



卓越工程技术人才培养特色教材

GAODENG SHUXUE
JIQI YINGYONG

高等数学及其应用 (财经类)

主 编 戴中寅 卢殿臣



卓越工程技术人才培养特色教材

高等数学及其应用

(财经类)

主 编 戴中寅 卢殿臣

副主编 汪光先 杨松林 金 生 苏国荣

编委会 (按姓氏笔画为序)

卢殿臣 苏国荣 杨松林 汪光先

宋晓平 张有德 金 生 戴中寅



江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

镇 江

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用:财经类/戴中寅,卢殿臣主编
·一镇江:江苏大学出版社,2012.8
ISBN 978-7-81130-366-7

I. ①高… II. ①戴… ②卢… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 194483 号

高等数学及其应用:财经类

主 编/戴中寅 卢殿臣

责任编辑/吴昌兴 张小琴

出版发行/江苏大学出版社

地 址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编:212003)

电 话/0511-84446464(传真)

网 址/<http://press.ujs.edu.cn>

排 版/镇江文苑制版印刷有限责任公司

印 刷/扬中市印刷有限公司

经 销/江苏省新华书店

开 本/718 mm×1 000 mm 1/16

印 张/13.5

字 数/255 千字

版 次/2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

书 号/ISBN 978-7-81130-366-7

定 价/29.00 元

如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话:0511-84440882)

江苏省卓越工程技术人才培养特色教材建设

指导委员会

主任委员：丁晓昌（江苏省教育厅副厅长）

副主任委员：史国栋（常州大学党委书记）

孙玉坤（南京工程学院院长）

田立新（南京师范大学副校长）

梅 强（江苏大学副校长）

徐子敏（江苏省教育厅高教处处长）

王 恬（南京农业大学教务处处长）

委 员 会：（按姓氏笔画为序）

丁晓昌 马 铸 王 兵 王 恬

方海林 田立新 史国栋 冯年华

朱开永 朱林生 孙玉坤 孙红军

孙秀华 芮月英 李江蛟 吴建华

吴晓琳 沐仁旺 张仲谋 张国昌

张明燕 陆雄华 陈小兵 陈仁平

邵 进 施盛威 耿焕同 徐子敏

徐百友 徐薇薇 梅 强 董梅芳

傅菊芬 舒小平 路正南

序

深化高等工程教育改革、提高工程技术人才培养质量,是增强自主创新能力、促进经济转型升级、全面提升地区竞争力的迫切要求。近年来,江苏高等工程教育飞速发展,全省46所普通本科院校中开设工学专业的学校有45所,工学专业在校生约占全省普通本科院校在校生总数的40%,为“十一五”末江苏成功跻身全国第一工业大省做出了积极贡献。

“十二五”时期是江苏加快经济转型升级、发展创新型经济、全面建设更高水平小康社会的关键阶段。教育部“卓越工程师教育培养计划”启动实施以来,江苏认真贯彻教育部文件精神,结合地方高等教育实际,着力优化高等工程教育体系,深化高等工程教学改革,努力培养造就一大批创新能力强、适应江苏社会经济发展需要的卓越工程技术后备人才。

教材建设是人才培养的基础工作和重要抓手。培养高素质的工程技术人才,需要遵循工程技术教育规律,建设一套理念先进、针对性强、富有特色的优秀教材。随着知识社会和信息时代的到来,知识综合、学科交叉趋势增强,教学的开放性与多样性更加突出,加之图书出版行业体制机制也发生了深刻变化,迫切需要教育行政部门、高等学校、行业企业、出版部门和社会各界通力合作,协同作战,在新一轮高等工程教育改革发展中抢占制高点。

2010年以来,江苏大学出版社积极开展市场分析和行业调研,先后多次组织全省相关高校专家、企业代表就应用型本科人才培养和教材建设工作进行深入研讨。经各方充分协商,拟定了“江苏省卓越工程技术人才培养特色教材”开发建设的实施意见,明确了教材开发总体思路,确立了编写原则:

一是注重定位准确,科学区分。教材应符合相应高等工程教育的办学定位和人才培养目标,恰当把握与研究型工程人才、设计型工程人才及技能型工程人才的区分度,增强教材的针对性。

二是注重理念先进,贴近业界。吸收先进的学术研究与技术成果,适应经济转型升级需求,适应社会用人单位管理、技术革新的需要,具有较强的领先性。

三是注重三位一体,能力为重。紧扣人才培养的知识、能力、素质要求,着力培养学生的工程职业道德和人文科学素养、创新意识和工程实践能力、国际视野和沟通协作能力。

四是注重应用为本,强化实践。充分体现用人单位对教学内容、教学实践设计、工艺流程的要求以及对人才综合素质的要求,着力解决以往教材中应用性缺失、实践环节薄弱、与用人单位要求脱节等问题,将学生创新教育、创业实践与社会需求充分衔接起来。

五是注重紧扣主线,整体优化。把培养学生工程技术能力作为主线,系统考虑、整体构建教材体系和特色,包括合理设置课件、习题库、实践课题以及在教学、实践环节中合理设置基础、拓展、复合应用之间的比例结构等。

该套教材组建了阵容强大的编写专家及审稿专家队伍,汇集了国家教学指导委员会委员、学科带头人、教学一

线名师、人力资源专家、大型企业高级工程师等。编写和审稿队伍主要由长期从事教育教学改革实践工作的资深教师、对工程技术人才培养研究颇有建树的教育管理专家组成。在编写、审定教材时,他们紧扣指导思想和编写原则,深入探讨、科学创新、严谨细致、字斟句酌,倾注了大量的心血,为教材质量提供了重要保障。

该套教材在课程设置上基本涵盖了卓越工程技术人才培养所涉及的有关专业的公共基础课、专业公共课、专业课、专业特色课等;在编写出版上采取突出重点、以点带面、有序推进的策略,成熟一本出版一本。希望大家在教材的编写和使用过程中,积极提出意见和建议,集思广益,不断改进,以期经过不懈努力,形成一套参与度与认可度高、覆盖面广、特色鲜明、有强大生命力的优秀教材。

江苏省教育厅副厅长 丁晓昌

2012年8月

前 言

数学是生产经济和科学研究的重要工具. 高等数学及其应用课程对于高校学生而言无疑是非常重要的基础课程. 高等数学课程是高校教学的“第一课”, 为刚刚步入高等教育殿堂的财经类学生提供一本有针对性的内容适度的教材, 这正是我们编写这本《高等数学及其应用》的初衷.

本书以介绍微积分的内容为主, 以独立院校财经类的本科学生为授课对象, 兼顾部分更高层次同专业本科学生. 针对读者群体的特点, 本书根据“以应用为目的, 以必需和够用为尺度”的编写原则, 从概念与理论、方法与技巧、实践与应用三个方面着想, 对内容做出较为合理的安排, 力求使学生的逻辑思维能力和数学应用能力都能得到发展, 以期达到提高学生综合数学素质的目的, 为后续课程的学习打好基础.

在本书的编写中, 为使全书条理清晰, 定义、定理的叙述严密, 在建构引入新概念时, 尽量使用通俗的语言. 本书不拘泥于定理的严格证明, 而是更注重介绍理论的系统性、完整性及其应用价值, 体现编者把本书写成一本“易教易学的独立院校财经类高等数学教材”的初衷.

本书共分为六章, 前五章内容介绍微积分, 包括一元函数微积分和多元函数微积分, 第六章介绍微分方程和差分方程. 每章的各节附有习题供学生练习, 每章均另外配备了一定数量的总习题, 可供学有余力或将来准备报考硕士研究生的学生练习, 书后附有参考答案. 考虑到财经类学生以文科生居多, 书后以附录形式增加了对高中阶段数学知识补充和强化的内容. 本书授课学时约为 96 学时.

本书在编写过程中得到了苏州大学数学科学学院的多位老师的大力支持, 他们提出很多宝贵意见和建议, 使本书内容增色不少; 苏州大学文正学院提供了很多帮助, 使本书顺利出版, 在此一并致谢! 最后, 衷心感谢江苏大学出版社为本书面世所做的工作.

由于编者水平有限, 书中仍有很多不尽如人意的地方, 敬请读者批评指正.

编 者

2012 年 8 月

目 录

第一章 函数与极限

第一节 函数	001
第二节 极限	008
第三节 无穷小量与无穷大量	015
第四节 极限的性质与运算法则	017
第五节 两个重要极限	020
第六节 函数的连续性	022
第七节 应用	026
总习题一	030

第二章 一元函数微分法

第一节 函数的导数	031
第二节 求导法则	037
第三节 函数的微分	043
第四节 边际与弹性	046
总习题二	049

第三章 微分的应用

第一节 微分中值定理	050
第二节 洛必达法则	055
第三节 函数的单调性和极值	060
第四节 曲线的凹凸性和拐点	066
第五节 应用	069
总习题三	074

第四章 定积分

第一节 定积分的概念和性质	076
第二节 微积分基本定理	081

第三节 积分法	090
第四节 应用	108
总习题四	118
第五章 多元函数微积分	
第一节 多元函数的概念	120
第二节 二元函数的极限和连续	125
第三节 偏导数和全微分	128
第四节 复合函数与隐函数的偏导数	133
第五节 二元函数的极值	139
第六节 二重积分	143
第七节 应用	151
总习题五	158
第六章 微分方程	
第一节 微分方程的基本概念	159
第二节 一阶微分方程	160
第三节 可降阶二阶微分方程	164
第四节 二阶常系数齐次线性微分方程	166
第五节 差分与差分方程	168
第六节 微分方程与差分方程的应用	174
总习题六	176
附录 I 三角函数与反三角函数	178
附录 II 数学归纳法	183
习题答案	185
参考文献	202

第一章 函数与极限

函数是微积分研究的对象,极限理论是微积分的基础理论,也是微积分的重要工具,微积分中的大多数概念都建立在极限概念基础之上.本章介绍极限理论、函数及其连续性.

第一节 函 数

一、函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中,人们经常会遇到各种各样的量,例如,温度、浓度、产量、成本、面积等.宇宙间一切事物都在不断地变化,变化是绝对的,不变是相对的.在观察事物的过程中,我们称变化着的量为变量,相对不变的量为常量.例如,一段时间内银行资金的运作过程中,借贷资金的数额不断变化着,是变量;而利率相对不变,则是常量.

一个量是变量还是常量,并不是固定不变的.在一定的条件下,常量和变量可以互相转化.

2. 函数的定义

例 1 某种机器的销售单价为每台 5 万元,销售总收入 R (万元)与销售量 x (台)的关系是

$$R=5x,$$

x 在正整数内任取一个具体数值,根据上面的对应关系,就得到一个确定的 R 值与之对应.

定义 1 设 D 是一个非空实数集,如果对于变量 x 在 D 中的每一个取值,变量 y 按照一定的法则,总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

这里, x 为自变量, y 为因变量或函数. f 是函数符号,它表示 x 与 y 的对应法则.集合 D 称为函数的定义域,所有相应于 x 的 y 值所组成的集合则称为函数的值域.

注 函数的概念中涉及 5 个因素:① 自变量;② 定义域;③ 因变量;④ 对应法则;⑤ 值域.在这 5 个因素中最重要的是定义域和因变量关于自变量的对应法

则,这两者称为函数的两个要素.只有定义域与对应法则都相同的两个函数才是相同的函数.

例 2 设 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), 求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right), f(x+1)$.

解 $f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$;

当 $x \neq -1$ 时, $f(x+1) = \frac{1}{x+1} \sin \frac{1}{x+1}$.

例 3 设 $f(x+1) = x^2 - 3x$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1$,

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) = t^2 - 5t + 4,$$

所以

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

例 4 求函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域为 $x^2 - x - 6 \geq 0$,

解得

$$x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -2;$$

而函数 $y = \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域是 $\left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1$,

解得

$$-3 \leq x \leq 4,$$

于是,所求函数的定义域是这两个函数定义域的公共部分: $-3 \leq x \leq -2$ 和 $3 \leq x \leq 4$.

例 5 下列各对函数是否为同一函数?

(1) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$; (2) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, g(x) = 1$;

(3) $y = f(x), u = f(t)$.

解 (1) 不是. 因为对应法则不同, 事实上 $g(x) = |x|$.

(2) 是. 因为定义域与对应法则都相同.

(3) 是. 因为对应法则相同, 函数的定义域也相同.

由例 5 可知, 一个函数由定义域与对应法则完全确定, 与用什么字母表示无关.

3. 函数的表示法

函数的表示方法有很多, 最常见的有表格法、图像法及公式法(公式法又称解析法).

表格法: 把自变量的一系列数值与对应的函数值列成表来表示它们的对应关系.

图像法: 用一条平面曲线表示自变量与函数的对应关系, 它是函数关系的几何表示.

解析法:用数学式子表示自变量与函数的对应关系. 例如, 邮电局规定邮包重量不超过 50 g 支付邮资 0.8 元, 超过部分按 0.4 元/g 支付邮资. 若邮包重量不超过 5 000 g, 则邮资与邮包重量的关系可由解析表达式表示为

$$y = \begin{cases} 0.8, & 0 < x \leq 50, \\ 0.8 + 0.4(x - 50), & 50 < x \leq 5\,000. \end{cases}$$

该函数的定义域为 $(0, 5\,000]$, 但它在定义域内不同的区间上是用不同的解析式表示的, 这样的函数称为分段函数. 分段函数也表示一个函数.

例 6 作出分段函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 3-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 的图像, 并求函数的定义域及 $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{3}{2})$.

解 先作出分段函数的图像, 见图 1-1.

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 2]$.

因为 $\frac{1}{2} \in (0, 1]$, 所以 $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$;

又 $\frac{3}{2} \in (1, 2]$, 所以 $f(\frac{3}{2}) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

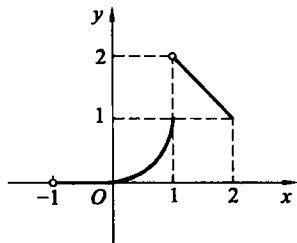


图 1-1

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在正数 M , 对于一切 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 否则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界的几何意义是: 曲线 $y = f(x)$ 的图像在区间 (a, b) 内被限制在 $y = -M$ 和 $y = M$ 两条直线之间.

注 (1) 如果一个函数在某区间内有界, 那么正数 M 的取法不是唯一的.

例如, $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, $|\sin x| \leq 1 = M$, 我们也可以取 $M = 2$.

(2) 有界性与区间有关. 例如, $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内有界, 但在区间 $(0, 1)$ 内无界.

2. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果对任意的 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, $y = \cos x$, $y = x^2$ 是偶函数; $y = \sin x$, $y = x^3$ 是奇函数; $y = \sin x + \cos x$

是非奇非偶函数.

例 7 判断函数 $f(x)=x+\sin x$ 的奇偶性.

解 函数 $f(x)=x+\sin x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 且有

$$f(-x) = -x + \sin(-x) = -(x + \sin x) = -f(x),$$

所以, $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称; 奇函数的图像关于原点对称.

3. 函数的单调性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 若有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加(如图 1-2 所示); 若有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少(如图 1-3 所示).

单调增加或单调减少的函数, 统称为单调函数. 相应的区间称为函数的单调区间.

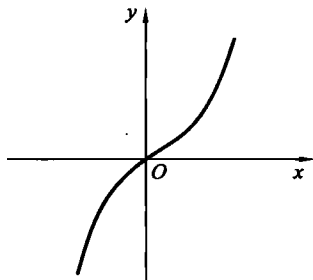


图 1-2

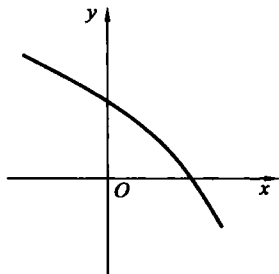


图 1-3

例 8 证明函数 $f(x)=5x-2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

证 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = (5x_1 - 2) - (5x_2 - 2) = 5(x_1 - x_2) < 0,$$

$$\text{即 } f(x_1) < f(x_2),$$

所以, $f(x)=5x-2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

4. 函数的周期性

定义 5 对于函数 $y=f(x)$, 如果存在常数 a , 使得 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数. 而满足该关系式的最小正常数 a 常称为函数的周期.

例如, $y=\sin x$ 是周期函数, 周期为 2π ; $y=\tan x$ 的周期为 π .

三、反函数

设某种商品的单价为 P , 销售量为 x , 则收入 y 是 x 的函数 $y=Px$, 这时 x 是自变量, y 是 x 的函数. 若已知收入 y , 反过来求销售量 x , 则有 $x=\frac{y}{P}$, 这时 y 是自

变量, x 变成 y 的函数了.

定义 6 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 值域为 W . 如果对于任意的 $y(y \in W)$, 通过关系式 $y=f(x)$, 都有唯一确定的 $x(x \in D)$ 与之对应, 则称这样确定的函数 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**, 原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

事实上, $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 互为反函数.

习惯上用 x 表示自变量, 用 y 表示函数, 因此, 往往把反函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$, 记作 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 9 求函数 $y=2x+1$ 的反函数.

解 由 $y=2x+1$, 得 $x=\frac{y-1}{2}$, 交换 x 和 y , 得 $y=\frac{x-1}{2}$.

所以 $y=2x+1$ 的反函数为 $y=\frac{x-1}{2}$.

可以验证, 单调函数一定存在反函数.

例 10 讨论函数 $y=\sin x, x \in D=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数.

解 由于定义域改变, 所以它不是通常所指正弦函数; 函数在定义域内是单调增加的, 它的值域是 $[-1, 1]$, 所以一定存在反函数. 记此反函数为 $y=\arcsin x$, 则它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

类似地, 可以定义其他的反三角函数 $\arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

四、基本初等函数

基本初等函数包括常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

1. 常值函数 $y=C$

常值函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 无论 x 取何值, 都有 $y=C$, 所以它的图像是与 x 轴平行或重合的直线.

2. 幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为实数)

幂函数当 μ 取不同值时, 其定义域不尽相同, 需分 $\mu > 0$ 和 $\mu < 0$ 两种情况讨论. 这里只讨论 $x \geq 0$ 的情形, $x < 0$ 时的图像可根据函数的奇偶性来确定.

当 $\mu > 0$ 时, 函数的图像通过原点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加且无界;

当 $\mu < 0$ 时, 函数的图像不过原点, 但仍通过点 $(1, 1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少且无界, 曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线.

3. 指数函数 $y=a^x (a>0, a\neq 1, a \text{ 为常数})$

指数函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 它的图像在 x 轴上方, 且通过点 $(0, 1)$.

当 $a>1$ 时, 函数单调增加且无界, x 轴的负半轴是曲线的渐近线; 当 $0<a<1$ 时, 函数单调减少且无界, x 轴的正半轴是它的渐近线.

4. 对数函数 $y=\log_a x (a>0, a\neq 1, a \text{ 为常数})$

对数函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 图像全部在 y 轴右方, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 曲线通过点 $(1, 0)$.

当 $a>1$ 时, 函数单调增加且无界, y 轴的负半轴是它的渐近线; 当 $0<a<1$ 时, 函数单调减少且无界, y 轴的正半轴是它的渐近线.

5. 三角函数

三角函数包括: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 值域均为 $[-1, 1]$, 以 2π 为周期, 是有界函数, 且 $y=\sin x$ 为奇函数, $y=\cos x$ 为偶函数.

$y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 且为奇函数, 并以 π 为周期, 在 $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为其渐近线.

$y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 且为奇函数, 并以 π 为周期, 在 $(k\pi, (k+1)\pi)$ 内单调减少, 直线 $x=k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为其渐近线.

6. 反三角函数

对于值域中的任何 y 值, 三角函数的自变量 x 均有无穷多个值与之对应, 因此在整个定义域上所有三角函数都不存在反函数. 只有限制 x 的取值范围后, 才能考虑其反函数.

反三角函数包括: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 为单调增加的奇函数.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[0, \pi]$, 为单调减少的非奇非偶函数.

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 为单调增加的奇函数.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $(0, \pi)$, 为单调减少的

非奇非偶函数.

五、复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义 7 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 W_φ , 若 W_φ 与 D_f 的交集不等于空集, 则 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可以复合成函数 $y=f[\varphi(x)]$, 称 y 为 x 的复合函数. 其中, x 是自变量, u 是中间变量, 此函数的定义域为 $\{x|x \in D_\varphi, \varphi(x) \in D_f\}$.

注 (1) 只有当 $W_\varphi \cap D_f \neq \emptyset$ 时, 两个函数才可以构成一个复合函数. 例如, $y=\ln u$ 与 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 就不能构成复合函数, 因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 的值域 $W_\varphi=\{u|u<0\}$ 与 $y=\ln u$ 的定义域 $D_f=\{u|u>0\}$ 的交集为空集.

(2) 复合函数还可以由两个以上的函数复合而成, 即中间变量可以有多个.

例 11 分析下列复合函数的构成:

$$(1) y=\sqrt{\cot \frac{x}{2}}; \quad (2) y=e^{\sin \sqrt{x^2+1}}.$$

解 (1) $y=\sqrt{u}$, $u=\cot v$, $v=\frac{x}{2}$; (2) $y=e^u$, $u=\sin v$, $v=\sqrt{t}$, $t=x^2+1$.

例 12 设 $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$, 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$, $g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合步骤所构成, 并且可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如, $y=\sqrt[3]{x^2+1}$, $y=(1+\sin x)^2$, $y=\arccos \sqrt{1-x}$ 等都是初等函数. 分段函数一般不是初等函数, 但 $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 仍是初等函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y=\sqrt{-x^2+5x-6}; \quad (2) y=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}+\ln x;$$

$$(3) y=\frac{1}{\sin 2x}; \quad (4) y=\sqrt{\ln \frac{x^2-9x}{10}}.$$

2. 设 $f(x+1)=2x^2$, 求 $f(x-1)$, $f[f(x)]$.