

初中应知应会系列丛书

初中代数 第四册学习手册

上册

(供初中三年级第一学期使用)

Chu Zhong

SHU XUE

村读物出版社

中学课外读物

梅向明主编

中学课外读物

•初中应知应会系列丛书•

初中代数第四册学习手册

上册

(供初中三年级第一学期使用)

梅向明 主编

农村读物出版社

1987年

·初中应知应会系列丛书·

初中代数第四册学习手册（上册）

梅尚明 主编

农村读物出版社 出版

大兴县张各庄印刷厂印刷

新华书店首都发行所 发行

787×1092毫米1/32 5.25印张 121千字

1987年6月第1版 1987年6月第1次印刷

印数：1——76 100

书号：7267·70 定价：1.10元

ISBN 7-5048-0050-3/G·20

序

中国数学学会普及委员会主任
北京师范学院副院长兼数学系主任

梅向明

目前，中学教材改革的主要一点是：把过高的教学要求降下来。那么，自然就会产生一个问题：给中学生传授知识的“低限”是什么？这也就是这一套学习手册想解决的主要问题。当然，教学要求的确定主要是通过修改教学大纲来解决，我们只是根据修改以后的教学大纲，从教学内容上进一步具体化。

这一套学习手册是参加编写的老师们的教学经验的总结。他们都是六十年代的大学生，从事中学数学教学二三十年，因此从内容、选材和构思上，给我的印象是好的，编写态度是认真严肃的。

在我看来，这套学习手册不仅可以供初中学生使用，更重要的对象恐怕还有两部分人：一是供缺乏教学经验的初中教师备课之用；二是供一些关心子女成长的家长作为督促子女学习之用。因此，我认为这套学习手册会受到广大初中学生、教师和家长的欢迎。

1987年2月于北京

前 言

一、国家教委颁布《调整初中数学教学要求的意见》后，在全国范围内大面积地提高初中数学的教学质量势在必行。为此，我们在中国数学学会普及委员会主任、北京师范大学副院长兼数学系主任梅向明教授的主持下，编写了这套初中数学应知应会学习手册。

二、这套学习手册是根据人民教育出版社今年秋季供应的初中各年级数学课本的内容，并参照该社供应的教学参考书中的课时安排，按照各年级每学期数学授课时数分课编写的。

三、每课内容均包括“应知应会”、“预习注意”、“复习巩固”三部分。

“应知应会”是向读者指出本课的教学要求和教学内容的重点。

“预习注意”是帮助读者解决在阅读课文时可能遇到的困难，分析教材内容的结构，发掘教材内容的潜在涵意，教给读者分析问题的方法，培养读者解决问题的能力。

“复习巩固”是围绕教学内容对课本中的练习和习题进行必要的铺垫，个别地方也作了一些相应的提高。这就能使读者开扩眼界，启迪思维，从而巩固了所学的内容。

四、这套学习手册融教学经验和教学方法为一体，寓科学道理和逻辑思维于一文。它通俗易懂，语言洗炼，形式活泼，使用方便。全国各省、自治区、直辖市的城乡中学均可

使用。各类知识青年、在职职工及学生家长也可以参考阅读。

五、这套学习手册由梅向明教授主编，参加编写工作的有北京市海淀区、西城区、朝阳区、丰台区的数学教师肖淑英、王建民、姚印发、李鸿元、陈璐、戴志年、酆福林、李冰、郑学遐等。

六、愿这套学习手册能为大面积提高初中数学的教学质量作出微薄的贡献，愿它们能成为本书编者提供给广大初中学生的心爱的礼物。

诚恳欢迎广大读者给我们提出宝贵的意见和建议。

编者

1987年春于北京

第1课 对数(一)

课本第1页至第3页第1行。

一、应知应会

引例：求下列各式中的 x ，并说明你进行的是什么运算？

$$(1) x = 2^4; \quad (2) x^4 = 16; \quad (3) 2^x = 16.$$

解：(1) $x = 16$ ，进行的是乘方运算；

(2) $x = \pm 2$ ，进行的是开方运算；

(3) $\because 2^x = 2^4, \therefore x = 4$ 。求16是2的多少次幂，这就是我们本节课要学习的对数。

什么叫做对数呢？如果 a ($a > 0, a \neq 1$) 的 b 次幂等于 N ，就是 $a^b = N$ ，数 b 就叫做以 a 为底的 N 的对数，记作 $\log_a N = b$ ，其中 a 叫做底数， N 叫做真数。对数定义是我们这节课应掌握的第一个内容。

和前面学过的加法与减法，乘法与除法，乘方与开方一样，指数与对数也互为逆运算。在学习加、减、乘、除、乘方、开方运算时，同学们曾不止一次利用它们之间的互为逆运算关系检查计算结果是否正确，设计出简捷的计算方法。在学习本节时，要掌握式子 $a^b = N$ ($a > 0, a \neq 1$) 叫做指数式。式子 $\log_a N = b$ ($a > 0, a \neq 1, N > 0$) 叫做对数式。对数式与指数式之间有什么关系呢？请看下表：

	a	N	b
指数式 $a^b = N$	底数	幂	指数
对数式 $\log_a N = b$	底数	真数	对数

能够准确、熟练地进行指数式和对数式之间的互化是这节课应掌握的第二个内容。

第二页第七行的公式 $a^{\log_a N} = N$ 叫做对数恒等式。乍一看这个公式很复杂，仔细琢磨就是把指数式 $a^b = N$ 中的指数 b 用和它相等的 $\log_a N$ 代替而得到的。对数恒等式是这节课应掌握的第三个内容。

二、预习注意

1. 在对数式 $\log_a N = b$ 中，为什么底数 $a > 0$ ， $a \neq 1$ 呢？这要从指数式 $a^b = N$ 谈起，因为只有 $a > 0$ ，的任何实数次幂才能有意义。因为 1 的任何次幂都等于 1，若 $a = 1$ ，则 $a^b = N = 1$ ，而 b 的值不确定，这样的问题我们没有研究的必要。在对数式中，为什么真数 $N > 0$ ？因为 N 就是指指数式中的幂，在 $a > 0$ 的条件下必有 $N = a^b > 0$ 。所以真数必定是正实数。把对数中的问题，转化成指数中的问题去考虑，这种思维方法在本章学习中有着重要意义。

2. 对数恒等式谈的是如果一个幂的指数是一个对数，这个对数的底数恰是幂的底数，那么这个幂的值等于幂的指数的那个对数的真数。怎样灵活应用这个公式呢？请看下例：

例 1. 求下列各式的值：

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}; \quad (2) 8^{\log_2 5}; \quad (3) \sqrt{2}^{\log_2 5}$$

$$\text{解: } (1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5} = (2^{-1})^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{-1}$$

$$= 5^{-1} = \frac{1}{5};$$

$$(2) 8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125;$$

$$(3) \sqrt{2}^{\log_2 5} = (2^{\frac{1}{2}})^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \\ = \sqrt{5}.$$

三、复习巩固

1. 填空:

$$(1) 2^{-\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 并把它改写成对数式 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) 27^{-\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 并把它改写成对数式 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) (2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 并把它改写成对数式 } \\ \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 并把它改写成对数式 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) 0.25^0 = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 并把它改写成对数式 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 把下列对数式改写成指数式, 并根据所得指数式是否成立判断所给出的对数式是否正确.

$$(1) \log_2 \frac{1}{4} = -2; \quad (2) \log_{49} 7 = \frac{1}{2};$$

$$(3) \log_{27} \frac{1}{27} = -\frac{3}{4}; \quad (4) \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1.$$

3. 计算:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 5}; \quad (2) (\sqrt[3]{3})^{\log_3 8}; \quad (3) 27^{\log_{\frac{1}{3}} 5}.$$

4. $a^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). 把所得的指数式改写成对数式, 你能用语言叙述这个对数式吗?

5. $a^1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 把所得的指数式改写成对数式, 你能用语言叙述这个对数式吗?

答案:

$$1. (1) \frac{\sqrt{2}}{2}, \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}; (2) \frac{1}{3},$$

$$\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}; (3) 4, \log_{2\sqrt{2}} 4 = \frac{4}{3}; (4) 16,$$

$$\log_{\frac{1}{8}} 16 = -\frac{4}{3}; (5) 1, \log_{0.25} 1 = 0;$$

$$2. (1) 2^{-2} = \frac{1}{4}, \text{ 正确}; (2) 49^{\frac{1}{2}} = 7, \text{ 正确};$$

$$(3) 81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}, \text{ 正确}; (4) \sqrt[3]{3}^1 = \sqrt[3]{3}, \text{ 正确},$$

$$3. (1) \frac{1}{25}; (2) 2; (3) \frac{1}{125}.$$

$$4. 1, \log_a 1 = 0, 1 \text{ 的对数等于 } 0.$$

$$5. a, \log_a a = 1, \text{ 底的对数等于 } 1.$$

第2课 对数(二)

课本第3页第2行到第4页练习前.

一、应知应会

上节课我们已经学习了对数定义，掌握了指数式和对数式之间的互化，知道要求对数式 $\log_a N = b$ 中的对数 b ，实际上就是求指数式 $a^b = N$ 中的指数 b ；要求对数式 $\log_a N = b$ 中的真数 N ，就是求指数式 $a^b = N$ 中 a 的 b 次方的值。这节课我们首先要掌握利用对数式与指数式之间的互逆关系，求对数式中的对数、真数、底数的值。

通过第3页例5归纳出“底数的对数等于1”、“1的对数等于零”这两个重要的对数性质。要掌握这两个性质的证明方法。今后再遇到求底的对数的值及1的对数的值时，就应该直接利用这两个性质写出结果。这是本课应该掌握的第二个内容。

二、预习注意

1. 你看懂课本第3页例3了吗？现把例3变成下面例题，并总结出求真数 N 的一般方法。

例1. 已知 $\log_{2\sqrt{2}} N = -2$ ，求 N 。

解：由 $\log_{2\sqrt{2}} N = -2$ 得 $N = (2\sqrt{2})^{-2}$ 。

（第一步：把对数式化成指数式。）

$$\therefore N = (2^{\frac{3}{2}})^{-2} = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

（第二步：利用零指数，负整指数，正、负分数指数幂的定义及幂的运算法则进行计算，求出真数 N 的值。）

2. 你看懂课本第3页例4了吗？现把例4变成下面例题，并总结出求对数的一般方法。

例2. 求 $\log_9 27$ 的值。

解：设 $\log_9 27 = x$ ，则 $9^x = 27$ 。

(第一步: 设对数值为 x , 并把对数式化成指数式.)

$$\therefore 3^{2x} = 3^3.$$

(第二步: 把指数式等号两边化成同底数的幂.)

$$\therefore 2x = 3, \quad x = \frac{3}{2}.$$

(第三步: 根据同底数的幂相等, 指数必相等, 求出 x 的值.)

$$\text{即 } \log_3 27 = \frac{3}{2}.$$

(第四步: 写出结论.)

注意: 利用这种化指数式法只能求出真数与底数是同底数幂的对数值. 对于求真数和底数不易化成同底数的幂的对数值 (例如 $\log_{10} 2$), 我们往往采用查表法或其它方法. 求对数值有多少种方法? 请同学们在今后学习时留心总结.

3. 在对数式 $\log_a N = b$ 中, 有 a 、 b 、 N 三个量, 知 a 、 b 能求 N , 知 a 、 N 能求 b , 知 b 、 N 能不能求 a 呢? 请看下例.

例3. 已知 $\log_a \frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$, 求 a .

$$\text{解: } a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

(第一步: 把对数式化成指数式.)

两边同 (-2) 次方, 得到

$$a = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = (2^{-3})^{-2} = 2^6 = 64.$$

(第二步: 等式两边同次幂使 a 的指数化为1. 求出 a 的值.)

综上所述, 要解决对数中的问题, 就把它化为指数问题

去解决。这种化未知为已知的思维方法是学习数学最基本方法。

三、复习巩固

1. 先指出下列各式中 x 的名称, 说出要求出 x 的方法、步骤, 并求出 x 的值。

$$(1) \log_8 x = \frac{2}{3}; \quad (2) \log_{25} \frac{1}{5} = x;$$

$$(3) \log_x \frac{1}{27} = -2; \quad (4) \log_x 0.25 = 2;$$

$$(5) \log_4 \sqrt{2} = x; \quad (6) \log_3 \sqrt{3} x = -\frac{2}{3}.$$

2. 求下列各式的值:

$$(1) \log_4 4; \quad (2) \log_{\pi} 1; \quad (3) \log_2 (\log_5 5).$$

3. 计算下面二题。并注意每一步的根据:

$$(1) 100^{\log_{10} 11} + \sqrt{5}^{\log_5 4} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 \frac{1}{3}};$$

$$(2) 100^{\log_7 7} + \sqrt{5}^{\log_5 1} - (3.875)^{\log_2 1}.$$

答案:

$$1. (1) x = 4; \quad (2) x = -\frac{1}{2}; \quad (3) x = 3\sqrt{3};$$

$$(4) x = 2; \quad (5) x = \frac{1}{4}; \quad (6) x = \frac{1}{3}.$$

$$2. (1) 1; \quad (2) 0; \quad (3) 0.$$

$$3. (1) -2; \quad (2) 100.$$

第3课 积、商、幂、方根的对数（一）

课本第5页至第8页第3行。

一、应知应会

学习对数的目的，除了因为它是指数的逆运算外，还因为利用对数可以简化计算。回顾历史，对数产生于十七世纪。当时由于航海业及天文学的发展，人们迫切需要简化十分庞大的数据的乘、除、乘方、开方运算。经过不少数学家的努力，终于发明了对数。利用对数如何简化计算呢？积、商、幂、方根的对数法则告诉我们两个正数的积的对数，等于同一底数这两个正数的对数的和；两个正数商的对数，等于同一底数被除数的对数减去除数的对数的差；一个正数幂的对数等于幂的底数的对数乘以幂指数；一个正数算术根的对数，等于被开方数的对数除以根指数。积、商、幂、方根的对数法则及其这些法则的证明是本课应掌握的内容。

二、预习注意

1. 用式子表示两个正数积的对数法则是 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 。为什么不注明 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 呢？这是因为在课本第二页已经说明“本章对数式中的字母，如不加特殊说明，底数都是不等于1的正数，其数都是正数”。在本书中，为使题目简捷，字母取值问题也借用上面约定。

2. 通过前面学习, 知道对数式中的对数就是指数式中的指数, 对数式中的真数就是指数式中的幂, 并运用把对数式中的问题转化成指数式中的问题求出了对数式中的真数、对数、底数. 积、商、幂、方根对数法则的证明再一次利用这种方法.

3. 运用积、商、幂、方根对数法则可使正数乘积 (二级运算) 的对数, 转化成同一底数对数的和 (一级运算); 两正数商 (二级运算) 的对数, 转化成同一底数被除数的对数减去除数的对数 (一级运算); 一个正数幂 (三级运算) 的对数转化成幂的底数的对数乘以幂指数 (二级运算); 一个正数算术根 (三级运算) 的对数, 等于被开方数对数除以根指数 (二级运算). 因此, 利用积、商、幂、方根对数法则可使计算简化 (运算降级).

4. 掌握积、商、幂、方根对数法则并不是一件容易的事, 初学者往往爱犯 $\log_a (M + N) = \log_a M + \log_a N$, $\log_a MN = \log_a M \cdot \log_a N$ 之类的错误, 同学们对于法则使运算“降级”作用应有一个清楚的认识, 通过法则的证明, 掌握“降级”作用的由来.

三、复习巩固

1. 比较下面每题中的三个式子, 并说明哪个可以用积、商、幂、方根对数法则展开, 哪个不能.

$$(1) \log_a MN, \quad \log_a (M + N), \quad \log_a M \cdot \log_a N;$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N}, \quad \log_a (M - N), \quad \frac{\log_a M}{\log_a N};$$

$$(3) \log_a M^n, \quad (\log_a M)^n; \quad \log_a M;$$

$$(4) \log_a \sqrt[n]{M}; \quad \log_a \frac{M}{N}, \quad \sqrt[n]{\log_a M}.$$

2. 用 $\log_a x$ 、 $\log_a y$ 、 $\log_a(x+y)$ 、 $\log_a(x-y)$ 表示下列各式:

$$(1) \log_a \frac{x^2 - y^2}{x}; \quad (2) \log_a \sqrt[3]{x^2 y(x+y)};$$

$$(3) \log_a \sqrt[3]{ax^2 y^3}; \quad (4) \log_a(ax^2 - ay^2).$$

答案:

1. (1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$. $\log_a(M+N)$ 和 $\log_a M \cdot \log_a N$ 不能用积、商、幂、方根的对数法则展开.

(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$. $\log_a(M-N)$ 和 $\frac{\log_a M}{\log_a N}$ 不能用积、商、幂、方根的对数法则展开.

(3) $\log_a M^n = n \log_a M$, $\log_a nM = \log_a n + \log_a M$, $(\log_a M)^n$ 不能用积、商、幂、方根的对数法则展开.

$$(4) \log \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M, \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$

$\sqrt[n]{\log_a M}$ 不能用积、商、幂、方根对数法则展开.

$$2 \quad (1) \log_a(x+y) + \log_a(x-y) - \log_a x;$$

$$(2) \frac{2}{3} \log_a x + \frac{1}{3} \log_a y + \frac{1}{3} \log_a(x+y);$$

$$(3) \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \log_a x + \log_a y;$$

$$(4) 1 + \log_a(x+y) + \log_a(x-y).$$

第4课 积、商、幂、方根的对数（二）

课本第8页例2。

一、应知应会

1. 前面我们讲过利用把对数式化成指数式，根据同底数的幂相等，幂的指数必相等；求出幂的指数值，从而求出所要求的对数值。例如：计算 $\log_{10} \sqrt[5]{100}$ 有如下解法：

解法一：设 $\log_{10} \sqrt[5]{100} = x$ ，则 $10^x = \sqrt[5]{100}$ 。

$$\text{即 } 10^x = 10^{\frac{2}{5}},$$

$$\therefore x = \frac{2}{5}, \text{ 即 } \log_{10} \sqrt[5]{100} = \frac{2}{5}.$$

如果真数比较容易化成底数的若干次幂，求此对数值时亦可利用幂的对数法则及底的对数等于1，求出所要求的对数值，对于上题有如下解法。

$$\text{解法二：} \log_{10} \sqrt[5]{100} = \log_{10} 10^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_{10} 10 = \frac{2}{5}.$$

这是课本中介绍的求对数值的第二种方法，是本课应该掌握的第一个内容。

2. 灵活应用积、商、幂、方根的对数法则，解比较复杂的有关对数的计算题，是本节课应该努力掌握的第二个内容。

$$\text{例1. 计算：} \log_{25} 5 - \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{解：原式} = \log_{25} 25^{\frac{1}{2}} - \log_5 5^{-\frac{1}{2}}$$