算學小叢書

代數學

冪法開法及無理虛數

林鶴一　矢田吉熊著
黃元吉譯

商務印書館發行

算學小叢書

代數學

冪法開法及無理虛數

林鶴一　矢田吉熊著
黃　元　吉　譯

商務印書館發行

中華民國十五年十二月初版
中華民國二十四年五月[redacted]第三版

周

(52574)

算學小叢書 代數學—冪法開法及無理數虛數一冊

每冊定價大洋肆角
外埠酌加運費匯費

原著者 林鶴一 矢田吉熊

譯述者 黃元吉

發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

目　次

第一章　冪法 .... 1－18

乘法之指數法則 1

除法之指數法則 2

冪法之指數法則 4

單項式之冪法 7

多項式之平方 8

二項式 $a+b$ 之乘冪 10

練習問題 I. 15

第二章　開方法 .... 19－58

單項式之開方法 22

由視察而得之開平方法 24

一般之開平方法 27

整數及小數之開平方法 34

分數之開平方法 37

省略開平方法 38

一般之開立方法 …… …… …… …… …… …… …… …… …… 42
多項式之高次乘根 …… …… …… …… …… …… …… …… 45
整數及小數之開立方法 …… …… …… …… …… …… …… 47
分數之開立方法 …… …… …… …… …… …… …… …… …… 49
省略開立方法…… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 50
未定係數法 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 51
練習問題 II. …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 54
第三章 諸種之指數 ……………………………………59–76
分數指數 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 60
零指數…… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 63
負指數…… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 63
以分數及負數爲指數之單項式之計算 …… …… …… 65
多項式之計算…… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 67
練習問題 III. …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 71
第四章 無理數 ……………………………………77–119
無理數之定義…… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 77
不盡根數計算之公式…… …… …… …… …… …… …… …… 80
不盡根數最簡單之形…… …… …… …… …… …… …… …… 81
不盡根數之係數入於根號之內 …… …… …… …… …… 84

同類根數 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 85
加法及減法 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 85
同次根數 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 87
乘法及除法 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 89
冪法 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 92
開法 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… 93
無理多項式之乘法 …… …… …… …… …… …… …… …… 94
共軛不盡根數…… …… …… …… …… …… …… …… …… 96
分母之有理化…… …… …… …… …… …… …… …… …… 97
任意二項無理式之有理化因數 …… …… …… …… ……103
$A \pm \sqrt{B}$ 之平方根…… …… …… …… …… …… …… ……106
$A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ 之平方根 …… …… …… ……111
練習問題 IV. …… …… …… …… …… …… …… …… …… ……113
第五章 虛數及複素數……………………………120–132
虛數之定義 …… …… …… …… …… …… …… …… …… ……120
虛數之加減乘除 …… …… …… …… …… …… …… ……121
i 之乘冪 …… …… …… …… …… …… …… …… …… …… ……123
複素數之定義…… …… …… …… …… …… …… …… ……124
複素數之加減及乘法…… …… …… …… …… …… ……125

共軛複素數及除法 ··127

複素數之平方根 ···129

練習問題 V. ··130

答及解法指針 ··**133－174**

代數學

冪法　開法及無理數　虛數

第一章

冪　法

1.　定義.　同爲一數 a 而有 m 個之集合以成乘積, 此謂 a 之 m 乘冪,或稱 m 乘方,以 a^m 之記號表之,其 m 爲指數.

求某數或代數學式之若干乘冪,其計算謂之冪法.

由乘冪之定義及乘法, 除法之法則, 可得下列諸定理之證明, 此諸定理, 謂之指數之法則, 乃學冪法前所常用者.

2.　定理.　就某數各種之乘冪而總求其乘積, 即係擴張其乘冪, 故其積之指數, 等於諸因數之指數之和.

如 m, n, p……爲正整數.

則 $a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots}$

此爲乘法之指數法則.

證明.　依乘冪之定義,

$$a^m = a \times a \times a \times \cdots\cdots m \text{ 因數止,}$$

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots\cdots n \text{ 因數止,}$$

$$\therefore a^m a^n = (a \times a \times a \times \cdots m\text{因數止})(a \times a \times a \times \cdots n \text{ 因數止})$$

$$= a \times a \times a \times \cdots\cdots (m+n)\text{因數止}$$

$$= a^{m+n}.$$

又 $a^m \times a^n \times a^p = (a^m \times a^n) \times a^p$

$$= a^{m+n} \times a^p$$

$$= a^{m+n+p}$$

因數在三個以上, 其證明相同.

如 $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots\cdots = a^{m+n+p\cdots\cdots}$

3.　定理.　某數之乘冪如 a^m 以其乘冪 a^n 除之, 得商 $a^m \div a^n$,　即 $\dfrac{a^m}{a^n}$

$$\text{若 } m > n, \text{ 則 } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\text{若 } m < n, \text{ 則 } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$\text{若 } m = n, \text{ 則 } \frac{a^m}{a^n} \text{ 等於 } 1.$$

此爲除法之指數法則.

證明 m, n 爲正整數而 $m>n$.

則 $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a\times a\times a\times\cdots\cdots m \text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\cdots\cdots n \text{ 因數止}}$

$=a\times a\times a\times\cdots\cdots(m-n)$ 因數止

$=a^{m-n}$.

次 $m<n$.

則 $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a\times a\times a\times\cdots\cdots m \text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\cdots\cdots n \text{ 因數止}}$

$=\dfrac{1}{a\times a\times a\times\cdots\cdots(n-m)\text{因數止}}$

$=\dfrac{1}{a^{n-m}}$

又 $m=n$ 則 $a^m=a^n$.

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^n}{a^n}=1.$$

別證. 若 $m>n$ 則依前節.

$$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}$$

$$=a^m,$$

$$\therefore\qquad a^m\div a^n=a^{m-n}$$

次 $m<n$.

則 $$a^{n-m}\times a^m=a^{n-m+m}$$

$$=a^n.$$

$$\therefore \qquad a^m = \frac{a^n}{a^{n-m}}$$

此等式之兩邊以 a^n 除之.

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$$

又 $m=n$

則 $$1\times a^n = a^n = a^m$$

$$\therefore \qquad a^m \div a^n = 1.$$

4. 定理. 某數之 m 乘冪之 n 乘冪,等於其數之 mn 乘冪.

即 $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

此為冪法之指數法則.

證. m, n 為正整數.

則 $$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \cdots\cdots n \text{ 因數止}$$

$$= a^{m+m+m+\cdots\cdots\cdots\cdots n\text{項止}}$$

$$= a^{mn}.$$

系. 某數之 m 乘冪之 n 乘冪,等於其數之 n 乘冪之 m 乘冪.

即 $$(a^m)^n = (a^n)^m$$

蓋 $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}$ 故也.

5. 定理. 若干因數之積之 m 乘冪,等於各因數之 m 乘冪之積.

即 $$(abc\cdots\cdots)^m=a^m b^m c^m\cdots\cdots$$

證. m 爲正整數.

則 $(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\cdots\cdots m$ 因數止

$=(a\times a\times a\times\cdots\cdots m$ 因數止$)$

$\times(b\times b\times b\times\cdots\cdots m$ 因數止$)$

$=a^m b^m.$

$\therefore (abc)^m=\{(ab)c\}^m$

$=(ab)^m c^m$

$=a^m b^m c^m.$

故凡因數之數多者,可依此類推.

如 $(abc\cdots\cdots)^m=a^m b^m c^m\cdots\cdots$

6. 定理. 二數之商之 m 乘冪,等於二數之 m 乘冪之商.

即 $$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

證. m 爲正整數.

則 $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\cdots\cdots m$ 因數止

$$=\frac{aaa\cdots\cdots m\text{ 因數止}}{bbb\cdots\cdots m\text{ 因數止}}$$

$$=\frac{a^m}{b^m}.$$

別證.　令 $\frac{a}{b}\times b=a.$

作此式兩邊之 m 乘冪,由前節之定理,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\times b^m=a^m,$$

$$\therefore\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

注意.　本定理又可換言之如次:

分數之 m 乘冪,等於以分母子之 m 乘冪爲分母子之分數.

7.　由上證明得各公式如次:

$$a^m\times a^n=a^{m+n}. \qquad [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} m>n\text{ 則 } a^m\div a^n=a^{m-n} \\ m<n\text{ 則 } a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}. \end{array}\right\} \qquad [2]$$

$$(a^m)^n=a^{mn}. \qquad [3]$$

$$(ab)^m=a^mb^m. \qquad [4]$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}. \qquad [5]$$

8. 單項式之冪法.

依前節公式 [3], [4], [5] 即得其法則如次:

〔法則〕. 作單項式之 m 乘冪者,先作其數係數之 m 乘冪,而各因數之指數則附以 m 倍.

作分數式之 m 乘冪者,乃作以分母子之 m 乘冪爲分母子之分數.

例 1. 求 $-2a^2b^3$ 之五乘冪.

解. $$(-2a^2b^3)^5=(-2)^5(a^2)^5(b^3)^5=-32a^{10}b^{15}$$

例 2. 求 $-3xy^3z^5$ 之四乘冪.

解. $$(-3xy^3z^5)^4=(-3)^4x^4(y^3)^4(z^5)^4$$
$$=81x^4y^{12}z^{20}.$$

例 3. $$\left(\frac{2ab^3}{3x^2y^4}\right)^6=\frac{(2ab^3)^6}{(3x^2y^4)^6}$$
$$=\frac{64a^6b^{18}}{729x^{12}y^{24}}$$

例 4. $$\{(-5x^4)^3\}^2=\{-125x^{12}\}^2$$
$$=15625x^{24}.$$

[問 1] 求下列之乘冪.

(一) $(7ab^2)^2$. (二) $(-2a^7c^2)^3$

(三) $(3a^2b^3)^4$. (四) $(-a^2x)^6$.

(五)　$(-2x^2y)^5$.　　　　(六)　$(-\frac{1}{3}x^3)^7$.

(七)　$5a(-2a)^3(a^2)^4$　　　　(八)　$(-3^6ax^2y^5)$^[illegible].

［問 2］　求下列之乘冪.

(一)　$\left(\frac{3a^2b^3}{4c^5x^4}\right)^2$.　　　　(二)　$\left(-\frac{3x^5}{5a^3}\right)^3$.

(三)　$\left(\frac{2abc}{3m^2n^3}\right)^n$.

［問 3］　下式試簡之.

(一)　$\{(2a^3)^2\}^4$.　　　　(二)　$3x\{(-x^2)^3\}^4$.

(三)　$-5\{(m^2n)^5(mn^2)^2\}^2$.

9.　多項式之平方.　依乘法，得各公式如次：

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab,$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

依此結果，卽得其法則如次：

〔**法則**〕.　作多項式之平方者，作各項之平方，又作各項與其下各項相乘之積之二倍，統為相加可也.

例 1.　$(x-y+z)^2=x^2+(-y)^2+z^2+2x(-y)+2xz$

$$+2(-y)z$$

$$=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz.$$

例 2. $(1+2x-x^2)^2=1^2+(2x)^2+(-x^2)^2+2\times1\times(2x)$

$$+2\times1\times(-x^2)+2(2x)(-x^2)$$

$$=1+4x^2+x^4+4x-2x^2-4x^3$$

$$=1+4x+2x^2-4x^3+x^4.$$

例 3. $(5a^3-7a^2b+3ab^2-6b^3)^2$

$$=25a^6+49a^4b^2+9a^2b^4+36b^6$$

$$-70a^5b+30a^4b^2-60a^3b^3$$

$$-42a^3b^3+84a^2b^4$$

$$-36ab^5$$

$$=25a^6-70a^5b+79a^4b^2$$

$$-102a^3b^3+93a^2b^4$$

$$-36ab^5+36b^6.$$

注意. 各項之平方恆爲正,又$(-a-b-c)^2=(a+b+c)^2$,

去多項式乘冪之括弧者, 謂之**展開**, 展開所得之式謂之**展開式**.

[問 4] 下式試展開之.

(一) $(a+b-c)^2$.　　(二) $(a-b-c)^2$.

(三) $\left(\frac{2}{3}x^2-x+\frac{3}{2}\right)^2$.　　(四) $(1-x+x^2-x^3)^2$.

10. 二項式 $a+b$ 之乘冪.

如 $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

此固所已知者,若欲求 $a+b$ 之四乘冪,則依乘法實算之如次:

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ \quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

依此結果,知 $(a+b)^4$ 之展開式,其初項爲 a^4,末項爲 b^4,而其中間各項之文字則順次爲 a^3b, a^2b^2, ab^3, 卽 a 之降冪而 b 之昇冪也.

其含 a^3b 之項,則 a^3 以 b 乘之,a^2b 以 a 乘之,相因而成者也,故其係數爲 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^3 之係數與 a^2b 之係數之和,如 $1+3$ 卽 4 是也.

又含 a^2b^2 之項,則 a^2b 以 b 乘之,ab^2 以 a 乘之,相因而