重点·热点·易错点·思想方法

一线高考名师近20年**心血之作** 高考数学热点难点易错点**一本通**

高考数学
90天满分冲关

考点、重点、热点问题全破解

王义俊◎著

高考数学全力冲刺必备

90天轻松赢得高分

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

重点•热点•易错点•思想方法

一线高考名师近20年**心血之作** 高考数学热点难点易错点**一本通**

高考数学90天满分冲关

考点、重点、热点问题全破解

王义俊◎著

高考数学全力冲刺

90天轻松赢得高分

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE
北 京

图书在版编目（CIP）数据

高考数学 90 天满分冲关：考点、重点、热点问题全破解/王义俊著．
北京：中国经济出版社，2013.3
ISBN 978-7-5136-2158-8
Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①中学数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.①G634.603
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 283626 号

责任编辑　崔姜薇
责任审读　霍宏涛
责任印制　张江虹
封面设计　任燕飞装帧设计工作室

出版发行　中国经济出版社
印 刷 者　北京市人民文学印刷厂
经 销 者　各地新华书店
开　　本　889mm×1194mm　1/16
印　　张　11.25
字　　数　280 千字
版　　次　2013 年 3 月第 1 版
印　　次　2013 年 3 月第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5136-2158-8/G·1939
定　　价　30.00 元

中国经济出版社 **网址** www.economyph.com **社址** 北京市西城区百万庄北街 3 号 **邮编** 100037
本版图书如存在印装质量问题，请与本社发行中心联系调换（联系电话：010-68319116）

　服务热线：010-68344225　88386794

目　录

第一章　重点篇

第二章　热点篇

第三章　易错篇

第四章 思想方法篇

第一章　重点篇

学好集合概念应注意的几个问题

集合是学生进入高中学习数学所接触的第一个重要的基本概念，而且比较抽象，要真正地理解并掌握它，必须注意以下几个问题.

一、理解集合中元素的特征

(1)确定性　即集合中的元素必须是确定的，任何一个对象，要么是这个集合的元素，要么不是这个集合的元素，二者必居其一. 例如："很小的数"、"某班个子较高的同学"等，所涉及的对象并没有一个确定的标准，即不具有确定性，因而都不能视为集合.

(2)互异性　即集合中任意两个元素都是互不相同的，相同的元素在集合中只能出现一次. 例如：$\{1,2,3,1\}$，这样的表示法是错误的，应该表示为：$\{1,2,3\}$.

(3)无序性　即集合中的元素是没有顺序要求的，对元素相同但顺序不同的集合视为相同的集合. 例如：$\{1,2,3\}$与$\{2,1,3\}$、$\{3,1,2\}$等都是相同的集合.

二、正确掌握表示集合的方法

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法两种.

列举法是指把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，用列举法表示集合时，首先要注意集合的元素具有怎样的形式. 例如：集合 $\{a,b\}$ 与$\{(a,b)\}$ 是不同的集合，前者是由 a、b 这两个元素所构成的集合，而后者则是由一个实数对 (a,b) 为元素所构成的集合，是单元素集合.

描述法是指把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，描述法有两种形式：(1)语言描述法：即把集合中元素的共同属性用语言描述出来，写在大括号内的形式. 例如：{偶数}、{正方形}等. (2)代表元素描述法：即把集合表示为$\{x\mid p(x)\}$的形式，其中竖线前面的 x 叫代表元素，竖线后面的 $p(x)$ 则表示代表元素所满足的属性. 例如：不等式 $2x+3>1$ 的解集可表示为 $\{x\mid 2x+3>1\}$.

三、注意代表元素的区别

在用描述法的第二种形式——代表元素描述法表示集合时，要特别注意代表元素的不同，所表示的集合也往往不同. 例如：$\{y\mid y=x^2\}$表示二次函数 $y=x^2$ 的因变量 y 的取值的集合，而 $\{x\mid y=x^2\}$则表示自变量 x 的取值的集合，换言之，$\{y\mid y=x^2\}$表示二次函数 $y=x^2$ 的值域，而 $\{x\mid y=x^2\}$则表示二次函数 $y=x^2$ 的定义域.

四、正确使用"$\in$"、"$\subseteq$"等符号

"$\in$"、"$\subseteq$"有着不同的意义，必须注意它们之间的区别. "$\in$"一般用来表示元素与集合之间的从属关系，例如：a 是集合 A 的元素，记为 $a\in A$；而"$\subseteq$"则表示集合与集合之间的包含关系. 例如：集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，记为 $A\subseteq B$.

五、分清 0、{0}、 Φ 、{ Φ }的意义

这四者有着本质的区别：(1)0 是一个数，而不是集合，{0}、Φ、{ Φ }都是集合并且 0 是集合{0}的元素；(2) Φ 表示一个空集，不含任何元素，而{ Φ }是以 Φ 为元素的集合，是一个单元素的集合，且 $\Phi \neq \{\Phi\}$.

对数性质"同正异负"的运用

所谓"同正异负"性质是指在对数函数 $y=\log_a x$ 中，对于两个范围 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 而言，如果 a、x 在同一范围时，则函数值 $y>0$；如果 a、x 不在同一范围时，则函数值 $y<0$. 这一性质运用广泛，现例析如下.

一、比较大小

例 1 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则(　　)

A. $0<a<b<1$　　B. $0<b<a<1$　　C. $a>b>1$　　D. $b>a>1$

解析：由异范围得负，知 a、$b\in(0,1)$，排除 C、D；又 $y=\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$ 在$(0,1)$内是减函数，于是有 $0<b<a<1$，故选 B.

二、求定义域

例 2 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$ 的定义域.

解析：要使函数有意义，需 $\log_{\frac{1}{2}}(2-x)>0$，由同范围得正，知 $0<2-x<1$，即 $1<x<2$，故所求函数的定义域为$(1,2)$.

三、求值域

例 3 求函数 $y=2+\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$ 的值域.

解析：因为 $x^2+1\geqslant 1$，由异范围得负，知 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)\leqslant 0$，则 $2+\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)\leqslant 2$，故所求函数的值域为 $(-\infty,2]$.

四、求参数的取值范围

例 4 若定义在区间$(-1,0)$内的函数 $y=\log_{2a}(x+1)$满足 $y>0$，则 a 的取值范围为(　　)

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(0,+\infty)$

解析：因为 $-1<x<0$，则 $0<x+1<1$. 由同范围得正，知 $0<2a<1$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$，故选 A.

点击指数运算中的三大技巧

学习指数内容时，除了要熟练掌握指数的概念和有理数指数幂的运算性质外，还必须掌握其运算

的常用技巧，才能达到巩固知识，提高能力的目的，为此，本文将指数运算中的三大技巧点击如下，供学习时参考.

一、整体代入

例1 已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，求下列各式的值：(1) $a+a^{-1}$；(2) a^2+a^{-2}；(3) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-3}{a^2+a^{-2}-2}$.

解析：(1) $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2=3^2-2=7$

(2) $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=7^2-2=47$

(3)由(2)得 $a^2+a^{-2}=47$，又将 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ 两边立方得 $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=18$，所以 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-3}{a^2+a^{-2}-2}=\dfrac{18-3}{47-2}=\dfrac{1}{3}$

点评：本题运用了整体思想的方法，合理配凑寻求联系，使问题得以巧妙解决.

二、整体设元

例2 若 $S=(1+2^{-\frac{1}{32}})(1+2^{-\frac{1}{16}})(1+2^{-\frac{1}{8}})(1+2^{-\frac{1}{4}})(1+2^{-\frac{1}{2}})$，则 $S=(\quad)$

A. $\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$ B. $(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$ C. $1-2^{-\frac{1}{32}}$ D. $\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})$

解析：令 $2^{-\frac{1}{32}}=a$，则 $S=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})$，因为 $1-a\neq 0$，

所以 $(1-a)S=[(1-a)(1+a)](1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})$

$$=[(1-a^2)(1+a^2)](1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})$$

$$=[(1-a^4)(1+a^4)](1+a^8)(1+a^{16})$$

$$=\cdots=1-a^{32}=1-2^{-1}=\frac{1}{2}$$

故 $S=\frac{1}{2}(1-a)^{-1}=\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$，即答案选 A.

点评：本题巧妙地运用了 $2^{-\frac{1}{32}},2^{-\frac{1}{16}},2^{-\frac{1}{8}},2^{-\frac{1}{4}},2^{-\frac{1}{2}}$ 之间的关系，即 $2^{-\frac{1}{2}}=(2^{-\frac{1}{4}})^2=(2^{-\frac{1}{8}})^4=(2^{-\frac{1}{16}})^8=(2^{-\frac{1}{32}})^{16}$，用整体设元思想，避免了繁杂的分数指数幂的运算，并且运用了乘法公式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

三、引入参数

例3 已知 $ax^3=by^3=cz^3$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，试问：$(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{3}}$ 与 $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ 相等吗？

解析：设 $ax^3=by^3=cz^3=k$，则 $ax^2=\frac{k}{x},by^2=\frac{k}{y},cz^2=\frac{k}{z}$，

于是 $(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{3}}=(\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z})^{\frac{1}{3}}=[k(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})]^{\frac{1}{3}}=k^{\frac{1}{3}}$.

而 $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}=(\frac{k}{x^3})^{\frac{1}{3}}+(\frac{k}{y^3})^{\frac{1}{3}}+(\frac{k}{z^3})^{\frac{1}{3}}=\mathrm{k}^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=\mathrm{k}^{\frac{1}{3}}$，

所以 $(\mathrm{ax}^2+\mathrm{by}^2+\mathrm{cz}^2)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$.

点评：本题在引入参数 k 后，对 $(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{3}}$ 与 $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ 同时进行了化简，在化简的基础上再确定是否相等.

总之，在指数的有关运算中，除了熟练掌握指数幂的运算性质以外，还必须熟练掌握乘法公式以及常用的运算技巧，只有这样，才能够做到举一反三、触类旁通的程度.

例谈函数解析式的五种求法

函数的解析式对于研究函数的图象与性质有着非常重要的作用，为此本文结合具体例题谈谈有关函数解析式的五种求法，供同学们学习时参考.

一、定义法

抓住函数的定义来求函数解析式的方法，叫定义法.

例 1 已知函数 $y=(m-2)x^{m^2-3}+m$ 是一次函数，求其解析式.

解析：由一次函数定义知 $m^2-3=1, m-2\neq 0$，$\therefore m=-2$，故所求函数的解析式为 $y=-4x-2$.

点评：利用定义求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式时，要注意 $k\neq 0$，如本例中应使得 $m-2\neq 0$.

二、待定系数法

在解决某些问题时，常用一些字母来表示需要确定的系数，然后根据一些条件来确定这些系数的数学思维方法叫待定系数法.

例 2 (1)已知一次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=5$，且其图象过点 $(-2,1)$，求 $f(x)$；

(2)已知二次函数 $g(x)$ 满足 $g(1)=1$，$g(-1)=5$，且其图象过原点，求 $g(x)$.

解析：(1)由题意设 $f(x)=ax+b$ ($a\neq 0$)，则由 $f(0)=5$，且图象过点 $(-2,1)$，

得 $\begin{cases} b=5 \\ -2a+b=1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$ $\therefore f(x)=2x+5$.

(2)由题意设 $g(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)，则由 $g(1)=1$，$g(-1)=5$，且图象过原点，

得 $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=5 \\ c=0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$ $\therefore g(x)=3x^2-2x$.

点评：已知函数类型，求函数解析式，常用待定系数法，其基本步骤是：设出函数的一般式，代入已知条件，通过解方程(组)来确定未知系数.

三、换元法

解题时，把某个式子看成一个整体，用一个变量去代替它，从而使问题得到简化的这种数学方法，叫换元法.

例 3 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)=2x^2+1$，求 $f(x)$ 的解析式.

解析：令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，

$\therefore f(t)=2(t+1)^2+1=2t^2+4t+3$，$\therefore f(x)=2x^2+4x+3$.

点评：本题也可以从已知式子的右边配凑出含有 $x-1$ 的式子，然后用一个新的变量 t 来替代 $x-1$，从而求出 $f(x)$ 的解析式.

四、解方程组法

若已知式是由两个互为倒数的变量的函数关系式组成，常采用解方程组的方法来求函数解析式，

即依据倒数的关系，重新产生一个关于两个互为倒数的变量的等式，再联立消去的方法.

例4 已知$\sqrt{3}f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$，求 $f(x)$ 的解析式.

解析：将$\sqrt{3}f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$①中的所有$x$换为$\frac{1}{x}$，得$\sqrt{3}f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^2$②，由①②消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$得$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}$.

点评：这种求函数解析式的方法，有时也称"消参数法"，即联立方程组消去参数$f\left(\frac{1}{x}\right)$，从而得到$f(x)$的方法.

五、赋值法

在求函数解析式时，把自变量赋予特殊的值以减少变量个数来求函数解析式的数学方法，叫赋值法.

例5 已知$f(0)=1, f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$，求$f(x)$的解析式

解析：令$a=0$，则$f(-b)=f(0)-b(-b+1)$，即$f(-b)=b^2-b+1$，再令$-b=x$，得$f(x)=x^2+x+1$.

点评：等式中含有两个未知量，令其中一个未知量为某些特殊值，就可以使等式减少一个变量，从而达到求解的目的.

以上谈到的5种方法，是求函数解析式的最常用最基本的方法，是学习其他方法的基础，请同学们务必牢固掌握.

聚焦异面直线所成角的两种常用求法

异面直线所成的角是立体几何中的一个重要概念，是学生学习的难点，也是高考考查的重点，为此，本文为了帮助学生克服难点，突出重点，就异面直线所成角的两种常用求法例谈如下，供同学们学习时参考.

一、平移法

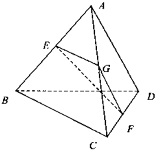
所谓平移法，就是根据异面直线所成的角的概念，把异面直线所成的角平移成相交直线所成的角，即把空间问题转化为平面问题，最终把这个角放在某个三角形中，通过解三角形的方法来求出这个角. 其关键是平移点的选择及平移面的确定，而平移点则通常选择在其中一条直线上的特殊位置上，但有时选在空间适当位置会更简便；平移面则通常是过两异面直线中某一条直线的一个平面，有时还要根据平面基本性质将直观图中的部分平面进行必要的伸展.

例1 （如图）点A是$\triangle BCD$所在平面外一点，$AD=BC$，E、F分别是AB、CD的中点，且$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，求异面直线AD和BC所成的角.

解析：设G是AC的中点，连接EG、FG，因E、F分别是AB、CD的中点，故$EG \parallel BC$且$EG=\frac{1}{2}BC$，$FG \parallel AD$，且$FG=\frac{1}{2}AD$，由异面直线所成角的概念可知EG与FG所成的锐角或直角为异面

直线 AD、BC 所成角，即 $\angle EGF$ 或其补角为所求. 由 $BC=AD$ 知 $EG=GF=\frac{1}{2}AD$，又因 $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，由余弦定理可得 $\cos\angle EGF=0$，即 $\angle EGF=90^\circ$.

点评：本题的平移点是 AC 中点 G，按概念过 G 分别作出了两条异面直线的平行线，然后在△EFG 中求角. 通常在出现线段中点时，常取另一线段中点，以构成中位线，既可用平行关系，又可用线段的倍半关系，这是解题的规律所在，务必熟练掌握.



二、补形法

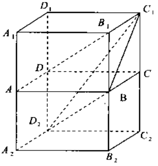
所谓补形法，就是在运用平移法找异面直线所成角比较困难的情况下，可以通过补一个全等的几何体来找这个角，根据题意，通常补的几何体是长方体或正方体，其实质也是一种平移，但习惯把这种平移叫补形，所以这种找异面直线所成角的方法就叫补形法.

例 2 （如图）长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 $AB=BC=3$，$AA_1=4$，求异面直线 B_1D 与 BC_1 所成角的余弦值.

解析：如图，以四边形 $ABCD$ 为上底补接一个高为 4 的长方体 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$，连接 D_2B，则 $DB_1 /\!/ D_2B$，∴$\angle C_1BD_2$ 或其补角就是异面直线 DB_1 与 BC_1 所成的角，连接 C_1D_2，则在 $\triangle C_1BD_2$ 中，分别求出 $C_1D_2=\sqrt{C_1C_2^2+C_2D_2^2}=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}$，同理 $C_1B=5$，$BD_2=\sqrt{34}$，再由余弦定理得 $\cos\angle C_1BD_2=\frac{BC_1^2+BD_2^2-C_1D_2^2}{2BC_1\cdot BD_2}=-\frac{7\sqrt{34}}{170}$，

∴$\angle C_1BD_2$ 的补角是异面直线 DB_1 与 BC_1 所成的角，

∴ 异面直线 DB_1 与 BC_1 所成的角的余弦值为$\frac{7\sqrt{34}}{170}$.



点评：本题如果采用平移法，则需要延展平面，这一点对学生来说比较困难，所以自然联想到采用补形的方法来找这个角，“补形法”是立体几何中一种常见的方法，通过补形，可将问题转化为易于研究的几何体来处理.

总之，求异面直线所成的角，不管采用哪种方法，都需要注意三个问题：①选择适当的点，平移异面直线中的一条或两条成为相交直线，这里的点通常选择特殊位置的点；②求相交直线所成的角，通常是在相应的三角形中进行；③因为异面直线所成的角 θ 的范围是 $0^\circ<\theta\leqslant 90^\circ$，所以在三角形中求得角为钝角时，应取它的补角作为异面直线所成的角.

例析直线斜率的三种求法

直线的斜率是直线方程中的重要概念，是建立直线方程的基础，也是研究直线与直线、直线与曲线之间位置关系的基础，因此必须在理解斜率概念的基础上，熟练掌握斜率的三种求法.

一、定义法

倾斜角不是 90° 的直线，它的倾斜角的正切叫作这条直线的斜率，常用 k 表示，即 $k=\tan$

$a(\alpha \neq 90^\circ)$，其取值范围是$(-\infty,+\infty)$.

例1 一条直线经过点$P(3,2)$，并且其倾斜角是直线$x-4y+3=0$的倾斜角的2倍，求直线方程.

分析：要求直线的方程，关键是求直线的斜率，而本题是运用斜率的定义，结合正切的二倍角公式求出斜率的，再运用点斜式求出直线方程.

解：设所求直线倾斜角为θ，已知直线的倾斜角为α，则$\theta=2\alpha$，且$\tan\alpha=\frac{1}{4}$，$\tan\theta=\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{8}{15}$，由点斜式，得所求直线的方程为$8x-15y+6=0$.

二、公式法

已知直线过两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，且$x_1\neq x_2$，则斜率$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

例2 已知两点$A(-1,2)$、$B(m,3)$，求直线AB的斜率k.

分析：因为B点的横坐标含有参数m，所以在求斜率前，必须对参数m进行讨论.

解：(1)当$m=-1$时，直线AB的斜率不存在；

(2)当$m\neq-1$时，由两点的斜率公式得$k=\frac{1}{m+1}$.

三、方向向量法

设$F_1(x_1,y_1)$、$F_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$是直线上不同的两点，则向量$\overrightarrow{F_1F_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$称为直线的方向向量. 向量$\frac{1}{x_2-x_1}\overrightarrow{F_1F_2}=(1,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})=(1,k)$也是该直线的方向向量，$k$是直线的斜率.

所以，若$a=(m,n)(m\neq0)$为直线的方向向量，则直线的斜率$k=\frac{n}{m}$.

例3 已知直线$l_1:x-2y+3=0$，那么直线l_1的方向向量$\vec{a_1}$为________(注：只需写出一个正确答案即可)；l_2过点$(1,1)$，并且l_2的方向向量$\vec{a_2}$与$\vec{a_1}$满足$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0$，则$l_2$的方程为________.

分析：直线l_2的斜率可以通过向量$\vec{a_2}$的纵坐标除以横坐标来求.

解：由方向向量定义即得$\vec{a_1}$为$(2,1)$或$(1,\frac{1}{2})$.

$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0$，即$\vec{a_1}\perp\vec{a_2}$. 也就是$l_1\perp l_2$，即$k_1\cdot k_2=-1$.

再由点斜式可得l_2的方程为$2x+y-3=0$. 故所填答案为：$(2,1)$或$(1,\frac{1}{2})$；$2x+y-3=0$.

以上介绍的求直线斜率的3种方法，要能够在具体问题中灵活运用，定义法主要适用于直线的倾斜角或倾斜角的某一三角函数值已知；公式法适用于直线有斜率且直线上的两点坐标已知；而方向向量法则适用于直线的方向向量已知.

斜二测画法的三大运用

斜二测画法是立体几何的重要内容，是初学者务必掌握的画图技能，画图的准确直观对解决问题

往往有一定的帮助.下面首先回顾一下斜二测画法的规则和特点.

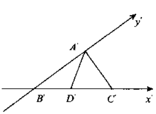
斜二测画法的规则是:①在已知图形中取互相垂直的轴 ox、oy,而在直观图中分别画成对应的轴 $o'x'$、$o'y'$,使$\angle x'o'y'=45°$(或 135°),它们确定的平面表示水平平面;②已知图形中平行于 ox 轴或 oy 轴的线段在直观图中分别画成平行于 $o'x'$ 轴或 $o'y'$ 的线段;③已知图形中平行于 x 轴的线段,在直观图中保持原长度不变;平行于 y 轴的线段,在直观图中长度为原来的一半.

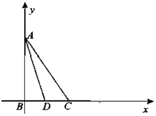
其特点:①原图上共点线(或共线的点)在直观图上仍共点(或共线);②原图中平行的线段在直观图上仍然平行.

根据斜二测画法的规则和特点,本文就斜二测画法的 3 大运用例析如下,供读者参考.

一、解决长度问题

例 1 如图,$\triangle A'B'C'$是水平放置的$\triangle ABC$ 的直观图,则在$\triangle ABC$ 的三边及中线 AD 中,哪一条线段最长?





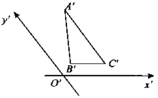
解析:由斜二测画法的规则和特点,可以逆推水平放置的原来$\triangle ABC$ 的图形,从而不难得出在$\triangle ABC$ 的三边及中线 AD 中,边 AC 最长.

点评:本题主要抓住直观图中$\angle A'B'C'=45°$,逆推出原$\triangle ABC$ 为直角三角形,且$\angle ABC=90°$,从而问题得到解决.

二、解决角度问题

例 2 如图所示的直观图所表示的平面图形是(　　)

A. 正三角形　　B. 锐角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 直角三角形

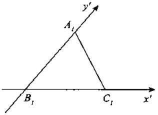


解析:由斜二测画法的规则①和特点②,即$\angle x'o'y'=135°$和 $A'C'\parallel o'y'$得原$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,故选 D.

点评:本题主要抓住直观图中$\angle x'o'y'=135°$和 $A'C'\parallel O'y'$,得$\angle A'C'B'=45°$,逆推出原$\triangle ABC$ 为直角三角形,且$\angle ACB=90°$,从而问题得到解决.

三、解决面积问题

例 3 如图,用斜二测画法作$\triangle ABC$ 水平放置的直观图形得$\triangle A_1B_1C_1$,其中 $A_1B_1=B_1C_1=2$,则原$\triangle ABC$ 的面积为________.



解析:由斜二测画法的规则和特点,可以逆推出水平放置的原来$\triangle ABC$ 为直角三角形,且直角边$AB=4$,$BC=2$,所以原$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$.

点评:本题主要抓住直观图中$\angle A_1B_1C_1=45°$,逆推出原$\triangle ABC$ 为

直角三角形，且$\angle ABC = 90°$，同时由$A_1B_1=B_1C_1=2$，，逆推出原$\triangle ABC$中，$AB=4$，$BC=2$，从而问题得到解决.

总之，要顺利地运用斜二测画法解决问题，就必须熟练地掌握好斜二测画法的规则和特点，最终达到正反运用得心应手、灵活自如的境界.

巧凑角　妙解题

学习两角和与差的三角函数时，如能巧妙地进行凑角，整体地运用已知角的三角函数值进行解题，将会收到事半功倍之效果，下面结合例题谈谈凑角解题的几种情况，供同学们学习时参考.

一、凑角求值

例 1　已知$\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{12}{13}$，则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$________.

解：$\because\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，$\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{12}{13}$，

$\therefore\alpha+\beta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，$\beta-\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$\cos(\beta-\frac{\pi}{4})=-\frac{5}{13}$，

$\therefore\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos[(\alpha+\beta)-(\beta-\frac{\pi}{4})]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\frac{\pi}{4})+\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\frac{\pi}{4})$

$$=\frac{4}{5}\cdot(-\frac{5}{13})+(-\frac{3}{5})\cdot\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}.$$

点评：本题的常规解法是：直接利用两角和的余弦公式展开$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，再根据条件求出$\cos\alpha$，$\sin\alpha$代入得出结果，但是这种解法不仅运算烦琐，而且容易出错；而运用凑角的方法：$\alpha+\frac{\pi}{4}=(\alpha+\beta)-(\beta-\frac{\pi}{4})$，整体利用已知条件，不仅没有烦琐的运算，而且巧妙地解决了问题.

例 2　设$\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})=-\frac{1}{9}$，$\sin(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{2}{3}$，且$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$的值.

分析：观察所求角和已知角，凑得$\frac{\alpha+\beta}{2}=(\alpha-\frac{\beta}{2})-(\frac{\alpha}{2}-\beta)$角，再由两角差的余弦公式求解.

解：$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，$\frac{\alpha}{2}-\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos[(\alpha-\frac{\beta}{2})-(\frac{\alpha}{2}-\beta)]$

$$=\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)+\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\alpha}{2}-\beta)$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}.$$

二、凑角化简

例 3 化简 $\tan(18^\circ-x)\tan(12^\circ+x)+\sqrt{3}[\tan(18^\circ-x)+\tan(12^\circ+x)]$.

解析：$\because (18^\circ-x)+(12^\circ+x)=30^\circ$，$\therefore \tan[(18^\circ-x)+(12^\circ+x)]=\tan 30^\circ$，

$\therefore \dfrac{\tan(18^\circ-x)+\tan(12^\circ+x)}{1-\tan(18^\circ-x)\tan(12^\circ+x)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \tan(18^\circ-x)+\tan(12^\circ+x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}[1-\tan(18^\circ-x)\tan(12^\circ+x)]$，

$\therefore$原式$=\tan(18^\circ-x)\tan(12^\circ+x)+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}[1-\tan(18^\circ-x)\tan(12^\circ+x)]=1$.

点评：本题不仅涉及凑角$(18^\circ-x)+(12^\circ+x)=30^\circ$，还涉及两角和的正切公式的变用，即直接可以利用 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$解题.

三、凑角证明

例 4 已知 $\sin y=m\sin(2x+y)(m\neq 1)$，求证：$\tan(x+y)=\dfrac{1+m}{1-m}\tan x$.

分析：已知条件中的角 y，$2x+y$ 可以分别凑为所证式中角 $x+y$ 和 x 的和、差形式，即 $y=(x+y)-x$，$2x+y=(x+y)+x$.

证明：由 $\sin y=m\sin(2x+y)$，得 $\sin[(x+y)-x]=m\sin[(x+y)+x]$，运用两角和与差的正弦公式展开得，$\sin(x+y)\cos x-\cos(x+y)\sin x=m[\sin(x+y)\cos x+\cos(x+y)\sin x]$，整理得$(1-m)\sin(x+y)\cos x=(1+m)\cos(x+y)\sin x$，因为 $m\neq 1$，且 $\cos(x+y)\neq 0$，$\cos x\neq 0$，所以 $\tan(x+y)=\dfrac{1+m}{1-m}\tan x$.（如果 $\cos(x+y)=0$，$\cos x=0$，则 $\tan(x+y)$和 $\tan x$ 无意义）

任意角三角函数定义的四大运用

任意角三角函数的定义是整个高中三角知识体系的基础，它不仅是学习诱导公式、同角三角函数基本关系式以及三角函数的性质的基础，而且运用它，还可以很方便地求出一些特殊角的三角函数值、判断三角函数值的符号、证明恒等式以及求线段的长等，下面就这四大方面的运用例谈如下.

一、求三角函数值

例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(4a,-3a)(a\neq 0)$，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

分析：由于 α 的终边经过点 $P(4a,-3a)(a\neq 0)$，$r=\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}=5|a|$，由任意角的三角函数定义，可求出 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$，并进一步求出 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

解：$\because r=\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}=5|a|$，

$\therefore$当 $a>0$ 时，$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore 2\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{2}{5}$；

同理，当 $a<0$ 时，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$.

点评：本题属于任意角三角函数定义的直接运用，解题时，需要注意的是：对字母参数 a 进行分类讨论，否则容易漏解．

二、判断三角函数符号

例 2　判断下列三角函数式的符号：

(1) $\dfrac{\sin330^\circ\cdot\tan53^\circ}{\cos235^\circ\cdot\tan145^\circ}$；(2) $\sin3\cdot\cos4\cdot\tan5$．

分析：正确判断出每个角所在的象限是解决这类问题的关键．

解：(1) ∵ $330^\circ,53^\circ,235^\circ,145^\circ$ 分别为第四、第一、第三、第二象限角，

∴ $\sin330^\circ<0,\tan53^\circ>0,\cos235^\circ<0,\tan145^\circ<0$ 从而 $\dfrac{\sin330^\circ\cdot\tan53^\circ}{\cos235^\circ\cdot\tan145^\circ}<0$

(2) ∵ 3,4,5 弧度分别为第二、第三、第四象限角，∴ $\sin3>0,\cos4<0,\tan5<0$ 从而 $\sin3\cdot\cos4\cdot\tan5>0$

点评：对于判断像 1,2,3,4 等弧度角所在的象限时，要注意将它们与 $\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3}{2}\pi,2\pi$ 等进行比较，这样方便判断．

三、证明三角恒等式

例 3　证明：$\dfrac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$．

分析：证明此恒等式可采用多种方法，但运用任意角三角函数定义是最基本最直接的方法．

解：设 α 角的顶点在坐标原点 o，始边为 x 轴非负半轴，终边过点 $P(x,y)$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则由任意角三角函数定义，得 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r},\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$．

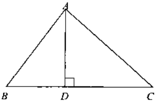
所以，左边 $=\dfrac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{2\left(\frac{x}{r}-\frac{y}{r}\right)}{1+\frac{y}{r}+\frac{x}{r}}=\dfrac{2\left(\frac{x-y}{r}\right)}{1+\frac{y}{r}+\frac{x}{r}}=\dfrac{2(x-y)}{r+y+x}$，

右边 $=\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\frac{x}{r}}{1+\frac{y}{r}}-\dfrac{\frac{y}{r}}{1+\frac{x}{r}}=\dfrac{x}{r+y}-\dfrac{y}{r+x}=\dfrac{(x-y)(r+x+y)}{(r+y)(r+x)}$．

若 $x=y$，则原式显然成立；若 $x\neq y$，则由 $\dfrac{2}{r+y+x}=\dfrac{(r+x+y)}{(r+y)(r+x)}$，[因为 $(r+x+y)^2-2(r+x)(r+y)=r^2+(x+y)^2+2r(x+y)-2r^2-2r(y+x)-2xy=0$，要用到 $x^2+y^2=r^2$]得原式也成立，故原式得证．

点评：在进行三角恒等式的证明时，一般可以直接运用诱导公式和同角三角函数的基本关系式来证明，但诱导公式和同角三角函数的基本关系式是由任意角三角函数定义导出的，所以可以这样说：凡是三角恒等式的证明都可以运用任意角三角函数的定义来证明．

四、求线段的长



例 4　如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $BC=1+\sqrt{3}$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=45^\circ$，求 AB 的长．

分析：可以过 A 点作 BC 的垂线交于 D 点，构造直角三角形，再根