国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书——53

偏微分方程外问题
——理论和数值方法

应隆安 著

科学出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书 53

偏微分方程外问题

——理论和数值方法

应隆安 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书分两部分. 第一部分介绍偏微分方程外问题的数学理论, 其中包括定常问题和不定常问题、弱解理论和位势解理论, 以及 Poisson 公式. 在此基础上, 第二部分介绍一些有效的数值方法, 其中包括边界元方法、人工边界条件、无限元方法、完美匹配层和谱方法.

本书可作为从事偏微分方程理论研究和应用研究的科研人员和工程技术人员的参考用书, 也可作为科学与工程计算领域的研究生的教材.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程外问题：理论和数值方法/应隆安著. —北京：科学出版社, 2013

(信息与计算科学丛书；53)

ISBN 978-7-03-036361-9

I ①偏… II ①应… III ①偏微分方程-数值方法 IV ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 002087 号

责任编辑 王丽平 李静科 / 责任校对 刘小梅

责任印制 钱玉芬 / 封面设计 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年1月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2013年1月第一次印刷 印张: 21 1/4

字数: 418 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编，科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 册．这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用．

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”．为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题．

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿，介绍国内外优秀的科研成果．强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向．内容力求深入浅出，简明扼要．

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢．我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用．

石钟慈

2005 年 7 月

前　　言

很多自然规律可以归结为偏微分方程, 例如, 流体运动的基本方程是 Navier-Stokes 方程, 固体变形的基本方程是 Lamé 方程, 电磁波的基本方程是 Maxwell 方程, 微观粒子运动的基本方程是 Schrödinger 方程, 等等. 偏微分方程一般都有无穷多个解, 例如, 所有的电磁运动都满足 Maxwell 方程, 这样的解自然是多种多样的, 要确定一个特定的解, 就要有定解条件. 边界条件给出了系统的外部环境对解的影响, 初始条件给出了系统的初始状态. 恰当的定解条件能够确定所要的特定的解, 这就构成一个定解问题. 偏微分方程理论研究的是解的性质和恰当的定解条件, 而对于偏微分方程, 计算数学研究的是如何将方程的解数值地在计算机上求出来.

偏微分方程和它的定解问题有很多分类方法, 例如, 可以分为线性方程和非线性方程, 还可以分为定常问题和不定常问题, 它是按照方程的解是不是随时间变化来区分的. 而内问题和外问题的区分则与边界条件有关, 例如, 与气缸内部流体运动相关的是一个内问题, 边界条件给在气缸壁上; 而与飞行器周围气体运动相关的是一个外问题, 边界条件给在飞行器表面.

外问题的理论分析与内问题是平行的. 但是外问题有它的特殊问题, 这就是"无穷远边界条件", 例如, 飞行器周围的气体运动不只受到飞行器本身的影响, 也和风向、风速有关. 无穷远边界条件也是偏微分方程理论研究的内容. 如何给出恰当的无穷远边界条件有时甚至是很困难的问题. 外问题的数值计算与内问题的数值计算也是平行的. 一些常用的方法, 如有限差分方法、有限元方法、谱方法等, 都既可用于内问题, 也可用于外问题. 然而, 外问题有它的特殊困难: 在计算时, 一些方法要建立网格, 由于受到计算工具的限制, 网格只能设在一个有限的区域上, 这就导致有一个无穷大的区域没有被网格覆盖, 但是在网格覆盖的区域上是不能孤立地求解的. 因此, 对于外问题, 要设计一些特殊的方法.

本书的宗旨是结合偏微分方程外问题理论介绍几种有效的数值方法. 理论与数值计算是密切相关的. 首先, 每一个数值方法都有它的理论分析, 只有了解了方程的性质, 才能深刻地了解数值方法. 其次, 偏微分方程的理论还直接提供了计算的手段, 例如, 位势理论导出了边界积分方程, 而边界元方法正是利用求解积分方程来得到问题的解答; 又如, 弱解的变分理论给出了有限元方法的框架. 反过来, 在偏微分方程理论中有很多没有解决的公开问题, 数值计算能直观地把解表现出来, 从而为公开问题的解决提供启示.

本书的第 1 章至第 6 章讨论外问题的数学理论. 偏微分方程是多种多样的, 而

几乎每一个重要的方程现在都有专著. 限于篇幅和笔者的知识面, 本书只就几个典型的方程讨论, 而不追求方程和结果的一般性. 本书讨论的方程大多限于线性, 而且是常系数的. 笔者希望这样能够把基本的结果和方法介绍给读者. 据笔者所知, 有关外问题的理论结果大多散见在各种专著中, 专门讨论外问题的似乎不多. 希望本书的这些材料能对读者有一些帮助.

外问题的数值方法大致可分为两种. 一种是把问题化为一个内问题, 这个内问题可能和原问题等价, 也可能是原问题的一个近似. 人工边界方法、完美匹配层方法属于这一种. 还有一种是设法直接在外部区域上求解. 谱方法、无限元方法属于这一种. 而边界元方法似乎介于二者之间, 在计算中可以设人工边界, 也可以只解一个边界积分方程. 本书的第 7 章至第 12 章讨论数值方法, 笔者希望对这些方法都能作一个较全面的介绍. 缺乏数值例子是本书的不足之处, 原因不是好的例子太少, 而是太多. 本书中每一个方法都有大量好的例子, 笔者实在不知怎样才能选出典型的例子, 所以只能列出有关文献. 读者如果需要, 可以在参考文献中找到.

笔者的一本书 “Numerical Methods for Exterior Problems” 于 2006 年在 World Scientific 出版社出版. 本书是在它的基础上作了较多补充而完成的. 在数值方法方面, 对完美匹配层方法和人工边界方法作了较多补充. 对前者, 增加了稳定性分析和充分必要条件. 对后者, 增加了不定常问题的人工边界条件. 在理论方面, 增加了半群理论的应用和不定常问题位势解两章. 对 Darwin 模型, 除了原来的电场模型外, 增加了磁场模型. 此外, 阅读本书, 读者需要具备一定的分析方面的知识, 如实分析、泛函分析、Sobolev 空间理论等. 为方便读者, 在本书中增加了如 Sobolev 空间等小节, 其中罗列了一些重要的事实, 以便查阅.

我的朋友张关泉教授、郭本瑜教授、余德浩教授、沈捷教授、韩厚德教授为我提供了他们的著作. 没有他们的帮助, 本书是不可能完成的, 在此致以衷心的感谢. 在我写这篇前言时, 张关泉教授已永远离我们而去, 我们痛失了一位杰出的数学家. 在本书中有我本人自 20 世纪 70 年代以来的一些工作. 与我合作的曾有很多年轻人, 比如, 许进超、冯慧、魏万明、李凤艳、廖才秀、方能胜等. 现在他们中有些已不年轻, 有些已经成为著名的数学家. 青出于蓝而胜于蓝, 我很自豪能和他们合作.

外问题的数值方法是一个发展很快、很有生命力的领域. 限于笔者的知识, 本书会遗漏不少重要的材料. 请读者批评指正.

应隆安

2012 年 3 月

目　　录

《信息与计算科学丛书》序
前言
第 1 章　定常问题的弱解 …… 1
1.1 Sobolev 空间 …… 1
1.2 外部区域上的函数空间 …… 4
1.3 抽象存在定理 …… 8
1.4 Poisson 方程 …… 12
1.5 全空间上的 Poisson 方程 …… 13
1.6 Helmholtz 方程 …… 16
1.7 线性弹性力学方程组 …… 23
1.8 双调和方程 …… 26
1.9 定常 Navier-Stokes 方程 —— 线性化问题 …… 30
1.9.1 Navier-Stokes 方程 …… 30
1.9.2 Stokes 方程 …… 31
1.9.3 解在无穷远处的形态 …… 33
1.9.4 Stokes 佯谬 …… 35
1.9.5 Oseen 流 …… 35
1.10 定常 Navier-Stokes 方程 …… 37
第 2 章　定常问题的位势解 …… 43
2.1 Fredholm 积分方程 …… 43
2.2 Laplace 方程 …… 44
2.2.1 连续可微解 …… 44
2.2.2 单层位势和双层位势 …… 46
2.2.3 积分方程的研究 …… 49
2.2.4 Poisson 方程 …… 52
2.3 基本解 …… 53
2.4 Stokes 方程 …… 56
第 3 章　Poisson 公式 …… 61
3.1 Laplace 方程 …… 61
3.2 双调和方程 …… 64

3.3 Stokes 方程 ········ 66
3.4 平面线性弹性问题 ········ 68
第 4 章 不定常问题的弱解 ········ 71
4.1 Hilbert 空间上的谱分解 ········ 71
4.2 热传导方程 ········ 73
4.3 波动方程 ········ 74
4.4 Maxwell 方程 ········ 78
4.5 Darwin 模型 ········ 81
第 5 章 算子半群理论的应用 ········ 95
5.1 算子半群和无穷小生成元 ········ 95
5.2 Hille-Yosida 定理 ········ 100
5.3 应用 ········ 103
第 6 章 不定常问题的位势解 ········ 108
6.1 热传导方程的基本解 ········ 108
6.2 热传导方程的单层位势和双层位势 ········ 109
6.3 热传导方程解的存在性 ········ 111
6.4 Stokes 方程的基本解 ········ 112
6.5 Stokes 方程的单层位势和双层位势 ········ 115
第 7 章 边界元方法 ········ 121
7.1 边界方程 ········ 121
7.2 区域分解 ········ 127
7.3 数值解 ········ 132
第 8 章 显式人工边界方法 ········ 135
8.1 DtN 算子 ········ 135
8.2 发散积分的有限部分 ········ 139
8.3 数值解 ········ 143
8.4 边界摄动 ········ 149
8.5 不定常问题 ········ 150
8.5.1 热传导方程 ········ 150
8.5.2 线性 Schrödinger 方程 ········ 155
8.5.3 波动方程 ········ 158
8.6 三维不定常问题 ········ 164
8.7 Burgers 方程 ········ 168
第 9 章 吸收边界条件与其他人工边界条件 ········ 172
9.1 拟微分算子 ········ 172

9.2 吸收边界条件 ······ 173
9.3 一些近似式 ······ 175
9.4 Bayliss-Turkel 辐射边界条件 ······ 179
9.5 一个低阶吸收边界条件 ······ 180
9.6 Maxwell 方程 ······ 181
9.7 有限差分格式 ······ 184
9.8 定常 Navier-Stokes 方程 ······ 185
9.8.1 在无穷远处的边界条件为齐次 ······ 185
9.8.2 在无穷远处的边界条件为非齐次 ······ 187
9.8.3 一个线性边界条件 ······ 188
第 10 章　无限元方法 ······ 191
10.1 Laplace 方程 —— 二维问题 ······ 191
10.1.1 无限元格式 ······ 191
10.1.2 转移矩阵 ······ 192
10.1.3 对转移矩阵的进一步讨论 ······ 198
10.1.4 组合刚度矩阵 ······ 202
10.2 一般单元 ······ 203
10.3 Laplace 方程 —— 三维问题 ······ 204
10.4 非齐次方程 ······ 206
10.5 平面弹性力学方程组 ······ 207
10.6 双调和方程 ······ 209
10.7 Stokes 方程 ······ 211
10.8 Darwin 模型 ······ 215
10.9 变系数椭圆型方程 ······ 219
10.9.1 一个齐次方程 ······ 219
10.9.2 一个非齐次方程 ······ 222
10.9.3 一般多连通区域 ······ 224
10.9.4 转移矩阵 ······ 227
10.10 收敛性 ······ 228
第 11 章　完美匹配层方法 ······ 232
11.1 波动方程 ······ 232
11.2 Bérenger 的完美匹配层 ······ 236
11.3 初值问题的弱稳定性 ······ 239
11.4 初值问题差分格式的稳定性分析 ······ 244
11.5 单轴完美匹配层 ······ 251

11.6 Maxwell 方程 ······ 254
11.7 初边值问题的稳定性 ······ 256
11.8 充分必要条件 ······ 268
11.9 Helmholtz 方程 ······ 278
第 12 章 谱方法 ······ 282
12.1 引言 ······ 282
12.2 正交多项式 ······ 288
12.3 Laguerre 谱方法 ······ 293
12.3.1 Laguerre-Fourier 混合谱方法 ······ 293
12.3.2 球面调和函数 —— 广义 Laguerre 谱方法 ······ 297
12.3.3 广义 Laguerre 拟谱方法 ······ 300
12.3.4 非线性方程 ······ 301
12.4 Jacobi 谱方法 ······ 303
12.5 有理谱方法与无理谱方法 ······ 305
12.6 误差估计 ······ 306
参考文献 ······ 312
索引 ······ 327
《信息与计算科学丛书》已出版书目 ······ 333

第 1 章　定常问题的弱解

1.1　Sobolev 空间

在本节中我们叙述一些以后要用到的有关 Sobolev 空间的基本概念和基本事实, 所有结论都不加证明, 有兴趣的读者可以阅读有关的专著 (Adams, 1975). 在本书中, 除了特别说明, 函数都是实值的. 本节, 我们也设函数为实值的, 但只要作少许变动, 所有定义与结果都适用于复函数.

设 Ω 是空间 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集合, 它的边界记作 $\partial\Omega$. 又记 $\mathcal{D}(\Omega)$ 为由 Ω 上无穷次可微并且具有紧支集的函数所构成的空间, 也记作 $C_0^\infty(\Omega)$. 令

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{u|_\Omega : u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}.$$

以 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 表示 $\mathcal{D}(\Omega)$ 的对偶空间, 称为 Ω 上的广义函数空间, 或者称为分布. $\mathcal{D}'(\Omega)$ 与 $\mathcal{D}(\Omega)$ 之间的对偶积记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 如果 f 是一个局部可积函数, 则 f 就可以按如下表达式定义为一个广义函数:

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

下面定义广义函数的导数. 给出多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 其中 α_i 为非负整数, 令 $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. 设 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 可按下式定义 u 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中的广义导数 $\partial^\alpha u$:

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\varphi\rangle, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

其中

$$\partial^\alpha\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

容易看出, 如果 u 有 n 次连续导数, 则

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

设实数 $p \in [1, \infty]$, Lebesgue 空间定义为以下可测函数的集合:

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \int_\Omega |u|^p\,dx < \infty\right\}, \qquad p < \infty,$$

以及

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess}|u| < \infty\}.$$

设 m 为非负整数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Sobolev 空间定义为

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leqslant m\},$$

并赋以范数

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad p < \infty,$$

或者

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \sup_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess}|\partial^\alpha u(x)|,$$

则它是 Banach 空间. 另定义以下半范数:

$$|u|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad p < \infty,$$

和

$$|u|_{m,\infty,\Omega} = \sup_{|\alpha|=m} \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess}|\partial^\alpha u(x)|.$$

定义在 Ω 上的函数 u, 如果满足: 对于所有的紧子集 $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, 都有 $u \in W^{m,p}(\Omega_1)$, 则记 $u \in W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. $W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是一个线性空间, 但不是 Banach 空间.

当 $p = 2$ 时, $W^{m,2}(\Omega)$ 记作 $H^m(\Omega)$, 在范数和半范数的记号中, 一般省略 $p = 2$. 在定义了内积

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v \, dx$$

以后, 它是 Hilbert 空间. 在以上范数、半范数和内积的记号中, 如果不需要指出区域, 一般省略 Ω. 特别地, 在空间 $L^2(\Omega)$ 的内积符号中, 下标都省略.

定义空间 $H^m_0(\Omega)$ 是空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 按范数 $\|\cdot\|_m$ 的闭包. 定义空间 $H^{-m}(\Omega)$ 是空间 $H^m_0(\Omega)$ 的对偶空间, 范数为

$$\|u\|_{-m,\Omega} = \sup_{\substack{v\in H^m_0(\Omega)\\ v\neq 0}} \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|_{m,\Omega}}.$$

定理 1.1 (Poincaré-Friedrichs 不等式) 设区域 Ω 是连通的并且至少在一个方向上是有界的, 则存在常数 C, 依赖于 Ω 和 m, 使得

$$\|u\|_{m,\Omega} \leqslant C|u|_{m,\Omega}, \qquad \forall u \in H^m_0(\Omega).$$

以后在本书中总以 C 表示一个通用的常数, 它在不同的场合可以有不同的值.

以下的嵌入定理给出了 Sobolev 空间的一个重要性质.

定义 1.1 称区域 Ω 具有锥性质, 如果存在有限锥 K 使得每一点 $x\in\Omega$ 是一个包含于 Ω 内且全等于 K 的有限锥的顶点.

定义 1.2 设函数空间 A, B 是 Banach 空间, 称 A 嵌入 B, 记作 $A \longmapsto B$, 如果对每个 $u\in A$, 能够在一个零测度集合上重新定义它的值, 使得修改后的函数 $\tilde{u}\in B$, 并且 $\|\tilde{u}\|_B \leqslant C\|u\|_A$.

定理 1.2 如果区域 Ω 具有锥性质, 则以下嵌入成立:

1. 当 $mp<n$ 时, 则

$$W^{m,p}(\Omega) \longmapsto L^q(\Omega), \qquad p\leqslant q\leqslant \frac{np}{n-mp};$$

2. 当 $mp=n$ 时, 则

$$W^{m,p}(\Omega) \longmapsto L^q(\Omega), \qquad p\leqslant q<\infty;$$

3. 当 $mp>n$ 时, 则

$$W^{m,p}(\Omega) \longmapsto C_B(\Omega).$$

在这里, $C_B(\Omega)=\{u\in C(\Omega): |u|\leqslant C<\infty\}$, $\|u\|_{C_B(\Omega)}=\sup|u|$.

定理 1.3 如果区域 Ω 具有锥性质并且是有界的, 则以下嵌入还是紧的:

1. 当 $mp\leqslant n$ 时,

$$W^{m,p}(\Omega) \longmapsto L^q(\Omega), \qquad 1\leqslant q< \frac{np}{n-mp};$$

2. 当 $mp>n$ 时,

$$W^{m,p}(\Omega) \longmapsto C_B(\Omega).$$

为了以后讨论边值问题的需要, 下面给出在某种意义下到边界值的嵌入. 设 Ω 为有界, 并且边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 即可以局部引进坐标系, 使得 $\partial\Omega$ 表示为一个 Lipschitz 连续的函数. 空间 $L^2(\partial\Omega)$ 的范数为

$$\|u\|_{0,\partial\Omega}=\left(\int_{\partial\Omega} u^2(s)\,ds\right)^{1/2}$$

定理 1.4 1. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ 在空间 $H^1(\Omega)$ 中稠密;

2. 以 $\gamma_0\phi$ 记函数 ϕ 在边界 $\partial\Omega$ 上的值, 则

$$\|\gamma_0\phi\|_{0,\partial\Omega}\leqslant C\|\phi\|_{1,\Omega}.$$

于是, 定义在 $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ 上的映射 γ_0 可以连续地延拓成一个从 $H^1(\Omega)$ 到 $L^2(\partial\Omega)$ 的映射, 仍记作 $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$. $\gamma_0\phi$ 称为函数 ϕ 在 $\partial\Omega$ 上的迹.

定理 1.5　$\ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$. 此外, γ_0 的值域是 $L^2(\partial\Omega)$ 的一个真子空间, 并且在 $L^2(\partial\Omega)$ 中稠密.

把这个真子空间记作 $H^{1/2}(\partial\Omega)$. 它是一个 Hilbert 空间, 范数是

$$\|\mu\|_{1/2,\partial\Omega} = \inf_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \gamma_0 v=\mu}} \|v\|_{1,\Omega}.$$

空间 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 是空间 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 的对偶空间, 它的范数定义为

$$\|\mu^*\|_{-1/2,\partial\Omega} = \sup_{\substack{\mu\in H^{1/2}(\partial\Omega)\\ \mu\neq 0}} \frac{|\langle\mu^*,\mu\rangle|}{\|\mu\|_{1/2,\partial\Omega}}.$$

设 ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法线方向向量. u 的法向导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = \sum_{i=1}^n \nu_i \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

定理 1.6　映射 $u \to \left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}$ 从 $H^2(\Omega)$ 到 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是线性有界的, 并且 $H_0^2(\Omega) = \left\{u \in H^2(\Omega) : \gamma_0 u = 0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0\right\}$. 更一般地, 对于 $m \geqslant 2$, 映射 $u \to \left(\gamma_0 u, \left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}\right)$ 从 $H^m(\Omega)$ 到 $H^{m-1/2}(\partial\Omega) \times H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ 是线性有界的.

1.2　外部区域上的函数空间

设 Ω^c 是二维空间 $\mathbb{R}^2$ 或三维空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一个有界区域, $\partial\Omega$ 是它的边界. 为简单起见, 假设 $\partial\Omega$ 是连通曲线或连通曲面, 并且它是 Lipschitz 连续、分片光滑的. 设 Ω 是闭区域 $\overline{\Omega^c}$ 的外部, 则 Ω 是一个无界区域. 区域 Ω 的维数记作 $\dim(\Omega)$.

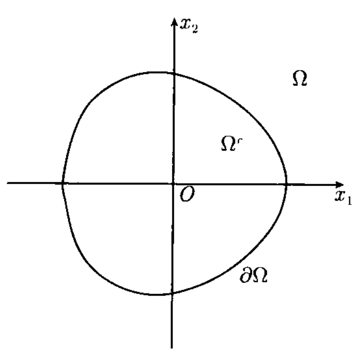

图 1.1

如果空间维数是 1, 区域 Ω^c 就是一个区间 (a,b), 区域 Ω 分解成两个独立的部分: $(-\infty,a)$ 和 $(b,+\infty)$. 我们考虑后者, 并且不妨设 $b=0$, 即区间 $(0,\infty)$.

为了研究外问题, 除了要用到前面引进的 Sobolev 空间外, 还需要一些特殊的空间. 试看一个例子.

设 $\partial\Omega=\{x:|x|=1\}$, 考虑 Laplace 方程的 Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned} &\Delta u=0,\\ &u=1, \qquad x\in\partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中, 对于二维情形 $(n=2)$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 对于三维情形 $(n=3)$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. 当 $n=2$ 时, $u\equiv 1$ 是一个解, 它在 Ω 上是不可积的. 如果要求解可积, 则无解. 如果在有界函数范围内求解, 当 $n=3$ 时, 有两个解: $u\equiv 1$ 和 $u=1/|x|$. 前者在无穷远不趋于零, 后者在无穷远趋于零, 它们在 Ω 上都是不可积的. 因此, 对这种边值问题, 要给出合适的函数空间.

引理 1.1 设 $\dim(\Omega)=3$, 函数 $u\in C_0^\infty(\Omega)$, 则

$$\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\,dx \leqslant 4\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx, \tag{1.2}$$

其中 $y\in\mathbb{R}^3$.

证明 因为

$$2\int\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}u(x)\frac{x_k-y_k}{|x-y|^2}\,dx=\int\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u^2(x)}{\partial x_k}\cdot\frac{x_k-y_k}{|x-y|^2}\,dx=-\int\frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\,dx.$$

利用 Cauchy 不等式得

$$\int\frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\,dx\leqslant 2\left(\int\frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{(x_k-y_k)^2}{|x-y|^2}\,dx\right)^{\frac12}\cdot\left(\int|\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{\frac12}$$

已知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{(x_k-y_k)^2}{|x-y|^2}=1$, 由此得到所要证明的结果. □

用 $B(O,R)$ 表示以 O 为中心, 以 R 为半径的球, 有

引理 1.2 设 $\dim(\Omega)=2$, $B(O,1)\subset\Omega^c$, 函数 $u\in C_0^\infty(\Omega)$, 则

$$\int_\Omega\frac{u^2(x)}{|x|^2\ln^2|x|}\,dx\leqslant 4\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\,dx. \tag{1.3}$$

证明 因为

$$2\int_\Omega \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} u(x) \frac{x_k}{|x|^2 \ln |x|}\, dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u^2(x)}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{|x|^2 \ln |x|}\, dx$$
$$= -\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^2 \ln^2 |x|}\, dx.$$

类似引理 1.1 的证明可以得到所要证明的结果. □

定义集合 $H_0^{1,*}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于范数 $|\cdot|_1$ 的闭包. 按此范数它是一个 Hilbert 空间. 由引理 1.1 和引理 1.2 容易看出下面结果:

引理 1.3 设 $\dim(\Omega) = 2$, 并且 $B(O, R_0) \subset \Omega^c$, 则空间 $H_0^{1,*}(\Omega)$ 中的范数 $|\cdot|_1$ 等价于

$$\|\cdot\|_{1,*} = \left(|\cdot|_1^2 + \left\| \frac{\cdot}{|x| \ln |x/R_0|} \right\|_0^2 \right)^{\frac12}.$$

证明 由引理 1.2, 并作映射 $x \to x/R_0$, 可直接得到所要的结论. □

引理 1.4 设 $\dim(\Omega) = 3$, 并且 $O \in \Omega^c$, 则空间 $H_0^{1,*}(\Omega)$ 中的范数 $|\cdot|_1$ 等价于

$$\|\cdot\|_{1,*} = \left(|\cdot|_1^2 + \left\| \frac{\cdot}{|x|} \right\|_0^2 \right)^{\frac12}.$$

证明同上.

为叙述简单, 以后恒假定在 Ω 中 $|x| > R_0$.

设 $B(O, R_1) \supset \Omega^c$ 并且 $R_2 > R_1$, 作截断函数 $\zeta \in C^\infty$, 使得当 $|x| < R_1$ 时 $\zeta(x) \equiv 1$, 当 $|x| > R_2$ 时 $\zeta(x) \equiv 0$, 并且对所有的 x, 有 $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$. 定义集合

$$H^{1,*}(\Omega) = \{u : \zeta u \in H^1(\Omega \cap B(O, R_2)), (1-\zeta)u \in H_0^{1,*}(\Omega)\}.$$

赋以范数 $\|\cdot\|_{1,*}$, $H^{1,*}(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间. 空间 $H^{1,*}(\Omega)$ 的定义与截断函数的选取无关, 因为如果我们取另一个截断函数 ζ_1, 显然 $(\zeta - \zeta_1)u \in H^1$, 于是集合 $H^{1,*}(\Omega)$ 保持不变.

引理 1.5 对于二维区域, $1 \in H^{1,*}(\Omega)$.

证明 设函数 ζ 如上所定义. 令 $\zeta_1(x) = \zeta(x/a)$, $a > 0$ 是一个常数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \zeta_1(x)|^2\, dx = \frac{1}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \zeta(x/a)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \zeta(x)|^2\, dx.$$

令 $a \to \infty$, 可以看出 ζ_1 在 $H^{1,*}(\Omega)$ 中一致有界. 取一个弱收敛的子序列. 另一方面,

$$\lim_{a\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{|x|^2 \ln^2 |x/R_0|} (\zeta_1(x) - 1)^2\, dx = 0.$$