出现的每一种最基本的结果称为随机试验的一个**样本点**，用 ω 表示；样本点的集合称为**样本空间**，用 Ω 表示.

例 1

(1) E_1：抛掷一枚质地均匀的硬币，观察出现正反面的情况，其样本空间为

$$\Omega_1 = \{\text{正面},\text{反面}\}.$$

(2) E_2：将一枚质地均匀的硬币连续抛掷两次，观察两次出现正反面的情况，其样本空间为

$$\Omega_2 = \{(\text{正面},\text{正面}),(\text{正面},\text{反面})(\text{反面},\text{正面})(\text{反面},\text{反面})\}.$$

(3) E_3：抛掷一枚质地均匀的骰子，观察其出现的点数，其样本空间为

$$\Omega_3 = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

(4) E_4：记录某电话交换台在固定的某时间段内接到的呼叫次数，由于难以规定呼唤次数的上限，理论上认为每个正整数都是一个可能的实验结果，其样本空间为

$$\Omega_4 = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

(5) E_5：从一大批灯泡中，任意抽取一个，测试其寿命 t，其样本空间为

$$\Omega_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}.$$

从例 1 可以看到，样本空间有的是数集，有的不是数集；有的是有限集，有的是

无限集;有的数集是离散的,有的数集是连续的.

在研究随机试验中,人们通常关心的不仅是某个样本点在试验后是否会出现,更关心的是满足某种条件的样本点在试验后是否出现. 例如在上例 E_5 中,测试灯泡的使用寿命以便确定其质量,若规定使用寿命超过 2 000 小时为正品,则人们关心的是测试结果是否大于 2 000 小时,满足这一条件的样本点组成 Ω_5 的一个子集:$\{t|t>2\,000\}$. 我们把随机试验的样本空间的子集,称为**随机事件**,简称**事件**. 事件通常用大写英文字母 A,B,C 等表示,如 $A=\{t|t>2\,000\}$,也可以用加花括号的语言描述来表示,如 $A=\{t|t>2\,000\}=\{$灯泡为合格品$\}$.

注意:在每次试验中,当且仅当事件中的一个样本点出现时,我们称**这一事件发生**. 例如在例 1 的 E_3 中,对于事件 $A=\{$出现偶数点$\}=\{2,4,6\}$,若试验结果是"出现点数 6",就说事件 A 发生.

特别地,如果一个事件只包含一个样本点,则称此事件为**基本事件**. 如在例 1 的 E_3 中,有 6 个基本事件 $\omega_1=\{$出现点数 1$\}$,$\omega_2=\{$出现点数 2$\}$,$\omega_3=\{$出现点数 3$\}$,$\omega_4=\{$出现点数 4$\}$,$\omega_5=\{$出现点数 5$\}$,$\omega_6=\{$出现点数 6$\}$.

由于样本空间 Ω 是其自身的子集,因而也是一个随机事件,又因其包含所有的样本点,所以每次试验必然发生. 我们称在随机试验中必然发生的事件为**必然事件**,因此 Ω 就是必然事件,必然事件就记作 Ω.

同样,空集 $\varnothing$ 也是样本空间 Ω 的子集,是一个随机事件,由于它不包含任何样本点,所以在任何一次试验中 $\varnothing$ 必定不会发生. 我们称在任何一次试验中都不会发生的事件为**不可能事件**. 因此 $\varnothing$ 就是不可能事件,不可能事件就记作 $\varnothing$.

如在例 1 的 E_3 中,若记事件 $A=\{$出现点数 5$\}$,$B=\{$出现的点数不大于 6$\}$,$C=\{$出现点数 7$\}$,则 A,B,C 都是事件,其中 A 是一个基本事件,B 是一个必然事件,C 是一个不可能事件.

实际上,必然事件与不可能事件已经无随机性可言,但在概率论中起着重要的作用,为讨论问题的方便,我们把它们作为两个特殊的随机事件.

1.1.3 事件的关系与运算

在解决实际问题时,遇到的事件往往比较复杂,在求其概率时就需要把复杂事件分解成较简单事件的"组合". 而这种"组合"就是下面要介绍的事件之间的关系与运算.

由于随机事件是样本空间的子集,所以事件之间的关系和运算与集合之间的关系和运算类同,只是这些关系和运算在概率中赋予了新的含义. 事件的关系主要有:**包含**、**相等**、**互斥**(**互不相容**)、**对立**四种关系;事件的运算主要有:**并**(**和**)、**交**(**积**)、**差**三种运算.

设 Ω 为给定的随机试验 E 的样本空间,事件 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots,n,\cdots)$都是

Ω 的子集.

1. 事件的关系

(1) 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 B 包含事件 A**(或称 **A 是 B 的子事件**),记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(如图 1.1-1 所示).

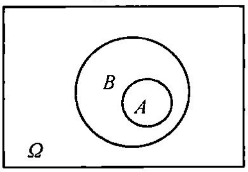

图 1.1-1

例如,在例 1 的 E_3 中,若事件 $A=\{$出现奇数点$\}=\{1,3,5\}$,$B=\{$出现的点数不超过 5$\}=\{1,2,3,4,5\}$,则显然 $A\subset B$.

(2) 相等关系

若事件 A,B 满足 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称**事件 A 与事件 B 相等**(或 **A 与 B 等价**),记为 $A=B$.

注意:$A=B$ 并不意味着 A 与 B 是同一事件.例如甲、乙两个足球队进行比赛,为公平起见,开赛前首先掷一枚硬币来决定谁先发球,并约定:若硬币出现正面,则甲队先发球.记事件 $A=\{$甲队先发球$\}$,事件 $B=\{$出现正面$\}$,这时显然有 $A=B$,但 A 与 B 是两个不同的事件.

(3) 互斥(或互不相容)关系

如果在任何一次试验中,事件 A、B 都不可能同时发生,则称事件 A、B 是互斥事件或互不相容事件.

例如,在例 1 的 E_3 中,若 $A=\{$出现的点数大于 3$\}$,$B=\{$出现的点数小于 3$\}$,则 A、B 两事件是**互斥**(**或互不相容**)**事件**.

显然,一个随机试验的样本空间的任意两个基本事件之间是互斥的.

(4) 对立关系

事件"A 不发生"也是一个随机事件,称其为事件 A 的**对立事件**或**逆事件**或**补事件**,记为 $\overline{A}$.显然 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件,即 $\overline{\overline{A}}=A$,所以称 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件.两个互为对立的事件,在每次试验中必有一个出现,但不可能同时出现.

注意:两个相互对立的事件一定是互不相容事件,但两个互不相容的事件不一定互为对立事件.例如,在例 1 的 E_3 中,若 $A=\{$出现的点数大于 3$\}=\{4,5,6\}$,$B=\{$出现的点数小于 3$\}=\{1,2\}$,$C=\{$出现的点数不大于 3$\}=\{1,2,3\}$,则 C 与 A 是互为对立事件,而 B 与 A 是互斥但非对立事件.

2. 事件的运算

(1) 交(或积)

"事件 A、B 同时发生"的事件称为事件 A、B 的**交事件**(**或积事件**),记作 $A\cap B$ 或 AB.$A\cap B$ 是由既属于 A 又属于 B 的样本点组成的集合,即 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$

且$\omega\in B\}$(如图 1.1-2 所示的阴影部分).

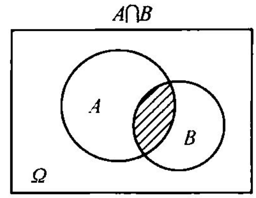

图 1.1-2

例如,在例 1 的 E_3 中,若 $A=\{$出现的点数大于 3$\}=\{4,5,6\}$,$B=\{$出现奇数点$\}=\{1,3,5\}$,$C=\{$出现小于 5 的偶数点$\}=\{2,4\}$,则 $A\cap B=\{5\}=\{$出现点数 5$\}$,$A\cap C=\{4\}=\{$出现点数 4$\}$.

类似地,把"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"的事件,称为这 n 个事件的交事件,记作 $A_1\cap A_2\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.

把"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生"的事件,称为可列个事件的交事件,记作 $A_1\cap A_2\cdots\cap A_n\cdots$或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$.

(2) 并(或和)

"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A、B 的**并事件**(**或和事件**),记为 $A\cup B$. 显然 $A\cup B$ 是由属于 A 或属于 B 的样本点组成的集合,即 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$(如图 1.1-3 所示的阴影部分).

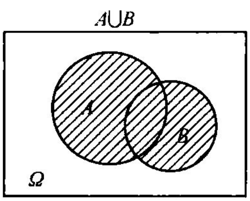

图 1.1-3

例如,在例 1 的 E_3 中,若 $A=\{$出现的点数大于 3$\}=\{4,5,6\}$,$B=\{$出现奇数点$\}=\{1,3,5\}$,$C=\{$出现偶数点$\}=\{2,4,6\}$,则 $A\cup B=\{1,3,4,5,6\}$,$A\cup C=\{2,4,5,6\}$.

类似地,把"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"的事件称为这 n 个事件的并事件,记作 $A_1\cup A_2\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

把"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生"的事件称为可列个事件的并事件,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots A_n\cup\cdots$或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3) 差

"事件 A 发生而 B 不发生"的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**,记作 $A-B$. 显然,$A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合,即 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 但 $\omega\notin B\}$(如图 1.1-4 所示的阴影部分). 注意到 $A-B=A-AB=A\overline{B}$.

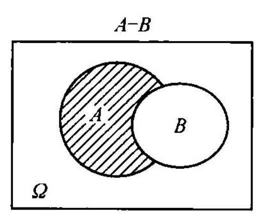

图 1.1-4

例如,在例 1 的 E_3 中,若 $A=\{$出现的点数大于 3$\}=\{4,5,6\}$,$B=\{$出现奇数点$\}=\{1,3,5\}$,$C=\{$出现偶数点$\}=\{2,4,6\}$,则有 $A-C=\{5\}$,$A-B=\{4,6\}$.

由事件差的运算,不难得出 $\overline{A}=\Omega-A$. 利用事件交、并运算,可将事件的互斥、对立关系表述如下:

• A 与 B 互斥,当且仅当 $AB=\varnothing$(如图 1.1-5 所示);

• A 与 B 对立，当且仅当 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$（如图 1.1-6 所示）.

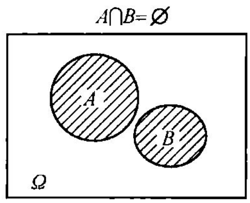

图 1.1-5

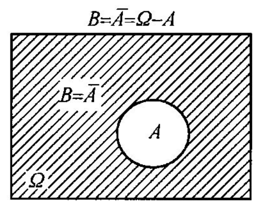

图 1.1-6

3. 事件运算的规律

与集合的运算一样，事件的运算也满足下述的运算规律：

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

（2）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$；

（3）分配律　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$,

$A(B\cup C)=AB\cup AC$；

（4）对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

事件的运算规律都不难证明，而且借助于 Venn 图更加直观，易于理解. Venn 图是帮助我们理解和分析事件之间关系和运算的一种实用工具. 当然，由以上运算规律可以推广到任意多个事件的情形. 在进行事件之间的运算化简时，我们要善于运用这些规律.

例 2　甲、乙、丙三人向同一个目标射击，设 A 表示“甲击中目标”，B 表示“乙击中目标”，C 表示“丙击中目标”，则下列事件可用 A、B、C 的运算关系表示.

（1）甲未击中目标：$\overline{A}$；

（2）甲、乙击中目标，丙未击中目标：$AB\overline{C}$；

（3）甲、乙、丙三人均击中目标：ABC；

（4）甲、乙、丙三人至少有一人击中目标：$A\cup B\cup C$；

（5）甲、乙、丙三人恰好有一人击中目标：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

（6）甲、乙、丙三人恰好有两人击中目标：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

（7）甲、乙、丙三人至少有两人击中目标：$AB\cup AC\cup BC$；

（8）甲、乙、丙三人均未击中目标：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

（9）甲、乙、丙三人至多有一人击中目标：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

注意：有些复杂事件用简单事件的表示方式不唯一，但这些表示方式是等价的. 如本例的事件“甲、乙、丙三人至少有两人击中目标”等价于“恰好有两人击中目标或者三人都击中目标”，因此也可以表示为

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC.$$

例 3　电路图基本的连接方式为串联和并联，设有 n 个元件分别以串联和并联的方式组成串联系统和并联系统（如图 1.1-7），若记 $A_i=\{$元件 i 正常工作$\}$，$i=1,2,\cdots,n$，$A=\{$系统正常工作$\}$，分别就串联系统和并联系统用 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示事件 A.

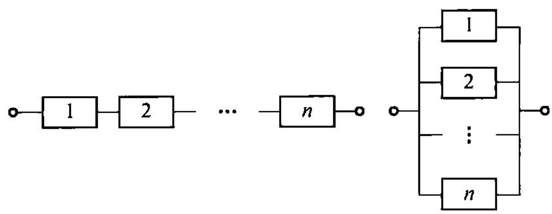

图 1.1-7

解　串联系统：整个系统正常工作当且仅当 n 个元件同时正常工作，于是

$$A=\{\text{系统正常工作}\}=A_1A_2\cdots A_n.$$

并联系统：整个系统正常工作当且仅当 n 个元件中至少有一个元件正常工作，于是

$$A=\{\text{系统正常工作}\}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

例 4　靶子由 10 个同心圆组成，半径分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_{10}$，且 $r_1<r_2<\cdots<r_{10}$，若记 $A_k=\{$命中点在半径为 r_k 的圆内$\}$，叙述下列事件的意义：

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{6}A_k$；　　(2) $\bigcap\limits_{k=1}^{8}A_k$；　　(3) $\overline{A}_1A_2$.

解　由于 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_{10}$，故有 $\bigcup\limits_{k=1}^{6}A_k=A_6$，$\bigcap\limits_{k=1}^{8}A_k=A_1$.

(1) 事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{6}A_k$ 表示命中点在半径为 r_6 的圆内；

(2) 事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{8}A_k$ 表示命中点在半径为 r_1 的圆内；

(3) 事件 $\overline{A}_1A_2$ 表示命中点在内径为 r_1、外径为 r_2 的圆环内.

例 5　证明下列等式：

(1) $(A-B)\cup B=A\cup B$；

(2) $B-A=(\overline{AB})-(\overline{\overline{A}B})$.

证明　(1) $(A-B)\cup B=(A\cap\overline{B})\cup B=(A\cup B)\cap(B\cup\overline{B})$

$$=(A\cup B)\cap\Omega=A\cup B.$$

(2) $\overline{AB}-(\overline{\overline{A}B})=\overline{AB}(\overline{\overline{\overline{A}B}})=\overline{AB}(\overline{A}B)$

$$=(\overline{A}\cup\overline{B})\overline{A}B=\overline{A}\overline{A}B\cup\overline{B}\overline{A}B$$

$$=\overline{A}B\cup\varnothing=\overline{A}B=B-A.$$

在进行事件运算时，运算顺序约定为先进行逆的运算，然后再进行交的运算，