

大學叢書

投資數學

下冊

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書
投資數學

下冊

褚鳳儀著

(增訂本)

商務印書館發行

中華民國二十五年一月初版
中華民國二十九年八月增訂十四版

（15352平）

大學叢書
（教本）投資數學 二冊

裝平 每部定價國幣貳拾元

印刷地點外另加運費

著 者 褚 鳳 儀

發 行 人 朱 經 農
上海河南中路

印 刷 所 商務印書館
印刷書廠

發 行 所 商務印書館
各地

版 翻
權 印
所 必
有 究

第七編 債券

第一章 債券之發行

第一節 債券之意義及其種類

債券(Bonds)者,政府或公司向公衆借款而發行之債務證券也。政府發行之債券,名曰公債或庫券,而公司發行之債券則名曰公司債。我國各大公司之發行公司債者迄今猶未多見。然公債或庫券之發行以渡財政難關者,則幾無歲無之。庫券本爲國庫於青黃不接之時,向公衆融通資金之短期債券,故外國庫券之期限,通常均在一年以內,然我國財政部前所發行之庫券,其期限均在八九年以上。財政部所發行之按月償本付息之債券,均定名曰庫券,至其發行之公債,則指每半年抽籤償本之債券而言。

債券得分爲有擔保債券 (Mortgage Bond) 與無擔保債券 (Debenture Bond) 二種,公司之發行公司債,均以其財產作擔保,故公司債均屬於有擔保債券,政府發行之公債與庫券則不然,政府有強迫人民購買債券之權,故無提供擔保之必要,然政府有時不欲行使強迫權力,故有以一定稅收作爲債

券之擔保者，我國財政部所發行之統一公債與復興公債，即以關稅爲本息支付之擔保。

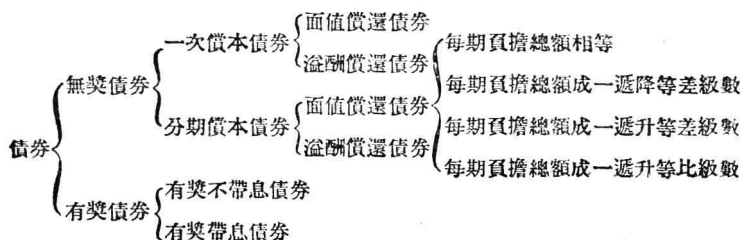
債券又有記名債券 (Registered Bond) 與不記名債券 (Bearer Bond) 之別，記名債券之上面，及發行機關之債券分戶帳上，均載明債券持票人之姓名，故移讓之手續較繁，不記名債券，憑券不憑人，故移讓時祇須交出債券可也。

債券又得就其償債之方式而分類。債券償債之方式甚多，大別之得分爲有獎債券與無獎債券二種，前者於中籤之債券，給以大小不等之獎額，而後者無之。

有獎債券又得分爲有獎帶息債券與有獎不帶息債券二種，前者於獎額以外，另給相當利息，而後者無之。

無獎債券亦有一次償本債券與分期償本債券，面值償本債券與溢酬償本債券之別。債券之本金規定一次償還者名曰一次償本債券，其規定分期償還者，則名曰分期償本債券。債券償本時，有按債券本金償還者，有於償還本金外，另加若干金額以爲酬報者，前者名曰面值償還債券，後者名曰溢酬償還債券。

分期面值償還之債券，又得就債券發行機關每期負擔總額之差異，而有種種償債之方式。債券發行機關每期負擔總額，有相等者，有依等差級數或等比級數而變動者。茲就主要償債公式，列表示之如下：



第二節 無獎債券

債券上書明之金額，名曰票面金額 (Par) 或面值 (Par Value or Face Value)，債券到期時償還之金額，名曰償還值 (Redemption Value)。償還值通常與面值相等，然有時發行債券機關欲引誘投資者之投資，將償還值略略提高，是曰溢酬償還 (Redemption at a Premium)，償還值超過面值之數，名曰溢酬 (Premium)，即為發行債券之機關對於投資者所增加之酬報；其依面值償還之方法，則名曰面值償還 (Redemption at Par)，故面值償還債券之償還值與面值相等。溢酬與面值之比，名曰溢酬率 (Rate of Premium)。本書債券問題中，除有特別說明外，均指面值償還債券而言。

債券上規定計算利息之利率，名曰債券利率 (Bond Rate)，債券利息依據面值計算，故與償還值無關。

債券本金若規定一次償還，則發行債券機關每期僅須支付利息，然若事前於償本一無準備，則借款到期時不得不另舉新債，以償舊債，故善理財者均於債券發行之始，按期籌

撥基金,以備借款到期時償本之需,此即第五編中所述之基金法是也.

(例一)債券票面總額一百萬元,規定十年後一次償本,問每年須提撥基金若干元,以備償本之需?(基金依實利率五釐投資)

- a) 面值償還,基金於每年末提撥;
- b) 面值償還,基金於每年初提撥;
- c) 溢酬率5%,基金於每年末提撥.

設 R 為每年提撥基金額

$$a) \quad 1000000 = Rs_{\overline{10}}$$

$$R = 1000000 \frac{1}{s_{\overline{10}}} = 79504.58 \text{ 元}$$

$$b) \quad 1000000 = Rs'_{\overline{10}}$$

$$1000000 = Rs_{\overline{10}} \times 1.05$$

$$\begin{aligned} \therefore R &= 1000000 \times \frac{1}{1.05} \times \frac{1}{s_{\overline{10}}} \\ &= 952380.95 \times 0.07950458 \\ &= 75718.65 \text{ 元} \end{aligned}$$

c) 溢酬率為5%,故償還總額為1050000元.

$$1050000 = Rs_{\overline{10}}$$

$$\begin{aligned} R &= 1050000 \frac{1}{s_{\overline{10}}} = 1050000 \times 0.07950458 \\ &= 83479.81 \text{ 元} \end{aligned}$$

若債券本金分期償還，而每期償本額相等，則每期應付利息隨負債額而遞減，故發行債券機關每期負擔總額，成一遞減等差級數。此項債券名曰均等償本債券 (Serial Bonds)。

(例二) 票面總額一百萬元，債券利率七釐，於五年內平均償還，作償本付息表！

償 本 付 息 表

年 別	負債餘額	利 息	償 本 額	負擔總額
第 一 年	\$1000000	\$ 70000	\$200000	\$270000
第 二 年	800000	56000	200000	256000
第 三 年	600000	42000	200000	242000
第 四 年	400000	28000	200000	228000
第 五 年	200000	14000	200000	214000

若債券本金分期償還，而每期負擔總額相等，則利息漸減而償本額漸增。此種債券名曰年金債券 (Annuity Bonds)。

(例三) 債券一萬張，每張票面金額一百元，債券利率七釐，分五年償還，每年負擔總額相等，求年賦金額，並作償本付息表！

設 R 爲年賦金額

應用公式 (a73)，得：

$$R = 1000000 \frac{1}{a_{\overline{5}|0.07}} = 243890.69 \text{ 元}$$

第一年	243890.69	負擔總額
	<u>-70000.00</u>	利息
	173890.69	償本額

但每張票面金額爲一百元,故第一年祇能償還本金
173800元,即收回債券1738張.

第二年	243890.69	負擔總額
	<u>+ 97.04</u>	上年餘額及其利息
	243987.73	
	<u>-57834.00</u>	債券8262張之利息
	186153.73	償本額

收回1861張

第三年	243890.69	負擔總額
	<u>+ 57.49</u>	上年餘額及其利息
	243948.18	
	<u>-44807.00</u>	債券6401張之利息
	199141.18	償本額

收回1991張

第四年	243890.69	負擔總額
	<u>+ 44.06</u>	上年餘額及其利息
	243934.75	
	<u>-30870.00</u>	債券4410張之利息
	213064.75	償本額

收回2130張

第五年	243890.69	負擔總額
	<u>+ 69.28</u>	上年餘額及其利息
	243959.97	
	<u>-15960.00</u>	債券2280張之利息
	227999.97	償本額

收回2280張

相差0.03元,此乃第三位小數四捨五入之故。

償本付息表

(1) 年別	(2) 負債餘額	(3) 償本付息總額	(4) 利息	(5) 償本額	(6) 收回張數	(7) 收回債券之票面總額	(8) 餘額	(9) 餘額所生之利息
第一年	\$1000000	\$143 90.69	\$70000	\$173890.69	1738	\$ 173800	\$90.69	\$3.35
第二年	826200	24398 .73	57834	186153.73	1861	186100	53.73	3.76
第三年	640100	243948.18	44807	199141.18	1991	199100	41.18	2.88
第四年	441000	243934.75	30870	213064.75	2130	213000	64.75	4.53
第五年	228000	24399.97 0.03	15960	227999.97 0.03	2280	228000	——	——
合計	3138200	1219721.35	219471	1000250.35	10000	1000000	250.35	17.52

上表之計算,可就各行合計,依照下列各式稽核之。

$$(2) \times \frac{7}{100} = (4)$$

$$(3) = 5 \times 243890.69 + 0.03 + (8) + (9)$$

$$(3) - (4) = (5)$$

$$(5) - (7) = (8)$$

$$(8) \times \frac{7}{100} = (9)$$

上法計算太繁，不適實際應用，故須另籌更簡捷之法以代之。吾人苟能求得每期收回債券張數，則償本付息表即不難製作。欲求每期收回債券張數，則以債券張數為單位，較為簡捷。設第一期收回債券 B 張，則負債額減少 B 張，故第二期付息額減少 Bi 張，換言之，第二期收回債券張數即增加 Bi 張而成 $B(1+i)$ 張。同理，第三期收回債券張數為 $B(1+i)^2$ ，第四期收回債券張數為 $B(1+i)^3$ ，簡言之，第 n 期收回債券張數為 $B(1+i)^{n-1}$ ，故各期收回債券張數可依次求得如下：

各期收回債券張數計算表

年賦金額	2438.91		
- 第一期付息額	700.00		
	1738.91	0.91 *	收回債券 1738 張
+ 7%	121.72		
	1860.63	1860.63	
		0.54	收回債券 1861 張
+ 7%	130.24		
	1990.87	1990.87	
		0.41	收回債券 1991 張
+ 7%	139.36		
	2130.23	2130.23	
		0.64	收回債券 2130 張
+ 7%	149.12		
	2279.35	2279.35	
		0.01	
		0.00	收回債券 2280 張

* 第一期實際償本額為 1738 張，而左方利息乃根據 1738.91 張計算，多算 0.91 張之利息，故餘額 0.91 張之利息，不再計算，以免重複。

上表中計算,可用下列二式稽核之.

$$2279.35 \times 1.07 = \text{年賦金額}$$

$$1738 + 1861 + 1991 + 2130 + 2280 = \text{發行債券張數}$$

各期收回債券張數求得後,償本付息表即可改作如下:

償 本 付 息 表

(1) 年 別	(2) 收回張數	(3) 償 本 額	(4) 年初負債餘額	(5) 付 息 額	(6) 償本付息總額
第 一 年	1738	\$ 173800	\$1000000	\$ 70000	\$ 243800
第 二 年	1861	186100	826200	57834	243934
第 三 年	1991	199100	640100	44807	243907
第 四 年	2130	213000	441000	30870	243870
第 五 年	2280	228000	228000	15960	243960
合 計	10000	1000000	3135300	219471	1219471

上表之計算,可就各行合計,依照下列各式稽核之.

$$(2) \times 100 = (3)$$

$$(3) + (5) = (6)$$

$$(4) \times \frac{7}{100} = (5)$$

有時債券票面金額分成數種,則計算每期收回債券張數,較為複雜,茲舉例說明之於下:

(例四) 債券總額一百萬元,各種債券票面金額及其張數,規定如下.

票面金額	張數
1000 元	200
500 元	600
100 元	4000
50 元	2000

債券利率七釐,分五年償還,每年負擔總額相等,試作償本付息表!

先求各種債券每年應收回張數.

a)票面金額 1000 元

$$200 \frac{i}{a_{\overline{5}|i}} = 48.78 \text{ 年賦金額}$$

票面 1000 元債券每年應收回張數計算表

年賦金額	48.78		
- 第一年付息額	14.00		
	34.78	0.78	收回債券 34 張
+ 7%	2.43		
	37.21	37.21	
		0.99	收回債券 37 張
+ 7%	2.60		
	39.81	39.81	
		0.80	收回債券 40 張
+ 7%	2.79		
	42.60	42.60	
		0.40	收回債券 43 張
+ 7%	2.98		
	45.58	45.58	
		0.02	
		0.00	收回債券 46 張

b) 票面金額 500 元

$$600 \frac{1}{a_{\overline{5}|}} = 146.33 \quad \text{年賦金額}$$

票面 500 元債券每年應收回張數計算表

年賦金額	146.33		
- 第一年付息額	<u>42.00</u>		
	104.33	0.33	收回債券 104 張
+ 7%	<u>7.30</u>		
	111.63	<u>111.63</u>	
		0.96	收回債券 111 張
+ 7%	<u>7.81</u>		
	119.44	<u>119.44</u>	
		0.40	收回債券 120 張
+ 7%	<u>8.36</u>		
	127.80	<u>127.80</u>	
		0.20	收回債券 128 張
+ 7%	<u>8.95</u>		
	136.75	136.75	
		<u>0.05</u>	
		0.00	收回債券 137 張

c) 票面金額 100 元

$$4000 \frac{1}{a_{\overline{5}|}} = 975.56 \quad \text{年賦金額}$$

票面 100 元債券每年應收回張數計算表

年賦金額	975.56		
- 第一年付息額	<u>280.00</u>		
	695.56	0.56	收回債券 695 張
+ 7%	<u>48.69</u>		
	744.25	<u>744.25</u>	
		0.81	收回債券 744 張
+ 7%	<u>52.10</u>		
	796.35	<u>796.35</u>	
		0.16	收回債券 797 張
+ 7%	<u>55.74</u>		
	852.09	<u>852.09</u>	
		0.25	收回債券 852 張
+ 7%	<u>59.65</u>		
	911.74	911.74	
		<u>0.01</u>	
		0.00	收回債券 912 張

$$d) \text{票面金額 } 50 \text{ 元} \quad 2000 \frac{1}{a_{\overline{51}}} = 487.78 \quad \text{年賦金額}$$

票面 50 元債券每年應收回張數計算表

年賦金額	487.78		
- 第一年付息額	140.00		
	347.78	0.78	收回債券 347 張
+ 7%	24.34		
	372.12	372.12	
		0.90	收回債券 372 張
+ 7%	26.05		
	398.17	398.7	
		0.07	收回債券 399 張
+ 7%	27.87		
	426.04	426.04	
		0.11	收回債券 426 張
+ 7%	29.82		
	455.86	455.86	
		0.03	
		0.00	收回債券 456 張

各種債券每年應收回張數求得後,再求全部債券每年應收回張數,以最小票面金額之債券張數為單位,則債券張數總額當為:

$$1000000 \div 50 = 20000$$

$$20000 \times \frac{1}{a_{\overline{51}}} = 4877.81 \quad \text{年賦金額}$$

全部債券每年應收回張數計算表
(以票面金額 50 元為標準)

年賦金額	4877.81		
- 第一年付息額	<u>1'00.00</u>		
	3477.81	0.81	收回債券 3477 張
+ 7%	<u>243.45</u>		
	3721.26	<u>3721.26</u>	
		0.07	收回債券 3722 張
+ 7%	<u>260.49</u>		
	3981.75	<u>3981.75</u>	
		0.82	收回債券 3981 張
+ 7%	<u>278.72</u>		
	4260.47	<u>4260.47</u>	
		0.29	收回債券 4261 張
+ 7%	<u>298.23</u>		
	4558.70	4558.70	
		0.01	
		<u>0.00</u>	回收債券 4559 張

全部債券總計算與各種債券分別計算求得每年償本總額，略有差異，故各種債券每年應收回張數，當設法校正之，以求符合。

各年收回債券張數校正表

年別	各種債券應收回張數				償本總額		校正金額	校正張數			
	1000元	500元	100元	50元	分別計算	全部計算		1000元	500元	100元	50元
第一年	31	104	695	347	\$172850	\$172850	\$41000	+1			
第二年	37	11	744	372	85500	186100	+600		+1	+1	
第三年	40	120	797	399	199650	199050	-600		-1	-1	
第四年	43	158	852	426	213500	213050	-450	-1	+1		+1
第五年	46	137	912	456	228500	227950	-550		-1		-1
合計	100	600	4000	2000	1000000	1000000	0	0	0	0	0

各年收回債券張數校正後,即可作償本付息表.

償 本 付 息 表

年別	各種債券收回張數				償本總額	年初負債餘額	利 息	償本付息總額
	1000元	500元	100元	50元				
第一年	35	04	695	347	\$ 173850	\$1000000	\$700000.00	243850.00
第二年	37	112	745	372	186100	826150	57830.50	243905.50
第三年	40	19	796	399	199050	640050	44803.50	243853.50
第四年	42	129	852	427	212050	441000	10870.00	243920.00
第五年	46	136	912	455	227950	227950	15956.50	243906.50
合計	200	600	4000	2000	1000000	3135150	219460.50	1219460.50

若發行債券機關每期負擔總額,預先規定,例如負債總額十分之一與全部債券利息之和,則有一期之負擔總額,與其他各期相異,而清償期限,須先求得.

(例五)債券一萬張,每張票面金額一百元,債券利率七釐,每年負擔總額規定為票面總額十分之一與全部債券利息之和,試作償本付息表!

a) 零數於最後一年支付;

b) 零數於最初一年支付.

$$10000 \times \frac{1}{10} + 10000 \times \frac{7}{100} = 1700 \text{ 張 年賦金額}$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 0.17$$