十二五

通高等教育“十二五”规划教材

普通高等院校数学精品教材

线性代数教程同步辅导 第2版

梅家斌　朱祥和　主编

知识归纳

释疑解惑

重点难点

习题解析

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

线性代数教程同步辅导

（第2版）

主编　梅家斌　朱祥和
编委　林升旭　叶牡才　阎国辉
贺丽娟　杨　戟

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书是《线性代数教程》(林升旭、梅家斌编，华中科技大学出版社出版)的配套辅导书.全书共分五章，分别为行列式、矩阵运算、初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型.每章按节编排，分内容提要、释疑解惑、典型例题解析;各章还编有综合范例、自测题、答案与提示等，内容循序渐进、通俗易懂.

本书对于理工类在校本科生加深理解线性代数课程中的基本概念，提高逻辑推理及运算能力，定会大有裨益，对于希望进一步深造、报考研究生的同学也会有很大帮助.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程同步辅导(第 2 版)/梅家斌　朱祥和　主编.—武汉：华中科技大学出版社，2012.10

ISBN 978 7-5609 7543-6

Ⅰ.线…　Ⅱ.①梅…　②朱…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 254876 号

线性代数教程同步辅导(第 2 版)　　梅家斌　朱祥和　主编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：王汉江
封面设计：李　嫚
责任校对：朱　玢
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：仙桃市新华印务有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：16
字　　数：350 千字
版　　次：2012 年 10 月第 2 版第 2 次印刷
定　　价：30.00 元

前　言

凡是学过“线性代数”这门课程的读者都会有这样的感受:概念多而抽象,定理严谨难懂,方法灵活,技巧性强,尤其是一些论证问题更是不知从何下手.这的确是学习该门课程中普遍存在的问题.究其原因,作者认为主要有以下两点:其一是该课程的教学课时数偏少,几乎没有充足的教学指导和习题演练时间,导致学生对该课程基础知识掌握不牢固,知识点不能融会贯通;其二是因本课程内在特征所致.线性代数主要是以矩阵为工具,研究线性空间的结构与特征,并通过线性变换来进一步揭示其内在的联系及规律性,其内容与中学所学的代数(中学代数主要是数的运算)相比,虽然具有某些相似之处,但有较大反差,其符号抽象,运算和变换灵活多变,特别是许多概念和定理不仅抽象难懂,而且具有相当多的等价形式.因此,如果没有经过一定系统的演练和反复揣摩,是很难谈得上对该课程内容的理解和掌握的,更难达到运用自如的效果.

为了尽快地学好线性代数这门课程,准确深入地理解其中的理论,释解心中的疑惑,透彻理解各种知识点及内在联系,选择最佳方案解答各种习题,是每一位读者都面临并亟待解决的难题.

作者根据目前工科高等学校线性代数课程教学的基本要求,结合多年从事该课程教学实践的经验和资料积累,博采众长,编写了这本教学辅导书,以期能指导读者学习和复习考试,帮助读者拓宽思路,掌握知识结构、内在联系及解题技巧,提高解题速度和运算能力.

本书以节为单位进行编排,其结构体系大致如下.

【内容提要】 概述了每一节的基本概念、基本方法及基本定理.

【释疑解惑】 解答读者在学习过程中常出现的疑惑问题、容易混淆的错误概念及解题过程中常出现的错误运算.

【典型例题解析】 结合每节的具体内容,精选同步题型,将其归类、解析,并进行点评、总结,指出解题思路以期对读者起到画龙点睛、触类旁通的功效.在解题中尽量做到一题多解,指出最佳解法,以提高读者发散思维.对于这一部分内容,读者尤其是在校学生可顺着教学内容同步学习.

【综合范例】 这一部分配有历年全国考研代表性试题,还选有相当数量的几何与代数相关联的例题及应用题,综合性强,方法更具技巧性.这部分内容应放在整个课程结束后学习,主要以复习提高为目的,以期提高读者的综合分析能力和实际应用知识的能力.

【自测题、答案与提示】 这部分题型有填空题、选择题、计算题和证明题,这里也

配有部分历年教学考试试题、考研试题，各试题给出了答案，部分试题给出了简单解析以供读者自测用.

本书题目覆盖面广，典型丰富.在编排上由浅入深、循序渐进地展开，解题力求简明清晰，易学易懂.本书是读者在学习线性代数课程及考研复习过程中的良师益友，也是年轻教师教学辅导的重要参考书.

本书共分五章.第1、2章由朱祥和老师编写，第3～5章由梅家斌老师编写，林升旭老师提供了全部自测题、答案及提示.

本书在编写过程中得到了林益教授及刘国钧教授等人的大力帮助及悉心指导，在此表示衷心的感谢.

限于作者水平，书中错漏之处在所难免，敬请广大读者指正.

编　者

2012年8月

目　　录

第1章 行 列 式

1.1 行列式的概念

一、内容提要

1. 排列的逆序数

定义 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序实数组称为一个 n 元排列. n 元排列的总个数有 $n!$ 个. 在一个 n 元排列 $i_1 i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若 $i_t>i_s$,则称这两个数 i_t,i_s 构成一个逆序,一个排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$.

2. 排列的奇偶性及对换性质

定义 一个排列的逆序数为奇(偶)数,称此排列为奇(偶)排列.

在一个排列中,交换两个数字的位置,其余数字不动,称对排列作一次对换,相邻两数字的对换称为邻换.

(i) 一次对换改变排列的奇偶性.

(ii) 任一个 n 元排列都可经过有限次数的对换变为自然排列,且所作对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

(iii) 全体 n 元排列的个数为 $n!$ 个,奇排列数与偶排列数各一半.

3. n 阶行列式的定义

定义 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成如下的 n 行 n 列,定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1 j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

称 D 为 n 阶行列式,也记为 $D=\det\boldsymbol{A}$($\boldsymbol{A}$ 为行列式 D 的矩阵). 这里 $\sum\limits_{(j_1 j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有 n 元排列求和,故 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和,共有 $n!$ 项,每一项所置的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列 $j_1 j_2\cdots j_n$的逆序数(行下标按自然顺序排列),即当 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是偶排列时置以正号,当 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是奇排列时置以负号.

对角行列式、上(下)三角行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

二、释疑解惑

问题 1 确定下列五阶行列式中项 $a_{34}a_{25}a_{41}a_{12}a_{53}$ 的符号.

答 $a_{34}a_{25}a_{41}a_{12}a_{53}=a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53}$，其列下标排列为 25413，因 $\tau(25413)=6$，故为偶排列，此项的符号为正号.

问题 2 写出四阶行列式中所有包含有 a_{12}，a_{23} 的项.

答 由 n 阶行列式的定义，每项均取自于不同行不同列元素的乘积，这里要求包含有 a_{12}，a_{23}，将其行下标按自然排列后有两种情况，即 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$，并且需考虑项的符号，$\tau(2314)=2$，$\tau(2341)=3$，故为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$，$-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

问题 3 用定义计算：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

答 原式 $=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (n-1)\cdot n=(-1)^{n-1}n!$.

问题 4 计算 n 元排列的逆序数通常有哪些方法？

答 常用下面两种方法.

(1) 分别算出排在 $1,2,\cdots,n$ 前面比它大的数码个数之和，即逐一算出 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素的逆序数，这 n 个元素的逆序数之总和即为所求 n 元排列的逆序数.

(2) 从左边起，分别算出排列中每个元素前面比它大的数码之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

问题 5 怎样确定排列的奇偶性？

答 (1) 首先求出所给排列的逆序数，若逆序数为偶数，则此排列是一个偶排列；若逆序数为奇数，则此排列为奇排列.

(2) 将所给排列进行对换，如果该排列进行了 k 次对换后变成了自然顺序排列，则该排列的奇偶性与对换次数 k 的奇偶性相同，这是因为每对换一次就改变一次排列的奇偶性，而自然顺序排列的逆序数为零，所以原来排列的奇偶性与对换次数 k 的奇偶性相同.

问题 6 为什么 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式不能按对角线展开？

答 二阶、三阶行列式可以按对角线展开，而四阶及四阶以上的行列式不能按对角线展开，因为它不符合 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式的定义. 例如，对于四阶行列式. 如果按对角线法则，则只能写出 8 项，这显然是错误的，按照行列式的定义可知，四阶行列式一共有 4! 项；另外，按对角线作出的项的符号也不一定正确，比如，乘积项 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，其列排列 4123 的逆序数为 3，应取负号. 所以，在计算 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式时，对角线法则失效.

三、典型例题解析

例 1 行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&3\\3&1&5\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda-1&0\\1&0&\lambda\end{vmatrix}.$$

若 $D_1=D_2$，则 λ 的取值为(　　).

(A) 0,1　　(B) 0,2　　(C) 1,−1　　(D) 2,−1

解 按三阶行列式的对角线法则，有

$D_1=10+2+27-6-30-3=0,\quad D_2=\lambda^2(\lambda-1)-(\lambda-1)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$

若 $D_1=D_2$，则 $(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$，解得 $\lambda_1=-1$ 或 $\lambda_2=1$. 选(C).

例 2 排列 134782695 的逆序数是(　　).

(A) 9　　(B) 10　　(C) 11　　(D) 12

解 $\tau(134782695)=4+0+2+4+0+0+0+0+0+0=10$. 选(B).

例 3 下列排列中(　　)是偶排列.

(A) 4312　　(B) 51432　　(C) 45312　　(D) 654321

解 $\tau(4312)=5,\tau(51432)=7,\tau(45312)=8,\tau(654321)=15$，选(C).

例 4 问 i,j 取何值时，排列 $42i6j3$ 为奇排列.

解 排列 $42i6j3$ 中，i,j 可取数字有两种情况.

(1) $i=1,j=5$；

(2) $i=5,j=1$.

当 $i=1,j=5$ 时，$\tau(421653)=7$ 为奇排列；

而当 $i=5,j=1$ 时，$\tau(425613)=8$ 为偶排列.

例 5 在六阶行列式中，对应项

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65},\ a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$$

各应带什么符号?

解一 对换项中的元素，使每项所对应的行标为标准次序，即把所给的两项调成

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}\text{ 及 }a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}.$$

这两项列标所组成的排列分别为

$$431265 \text{ 及 } 452316.$$

它们的逆序数分别为 6 与 8，均为偶排列，故所给的两项在六阶行列式中均应带正号.

解二 分别算出两项行标及列标排列的逆序数，即算出排列

$$234516,312645 \tag{①}$$

$$341562,234165 \tag{②}$$

的逆序数.

由于①中两个排列的逆序数都是 4，且这两个排列的逆序数之和为偶数，故所给的前一项应带正号.

由于②中两个排列的逆序数依次为 6,4,这两个排列的逆序数之和为偶数,故所给的后一项也应带正号.

解二是将所给项的行标和列标按已给的排列,求其行标排列与列标排列的逆序数之和.此和为奇数则该项带负号,此和为偶数则该项带正号.

例 6 写出五阶行列式 $D_5=|a_{ij}|$ 中包含 a_{13},a_{25},并带正号的项.

解 D_5 中包含 a_{13} 及 a_{25} 的所有项数为五元排列 $35j_3j_4j_5$ 的个数,因 j_3,j_4,j_5 所取的排列是 1,2,4 这三个数码所取的 6 个全排列,因而 $35j_3j_4j_5$ 能组成的五元排列共有 6 个,即

$$35124;35142;35214;$$
$$35241;35412;35421.$$

相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(35124)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}=-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54},$$
$$(-1)^{\tau(35142)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}=a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},$$
$$(-1)^{\tau(35214)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}=a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},$$
$$(-1)^{\tau(35241)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}=-a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51},$$
$$(-1)^{\tau(35412)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}=-a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52},$$
$$(-1)^{\tau(35421)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}=a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

故包含 a_{13},a_{25},并带正号的所有项为

$$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},\quad a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},\quad a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

例 7 计算下列排列的逆序数,并讨论奇偶性.

(1) $n(n-1)\cdots21$; (2) $135\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots42$.

解 (1) $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$,该排列当 $n=4k,n=4k+1$ 时为偶排列,当 $n=4k+2,n=4k+3$ 时为奇排列.

(2) 对于排列 $135\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots42$ 中,前面 n 个数字 $13\cdots(2n-1)$ 为顺序排法,只考虑后 n 个偶数的逆序数就行了,故 $\tau(13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots42)=0+2+4+\cdots+(2n-2)=2(1+2+\cdots+n-1)=n(n-1)$,无论 n 为奇数或偶数,$n(n-1)$为偶数,故该排列为偶排列.

例 8 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式 $D_6=|a_{ij}|$ 中的项.

分析 题中所给两个数都是 D_6 中不同行不同列的 6 个元素的乘积,因此要判断它们是不是 D_6 中的项,其关键是看它们是否满足符号规律.

解 第一个数 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 的 6 个因子的第一个下标为标准排列,第二个下标排列 431265 的逆序数为 6,所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是 D_6 中的项.

第二个数可重新排序成 $-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$,此时,第二个下标排列 452316 的逆序数为 8,所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是 D_6 中的项.

例 9 用定义计算五阶行列式:

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 D_5 中各行非零元素的列标分别可取以下各值:

$$p_1=2,3;\quad p_2=1,2,3,4,5;\quad p_3=1,2,3,4,5;\quad p_4=2,3;\quad p_5=2,3.$$

在上述可能取的数值中,不能组成任何一个五元排列 $p_1p_2p_3p_4p_5$,即 D_5 的每项 5 个元素中,必至少含有一个零元素,由行列式的定义可知,$D_5=0$.

例 10 计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 因为该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素,由 n 阶行列式定义知,D_n 只含一项 $a_1a_2\cdots a_{n-2}a_{n-1}a_n$,其中元素的下标正好是它们所在行的下标,已是一个标准排列. 而它们所在列的下标构成的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n$,这个排列的逆序数

$$\tau[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

故
$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot a_1a_2\cdots a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n.$$

例 11 试求 $f(x)$ 中 x^4 的系数,已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解一 $f(x)$ 中含 x 为因子的元素,有

$$a_{11}=-x,\quad a_{21}=x,\quad a_{23}=2x,\quad a_{32}=x,\quad a_{35}=3x,\quad a_{44}=x,\quad a_{52}=-7x.$$

因而,含有 x 为因子的元素 a_{ij_i} 的列下标取

$$j_1=1;j_2=1,3;j_3=2,5;j_4=4;j_5=2.$$

于是,含 x^4 的项中元素 a_{ij_i} 的列下标只能取

$$j_1=1,j_2=3,j_3=2,j_4=4 \text{ 与 } j_2=1,j_3=5,j_4=4,j_5=2.$$

相应的五元排列只有 13245,31542. 含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$
$$(-1)^{\tau(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$
故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

解二 将 $f(x)$ 化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式，于是将这些元素相乘，即可求出 x^4 的系数. 为此将 $a_{21}=x$ 及 $a_{32}=x$ 变成零元素，得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -6/7 & 0 & 3/7 & 27/7 & 3x+2/7 \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

x^4 的系数是下列两项系数的和：

$$(-1)^{\tau(13542)}(-x)\cdot 1\cdot(3x)\cdot x\cdot(-7x)=21x^4,$$
$$(-1)^{\tau(13542)}(-x)\cdot(2x)\cdot(2/7)\cdot x\cdot(-7x)=4x^4,$$

故所求系数为 $21+4=25$.

解三 将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式. 为此，将 $f(x)$ 的第 1 行加到第 2 行、第 5 行加上第 3 行的 7 倍，再将所得行列式的第 5 列减去第 2 列的 3 倍，最后将新行列式的第 2,3 行对调，得到

$$f(x)=-\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix}.$$

含 x^4 的两项分别为

$$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot(2x)\cdot x\cdot 2,$$
$$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot(21x),$$

故 $f(x)$ 中含 x^4 的系数为 $4+21=25$.

1.2 行列式的性质

一、内 容 提 要

行列式有六条性质及其相关推论，掌握好这六条性质是熟练计算行列式的关键.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

推论 2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 5 若行列式 D 的某一列(行)的元素都是两数之和(例如第 i 列的元素都是两数之和),

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数,然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

由定义知,行列式是一个代数和.所谓计算行列式就是计算行列式的值,利用行列式性质可以简化行列式的计算.

二、释 疑 解 惑

问题 1 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}=0.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-3.$$

问题 2 求方程 $\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}=0$ 的根.

解 $\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4+\lambda & 1 & 1 & 1\\ 4+\lambda & 1+\lambda & 1 & 1\\ 4+\lambda & 1 & 1+\lambda & 1\\ 4+\lambda & 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}$

$$=(4+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(4+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(4+\lambda)\lambda^3=0,$$

故方程的根为 $\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$.

三、典型例题解析

例 1 计算下列行列式：

(1) $D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 5 & 7\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$； (2) $D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$.

解 (1) 利用消元性质，将第 1 行的 -1 倍加到第 2,3,4 行上，再由第 2,3 行成比例，得

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 3 & 9 & 19\end{vmatrix}=0.$$

(2) **分析** 此题属低阶行列式的计算. 由于行列式除次对角线上的元素全为 0 外，其余元素均为 1，可据此特点化为上(或下)三角行列式，或利用各行(列)和都是 3 来化为三角行列式.

解一 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_4+r_2+r_3}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=-3.$$

解二 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$