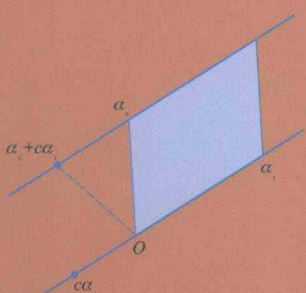
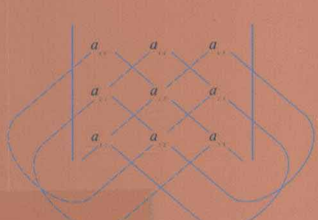
自主创新
方法先行

线性代数

上海大学数学系　编





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

自主创新
方法先行

线性代数

上海大学数学系　编

Xianxing Daishu

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”（项目编号：2009IM010400）的项目研究成果，同时也是上海大学重点课程建设项目。

在体系和内容的处理上，本书有别于现行教科书之处在于：首先介绍矩阵，强调矩阵的初等变换这一强大工具，采用简单的方法处理矩阵的秩及其相关理论；利用递归法引入行列式定义；在线性空间中特别强调基的作用；将齐次线性方程组的解集作为线性空间的子空间处理，引入线性方程组新的简便解法；每章都设置了“探索与发现”，以研究性、探索性和开放性课题来锻炼学生的自学和科研能力。书末附有“线性代数中常用MATLAB命令简介”。

本书从基础知识讲起，然后进入线性代数课程的核心内容，最后将理论与应用有机结合，内容自成体系、独具特色，可作为高等学校理工类、经济管理类专业的教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／上海大学数学系编．—北京：高等教育出版社，2012.8
ISBN 978-7-04-035195-8

Ⅰ．①线… Ⅱ．①上… Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第147499号

策划编辑 王强　责任编辑 王强　封面设计 于涛　版式设计 于婕
插图绘制 黄建英　责任校对 胡晓琪　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　刷 肥城新华印刷有限公司
开　本 787mm×960mm 1/16
印　张 12.25
字　数 230千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　次 2012年8月第1版
印　次 2012年8月第1次印刷
定　价 18.50元

物料号 35195-00

前言

数学是对现实世界数与形简洁、高效、优美的描述，是有内部抽象性和外部有效性的学科。数学大师希尔伯特 (Hilbert,1862— 1943) 说："数学是一切关于自然现象的严格知识之基础。"马克思说："一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。"拿破仑说："数学的发展跟国家的繁荣是紧密相关的。"数学在人类认识世界、描述和发现规律，以及培养高素质创新人才的过程中有着不可替代的重要作用。因此，一个国家数学的发展和应用水平，在很大程度上决定着本国科学技术的自主创新能力的高低。

教学的根本任务就是培养学生的创新能力。理工类、经济管理类等专业的学生，需要通过对数学课程的学习，培养分析、归纳、抽象、演绎推理、计算以及掌握使用数学软件等能力，形成具有创新精神和良好的科学态度的素养，合理地提出新概念、新思想、新方法的素养，以及利用数学知识建立数学模型、解决实际问题的素养。

线性代数是理工类、经管类专业学生的数学基础课程之一，在学生数学能力与数学素养的培养中起着关键性作用，其理论与方法在科学研究和各行各业中都有广泛的应用。

线性代数的基本内容是以矩阵为工具，研究向量空间，主要内容有：矩阵、行列式、线性空间与线性变换、线性方程组、特征值与特征向量以及二次型等。矩阵是一个最重要和最基本的工具，它贯穿于整个线性代数课程的始终。线性空间是现实世界三维空间的抽象推广，强调的是元素之间的线性关系，着重于元素的表示。从集合的角度来看，是研究线性空间的子空间；从线性空间之间的关系来看，是研究线性变换及线性空间的同构。

线性代数最大的特点是抽象，要想让学生学习起来既感觉不难，又能在学习中培养数学能力和数学素养是线性代数课程教学中要解决的核心问题。解决这一问题的关键就是教师能够抓住线性代数的本质，使学生对所学内容产生兴趣，理解关键的内容和核心思想；并通过严格训练，使其掌握好基本理论与基本方法。让学生能够轻松掌握和熟练运用线性代数的基本理论与方法是我们编写本教材的宗旨所在。

本书在体系和内容的处理上有别于现行的教科书。我们首先介绍矩阵，强调矩阵的初等变换这一强大工具，采用简单的方法处理矩阵的秩及其相关理论；利用递归法引入行列式定义；在线性空间中特别强调基的作用；将齐次线性方程组的解集作为线性空间子空间处理，引入线性方程组新的简便解法；本书每章都设置了“探索与发现”，以研究性、探索性和开放性课题来锻炼学生的自学和科研能力；书末附有“线性代数中常用 MATLAB® 命令简介”。

本书由上海大学数学系集体编写，由王卿文和杨建生任主编，由王卿文确定整体写作思路和框架，并统稿、定稿。参加本教材编写的人员是杨建生、丁洋（第一章），王培康、刘巧华（第二章），张琴、王卿文（第三章、第四章），张建军、高楠（第五章），谭福平（附录）。

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”（项目编号:2009IM010400）的项目研究成果，同时也是上海大学重点课程建设项目，是为综合性大学和高等师范院校理工类、经济管理类专业本科生编写的线性代数教材。

本书的编写得到了上海大学教务处、上海市教委第五期重点学科“数学科学与技术”（J50101）和上海市第三期重点学科“运筹学与控制论”（S30104）的大力支持，高等教育出版社的编辑们为本书的出版做了大量高效的工作，在此一并表示由衷的感谢。

编者

2012 年 5 月于上海大学

目录

第一章

矩阵

矩阵的概念起源于 18 世纪, 最初是由解线性方程组需要而形成的. 1851 年西尔维斯特 (J. J. Sylvester,1814— 1897, 英国) 首先使用“矩阵”一词, 1855 年凯莱 (A. Cayley , 1821— 1895, 英国) 首先发表关于矩阵研究的论文, 由于凯莱对矩阵理论的奠基性工作, 一般认为他是矩阵理论的创始人.

本章引入矩阵的定义及其运算, 讨论它们的基本性质, 介绍逆矩阵、矩阵的分块、初等变换、广义初等变换, 给出常用的矩阵秩的等式与不等式.

§1.1 矩阵的定义与运算

本节引入矩阵的定义, 介绍矩阵的加减法运算、负运算、数乘运算以及乘法、转置等运算.

1.1.1 矩阵的定义

在日常生活和科学应用中经常需要处理各种数据, 例如

例 1.1.1 某公司销售五种产品 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, 某年其销售额和利润 (单位: 万元) 可以表示成表 1.1.1.

表 1.1.1 销 售 表

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
销售额	2 050	1 960	1 086	2 005	4 356
利润	194	206	70	201	445

表格的核心是按一定次序排成的 2 行 5 列数表, 这个表格可简化为下列形式:

$$\begin{pmatrix} 2\,050 & 1\,960 & 1\,086 & 2\,005 & 4\,356 \\ 194 & 206 & 70 & 201 & 445 \end{pmatrix}.$$

例 1.1.2 某航空公司在奥运会期间要将四个国家的运动员运送到四个不同的比赛城市, 如果用 a_{ij} 表示将第 i 个国家运动员运送到第 j 个城市的人数, 则其调运方案可以表示为表 1.1.2.

表 1.1.2 调运方案表

	第一个城市	第二个城市	第三个城市	第四个城市
第一个国家	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
第二个国家	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
第三个国家	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
第四个国家	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

同样可以将这些数据表示成如下形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

下面我们引入一般数域上的矩阵概念.

定义 1.1 设数域 F 是包含 0,1 的复数子集, 且加、减、乘、除运算后的结果仍然在 F 中, 则称 F 为一个数域.

如复数集、实数集、有理数集都是数域.

定义 1.2 称 F 中 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

为数域 F 上的一个 $m\times n$ **矩阵**, 简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$, 其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列交叉点上的**元素** (**简称元**).

一般地用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 表示矩阵. 如果一个矩阵中的元素都是实数, 就称此矩阵为实矩阵; 如果一个矩阵中的元素都是复数, 就称此矩阵为复矩阵. 本书中的矩阵除特别说明外, 都指实矩阵. $m\times n$ 实矩阵的全体记为 $\mathbf{R}^{m\times n}$, $m\times n$ 复矩阵的全体记为 $\mathbf{C}^{m\times n}$.

本书数域 F 指实数集 $\mathbf{R}$ 或者复数集 $\mathbf{C}$.

1.1.2 特殊矩阵

1. **方阵** $n\times n$ 矩阵称为 n **阶方阵**. 方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角元**.

2. **零矩阵** 所有元素都为零的矩阵, 称为**零矩阵**, 记为 $\mathbf{0}$.

3. **行向量** $1\times n$ 矩阵称为 n **维行向量**.

4. **列向量** $m\times 1$ 矩阵称为 m **维列向量**.

5. **单位矩阵** 主对角元全为 1, 其余元素全为零的 n 阶方阵称为 n 阶**单位矩阵**, 记为 $\boldsymbol{I}$.

6. **对角矩阵** 非主对角元均为零的 n 阶矩阵称为**对角矩阵**, 记为 $\mathrm{diag}\,(d_1, d_2,\cdots, d_n)$, 其中 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 为主对角元. 如果 $d_i=k(i=1,2\cdots,n)$, 则称其为**数乘矩阵**, 记为 $k\boldsymbol{I}$.

7. **上 (下) 三角形矩阵** 主对角元下方 (上方) 元素都为 0 的 n 阶方阵称为 n 阶**上 (下) 三角形矩阵**或者**上 (下) 三角形矩阵**.

8. **对称矩阵** 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 且 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**对称矩阵**.

注 单位矩阵、对角矩阵为对称矩阵.

9. **反称矩阵** 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 且 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**反称矩阵**.

注 反称矩阵的对角元为 0.

1.1.3 矩阵的线性运算

本小节介绍矩阵的线性运算, 首先引入相等定义.

定义 1.3 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 且 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**, 记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 1.1.3 设

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & z-3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x-1 & 3\\ y-2 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

求 x,y,z.

解 由矩阵相等, 得 $\begin{cases}x-1= & 2,\\ y-2= & 3,\\ z-3= & 1,\end{cases}$ 解得 $x=3,y=5,z=4$.

1. 矩阵的加法运算

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 称 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和, 记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

2. 矩阵的负运算和减法运算

定义 1.5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 称 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**, 记为 $-\boldsymbol{A}$.

利用矩阵的加法运算和负运算, 定义矩阵的**减法运算**, 即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

3. 矩阵的数乘运算

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, k 为数, 称 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 k 的**乘积**或**数乘**, 记为 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$.

显然数乘矩阵 $k\boldsymbol{I}$ 就是数 k 与单位矩阵的数乘.

例 1.1.4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&a&3\\1&b&2\\3&c&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&a&3\\2&b&2\\4&c&1\end{pmatrix}.$$

求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解
$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2a&6\\2&2b&4\\6&2c&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&3a&9\\6&3b&6\\12&3c&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&-a&-3\\-4&-b&-2\\-6&-c&-1\end{pmatrix}.$$

矩阵的加法运算、数乘运算统称为矩阵的线性运算.

矩阵的线性运算具有下列性质:

(1) 加法的交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 加法的结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) 零矩阵满足 $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$;

(4) 负矩阵满足 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$;

(5) 数乘结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$, 其中 λ,μ 为数;

(6) 数乘分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A},\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B},\text{ 其中 }\lambda,\mu\text{ 为数};$$

(7) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(8) $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

以上八条性质体现了矩阵运算的线性性质, 请读者自行证明.

1.1.4 矩阵的乘法运算

定义 1.7 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$. 称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj} \tag{1.1.2}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注 (1) 行向量与列向量相乘的结果是一行一列的矩阵, 即

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}=\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\right)=(c_{ij}).$$

(2) $\boldsymbol{AB}$ 可乘 (也称 $\boldsymbol{AB}$ 有意义) 的前提是 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数.

(3) 设 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是第 i 个元素为 1, 其它元素为 0 的 m 维行向量, $e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 个元素为 1, 其它元素为 0 的 n 维列向量. 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_m\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\beta}_i \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

特别地,

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j)=a_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

通常称 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 的**标准单位向量组**, ε_1, $\varepsilon_2,\cdots$, ε_m 为 $\mathbf{R}^{1\times m}$ 的**标准单位向量组** (可参见第三章内容). 在书中除非特别说明, $\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 均指这些向量.

例 1.1.5 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a\\1&b\\1&c\\1&d\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}10 & a+2b+3c+4d\\ 0 & -a+b+c-d\\ 0 & a-b-c+d\end{pmatrix}$, 由于 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数, 所以 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 1.1.6 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, 并判断 $\boldsymbol{AB}$ 是否等于 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}6 & 6\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ 4 & 0 & 4\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

显然 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不相等.

例 1.1.7 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

注 (1) 矩阵乘法不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 未必相等. 这是因为 $\boldsymbol{AB}$ 有意义, $\boldsymbol{BA}$ 未必有意义; 即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义, 但它们阶数未必相同; 即使它们阶数相同, 也未必有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(2) 当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 可能有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(3) 矩阵的乘法不满足消去律, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

定义 1.8 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **交换**.

定理 1.1.1 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 且 $i\neq j$ 时, $a_i\neq a_j$. 证明与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵是对角矩阵.

证 若 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 交换, 则

$$\boldsymbol{AB}=(a_ib_{ij})_{n\times n}=\boldsymbol{BA}=(b_{ij}a_j)_{n\times n},$$

于是 $a_ib_{ij}=b_{ij}a_j(i,j=1,2,\cdots)$. 由 $a_i\neq a_j(i\neq j)$, 得 $b_{ij}=0$, 因此 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵.

矩阵乘法运算、线性运算满足下列运算律:

(1) 乘法结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) 乘法分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

(3) 乘法和数乘结合律 $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$, 其中 λ 为数;

(4) 单位矩阵满足 $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$;

(5) 零矩阵满足 $\boldsymbol{0}_{m\times s}\boldsymbol{A}_{s\times n}=\boldsymbol{0}_{m\times n}$, $\boldsymbol{A}_{s\times n}\boldsymbol{0}_{n\times t}=\boldsymbol{0}_{s\times t}$.

证 我们只验证乘法结合律, 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times t},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{t\times n},\boldsymbol{AB}=(d_{ij})_{m\times t},\boldsymbol{BC}=(h_{ij})_{s\times n},$$

则 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行和第 k 列元素是 $d_{ik}=\sum\limits_{l=1}^{s}a_{il}b_{lk}$, 因此 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 的第 i 行和第 j 列元素是

$$\sum_{k=1}^{t}d_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{l=1}^{s}(a_{il}b_{lk})\right)c_{kj}=\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lk}c_{kj}. \tag{1.1.3}$$

同样, $\boldsymbol{BC}$ 第 l 行和第 j 列元素是 $h_{lj}=\sum\limits_{k=1}^{t}b_{lk}c_{kj}$, 因此 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的第 i 行和第 j 列元素是

$$\sum_{l=1}^{s}a_{il}h_{lj}=\sum_{l=1}^{s}a_{il}\sum_{k=1}^{t}(b_{lk}c_{kj})=\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lk}c_{kj}. \tag{1.1.4}$$

由式 (1.1.3) 与 (1.1.4), 得 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

1.1.5 线性方程组的矩阵表示

考虑 m 个方程、n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases} \tag{1.1.5}$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为 (1.1.5) 的**系数矩阵**, $\boldsymbol{x}$ 为**未知列向量**, $\boldsymbol{b}$ 为**常数列向量**. 此时 (1.1.5) 可表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{1.1.6}$$

当 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, 称 (1.1.6) 为**非齐次线性方程组**, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为**齐次线性方程组**, 并称为 (1.1.6) 的**导出组**. 如果 x_0 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$, 则称 x_0 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的**解**.

(1.1.5) 又可表示为

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}, \tag{1.1.7}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{c} = (b_1, b_2, \cdots, b_m).$$

此时对应的齐次线方程组可以表示为

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}. \tag{1.1.8}$$

设列向量

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \boldsymbol{\beta}_n = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

则 (1.1.5) 可表示为

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{b}. \tag{1.1.9}$$

称形如 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$ 的等式为**矩阵方程**, 其中 $\boldsymbol{X}$ 为未知矩阵, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为已知矩阵.

1.1.6 矩阵的其他运算

1. 方阵的幂运算

定义 1.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 定义

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^k = \overbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}^{k}(k\text{为正整数}),$$

称 $\boldsymbol{A}^k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **次幂**.