北大燕园

大学数学辅导丛书

微积分辅导

（上下册合订本）

编著　北京大学　李正元

国家行政学院出版社

大学数学辅导丛书

微积分辅导

（上下册合订本）

编著　北京大学　李正元

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分辅导/李正元编著．—北京：国家行政学院出版社，2011.6
ISBN 978-7-5150-0135-7

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①微积分-高等学校-自学参考资料　Ⅳ.①0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 129144 号

书　　名　微积分辅导
作　　者　李正元
责任编辑　李锦慧　樊克克
出版发行　国家行政学院出版社
　　　　　　（北京市海淀区长春桥路 6 号　100089）
电　　话　（010）82771887
经　　销　新华书店
印　　刷　北京市朝阳印刷厂
版　　次　2011 年 8 月第 1 版
印　　次　2011 年 8 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米 ×960 毫米　16 开
印　　张　25.75 印张
字　　数　630 千字
书　　号　ISBN 978-7-5150-0135-7/O · 004
定　　价　26.00 元

前　言

微积分课程对于大学生来说，其重要性是不言而喻的，近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一。在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目。然而，一方面近年来由于教学改革的实施，微积分授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面后续课程以及研究生入学考试对微积分的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，如何把大学期间微积分的学习与研究生入学考试复习紧密衔接，为此作者根据在北京大学多年的教学实践以及硕士研究生入学考试微积分辅导的经验，听取了广大学员的意见，参考了**同济·第二版**《微积分》及**中国人民大学**、**东北财经大学**等高等院校的现行教材，认真编写了这本《微积分辅导》。

本书每章设有**基本内容诠释与重要结论归纳**、**典型题型归纳及解题方法与技巧**。本书以讲清讲透**基本概念**为主线，希望能帮助同学把握并理解各章的基本概念和重要的定理与公式；并通过选编的**典型例题**，或是澄清基本概念与基本运算，或是指出同学解题中常犯的错误，或是介绍微积分中常用解题思路与技巧，并且许多题目给出了多种解法，通过这些希望能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通，提高同学分析解决问题的能力。

本书也可作为工科和其他非数学类专业的辅导教材。

要写好一本教材实非易事，疏漏错误在所难免，希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书不断完善！

李正元

于北大燕北园

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函数

一、基本内容诠释与重要结论归纳

1. 函数概念

(1) 函数的定义　设在某一过程中有两个变量x与y,若对变量x在其变化域X中的每一个值,依照某一对应关系,变量y都有唯一确定的一个值与之对应,我们就称变量y是变量x的函数,记作

$$y = f(x) \quad (x \in X).$$

这时x称为自变量,y称为因变量.自变量x的变化域X称为函数的定义域,记为$D(f)$,而相应的因变量y的变化域Y称为函数的值域,记为$R(f)$.

(2) Y是函数的值域的充要条件　设函数$y = f(x)$的定义域是X,则Y是$f(x)$的值域的充要条件是:$\forall x \in X$,有$f(x) \in Y$,且$\forall y \in Y$,至少$\exists$一个$x \in X$,使得$f(x) = y$.

(3) 函数定义中的两个要素　定义域与对应规则是函数定义中的两个要素.值域随定义域与对应规则而确定.两个函数当且仅当定义域相同且对应规则相同时,这两个函数才是相同的.若函数有分析表达式,使分析表达式有意义的自变量的取值范围就是函数的自然定义域.在具体问题中,自然定义域不一定就是定义域.

(4) 函数概念的实质　函数表示法(如分析表示法,图示法,列表法等)只是两个变量间函数关系的表现形式,变量之间是否存在函数关系,就看是否存在一种对应规则,使得其中一个量定了,另一个量就被唯一确定,它不依赖于对应规则的表现形式.一个函数可以没有分析表达式,即使有分析表达式,在整个定义域上也不一定有统一的表达式.如所谓分段函数,在整个定义域上自变量的不同变化范围,对应规则用不同的式子来表示.

(5) 常量与变量　自变量与因变量是相对的.一个量在某个过程中是常量,在另一过程中可以是变量.一个量在某个过程中是自变量,在另一个过程中可以是因变量,这一点既简单又重要.

2. 几类常见的函数

(1) 有界函数　若$\exists$常数$M > 0$,$\forall x \in X$有$|f(x)| \leqslant M$,称$f(x)$在X上有界,也称$f(x)$在X上是有界函数.

几何意义是:$y = f(x)$的图形位于直线$y = M$与$y = -M$之间.

(2) 奇偶函数　设X关于原点对称(若$x \in X \Rightarrow -x \in X$),若$\forall x \in X$,有

$$f(x) = f(-x) \quad (f(x) = -f(-x)),$$

则称$f(x)$在X上是偶(奇)函数.

偶函数的图形关于y轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

(3) 单调函数 设$f(x)$定义在区间X上,$\forall x_1,x_2 \in X$,若$x_1 < x_2$,有$f(x_1) < f(x_2)$($f(x_1) > f(x_2)$),则称$f(x)$在区间X上单调增加(单调减少),它们统称为单调函数.单调增加(单调减少)也称为单调上升或单调递增(单调下降或单调递减).

$\forall x_1,x_2 \in X$,若$x_1 < x_2$,有$f(x_1) \leqslant f(x_2)$($f(x_1) \geqslant f(x_2)$),则称$f(x)$在区间X上单调不减(单调不增).

(4) 周期函数 设$f(x)$定义在X上,若$\exists$常数$T \neq 0$,满足:$\forall x \in X$,有$x \pm T \in X$,且$f(x+T) = f(x)$($\forall x \in X$),则称$f(x)$为周期函数,T为$f(x)$的周期.它的几何意义是:自变量每增加或减少一个固定的距离T后图形重复出现.

周期函数一定有无穷多个周期,若T是$f(x)$的周期,则对$\forall$自然数n,$\pm nT$均是它的周期.若无穷多个周期中,有一个最小的正数,则称它为最小周期,简称为周期.

3. 复合函数

设函数$y = f(u)$的定义域包含函数$u = \varphi(x)$的值域,则在函数$u = \varphi(x)$的定义域X上可以确定一个函数$y = f[\varphi(x)]$($x \in X$),称为由$u = \varphi(x)$与$y = f(u)$复合而成的复合函数.u称为中间变量.中间变量u在函数$y = f(u)$中是自变量,而在函数$u = \varphi(x)$中是因变量.

4. 反函数

(1) 反函数的定义 设函数$y = f(x)$的定义域为X,值域为Y.若$\forall y \in Y$,有唯一确定的$x \in X$使得$f(x) = y$,由此对应关系在Y上确定了一个函数,称为$y = f(x)$的反函数,记为$x = f^{-1}(y)$.

(2) 函数与其反函数的关系 设$y = f(x)$,定义域为X,值域为Y.若$y = f(x)$存在反函数$x = f^{-1}(y)$,则它的定义域为Y,值域为X,且有

$$f[f^{-1}(y)] = y \quad (\forall y \in Y), \qquad f^{-1}[f(x)] = x \quad (\forall x \in X).$$

$y = f(x)$与$x = f^{-1}(y)$的图形重合,$y = f(x)$与$y = f^{-1}(x)$的图形关于直线$y = x$对称.

(3) 反函数的存在性 $f(x)$在X上存在反函数$\Leftrightarrow \forall x_1,x_2 \in X$,若$x_1 \neq x_2$,则

$f(x_1) \neq f(x_2)$.

单调函数一定存在反函数,且反函数有相同的单调性.

5. 基本初等函数

常数函数($y = c$), 幂函数($y = x^a$), 指数函数($y = a^x$), 对数函数($y = \log_a x$),

三角函数($y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$),反三角函数($y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x, \operatorname{arcsec} x, \operatorname{arccsc} x$)称为基本初等函数.

要熟悉这些函数的函数关系,定义域,函数图形和一些性质(包括有界性、奇偶性、单调性与周期性等).

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算以及复合运算而得到的函数称为初等函数.

二、典型题型归纳及解题方法与技巧

1. 函数的有界性,奇偶性,单调性与周期性

【例 1.1.1】 指出下列函数的定义域,值域,奇偶性,周期性(若是周期函数,指出其周期即最小周期)和有界性.

(1) $y = |x|$; (2) $y = \sqrt{x(4-x)}$;

(3) $y = \cos^2 x + 2$; (4) $y = |\sin x| + |\cos x|$.

【解】 (1) $D(f) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,$R(f) = \{y \mid y \geqslant 0\}$,偶函数,非周期,无界.

(2) $D(f) = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$,$R(f) = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$,非奇非偶函数,非周期的有界函数.

(3) $D(f) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,$R(f) = \{y \mid 2 \leqslant y \leqslant 3\}$,偶函数,周期函数(周期$\pi$),有界.

(4) $D(f) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,$R(f) = \{y \mid 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}\}$,偶函数,周期函数$\left(周期\dfrac{\pi}{2}\right)$,有界.

评注 若$y = f(x)$的定义域$D(f) = X$,要证它的值域$R(f) = Y$,即证:1° $\forall x \in X$, $f(x) \in Y$;2° $\forall y \in Y$,存在$x \in X$,使得$f(x) = y$.

对于题(1),(3)易得到它们的值域.

对于题(4),考察 $y^2 = 1 + 2|\sin x\cos x| = 1 + |\sin 2x|$,由此得$y^2$的值域为$[1,2]$.于是$y$的值域为$[1,\sqrt{2}]$.

对于题(2),可用配方法得 $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$,由此可得相应的值域.

或者,$\forall x \in [0,4]$,$\Rightarrow y \geqslant 0$.又对$y \geqslant 0$,考察方程

$$\sqrt{x(4-x)} = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{4-y^2},$$

当$y \geqslant 0$时,仅当$y \in [0,2]$才有解$x \in [0,4]$.因此求得值域为$[0,2]$.

【例 1.1.2】 设$f(x) = x\sin x\, e^{\cos x}$ $(-\infty < x < +\infty)$,则$f(x)$是

(A) 有界函数. (B) 单调函数.

(C) 周期函数. (D) 偶函数.

【分析】 由$\sin x$,$\cos x$分别是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数和偶函数,于是$\forall x \in (-\infty,+\infty)$,有 $f(-x) = [-x\sin(-x)]e^{\cos(-x)} = (-1)^2 x\sin x e^{\cos x} = f(x)$.

$\Rightarrow$ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$为偶函数.故应选(D).

评注 ① 我们也可用奇偶函数的运算性质:"两个奇函数之积是偶函数,两个偶函数之积为偶函数,任一函数$g(u)$与偶函数$u = h(x)$的复合$g[h(x)]$也是偶函数"等来证明该例中的$f(x)$是偶函数.

② 要证$f(x)$在定义域X上无界,则应说明任何正数M都不是$f(x)$的界,也就是要证:对于任意给定的$M > 0$,都存在点$x_M \in X$,使得$|f(x_M)| > M$成立.

③ 若存在$x_1,x_2,x_3 \in X$且$x_1 < x_2 < x_3$,但$f(x_1) < f(x_2)$,$f(x_2) > f(x_3)$(或$f(x_1) > f(x_2)$,$f(x_2) < f(x_3)$)同时成立,则$f(x)$在区间X上不是单调函数.

2. 证明函数的单调性,有界性与周期性

【例 1.1.3】 记$[x]$为不超过 x 的最大整数,如$[3.7]=3,[-4.35]=-5$,称 $y=[x]$ 为取整函数.求证:$f(x)=x-[x]$ 在$(-\infty,+\infty)$是有界周期函数.

【分析与证明】 可通过取整函数 $y=[x]$ 分段变化的规律来了解函数$f(x)=x-[x]$是怎样变化的:

当 $n\leqslant x<n+1\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,$n+1\leqslant x+1<n+2$,按定义有

$$\begin{aligned}&[x]=n,\quad [x+1]=n+1,\\&0=n-n\leqslant f(x)=x-[x]<(n+1)-n=1,\\&f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-(n+1)\\&\qquad\qquad=x-n=x-[x]=f(x).\end{aligned}$$

因此$f(x)$是有界的,并且是以 1 为周期的周期函数.

【例 1.1.4】 求证: $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 在$(-\infty,+\infty)$单调增加.

【证明】 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty),x_2>x_1$,我们有

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}\\&=\frac{(e^{x_2}-e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})-(e^{x_1}-e^{-x_1})(e^{x_2}+e^{-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}\\&=\frac{2[e^{x_2-x_1}-e^{-(x_2-x_1)}]}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0,\end{aligned}$$

因此,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$单调增加.

3. 利用函数概念求函数表达式

【例 1.1.5】 设$f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上,且满足:

$$2f(x)+f(1-x)=x^2.$$

求 $f(x)$ 的表达式.

【分析与求解】 注意: $f(x)=f[1-(1-x)]$,在等式

$$2f(x)+f(1-x)=x^2\tag{$*$}$$

中将 x 换成 $1-x$,得

$$2f(1-x)+f[1-(1-x)]=(1-x)^2,$$

即

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2.\tag{$**$}$$

由($*$)式乘 2 减去($**$)式即可消去$f(1-x)$得

$$3f(x)=2x^2-(1-x)^2,\text{即}\quad 3f(x)=x^2+2x-1,$$

亦即

$$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1),\forall x\in(-\infty,+\infty).$$

4. 求复合函数的定义域

【例 1.1.6】 设 $y=f(x)$ 的定义域为$[0,2]$,求下列函数的定义域:

(1) $y = f(\mathrm{sgn}x)$,其中 $\mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$ (2) $y = f(x + a) + f(x - a), a > 0$.

【解】 若已知 $y = f(x)$ 的定义域为 X,求复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域即求 $u = \varphi(x)$ 的定义域中最大部分使得相应的值域等于或属于 X.

(1) 仅当 $x \geqslant 0$ 时 $u = \mathrm{sgn}x$ 的值域属于$[0,2]$,所以 $y = f(\mathrm{sgn}x)$ 的定义域为$[0, +\infty)$.

(2) $y = f(x + a) + f(x - a)$ 的定义域为 $\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 2, \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 2. \end{cases}$

当 $a \leqslant 1$ 时,定义域为 $a \leqslant x \leqslant 2 - a$;当 $a > 1$ 时,这个函数没有定义.

5. 求复合函数

【例 1.1.7】 求下列函数的复合函数:

(1) 设 $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = 2^x$,求 $\varphi[\varphi(x)], \varphi[\psi(x)], \psi[\varphi(x)], \psi[\psi(x)]$.

(2) 设$g(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leqslant 0, \\ 2 + x, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geqslant 0. \end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 与 $f[g(x)]$.

(3) 设 $f(x) = \sin x, g(x) = \arcsin x$,求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

【解】 (1) 令 $u = \varphi(x)$,则 $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(u) = u^2 = [\varphi(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4$.

令 $u = \psi(x)$,则 $\varphi[\psi(x)] = \varphi(u) = u^2 = [\psi(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x$.

变量替换的过程可以省略,即

$$\psi[\varphi(x)] = 2^{\varphi(x)} = 2^{x^2}; \quad \psi[\psi(x)] = 2^{\psi(x)} = 2^{2^x}.$$

(2) 直接用代入法. 求 $g(f(x))$ 时,先用$f(x)$ 代替 x,得

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 - f(x), & f(x) \leqslant 0, \\ 2 + f(x), & f(x) > 0. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知,当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$;当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x < 0$;当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$. 于是

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 - (-x), & x \geqslant 0, \\ 2 + x^2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 + x, & x \geqslant 0, \\ 2 + x^2, & x < 0. \end{cases}$$

用同样方法可求 $f[g(x)] = \begin{cases} [g(x)]^2, & g(x) < 0, \\ -g(x), & g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

注意 $g(x) = 2 + |x| \geqslant 2$,因而 $g(x) < 0$ 的解是空集,$g(x) \geqslant 0$ 恒成立,于是

$$f[g(x)] = -g(x) = -2 - |x|.$$

(3) 注意函数与反函数的关系及反三角函数的主值 ⇒

$$f[g(x)] = \sin(\arcsin x) = x \ (x \in [-1,1]).$$

当 $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ 时, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x - k\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

令 $t = x - k\pi$,则

$$\begin{aligned} \arcsin[\sin(t + k\pi)] &= \arcsin[(-1)^k \sin t] = (-1)^k \arcsin(\sin t) \\ &= (-1)^k (x - k\pi), \end{aligned}$$

即 $\arcsin(\sin x) = (-1)^k(x - k\pi), x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right] (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

6. 求反函数

【例 1.1.8】 求下列函数的反函数:

(1) $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)(|x| \geqslant 1)$; (2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(x \in (-\infty, +\infty))$.

【解】 (1) 考察方程 $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$即 $x^2 - 2xy + 1 = 0$,它有解 $\Leftrightarrow y^2 \geqslant 1$,解为

$$x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

当 $y \geqslant 1$ 时,$x = y + \sqrt{y^2 - 1} \geqslant 1$(另一要舍去,因 $0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leqslant 1$).

当 $y \leqslant -1$ 时,$x = y - \sqrt{y^2 - 1}$(另一要舍去,因 $-1 \leqslant y + \sqrt{y^2 - 1} < 0$).

因此,所求反函数为 $y = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1}, & x \geqslant 1, \\ x - \sqrt{x^2 - 1}, & x \leqslant -1. \end{cases}$

评注 不要把该题中的反函数写成

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1}(x \geqslant 1) \text{ 和 } y = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \leqslant -1),$$

这样容易误解为有两个反函数.

(2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

又 $$y = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = -\ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \Leftrightarrow e^{-y} = -x + \sqrt{x^2 + 1},$$

两式相减得 $e^y - e^{-y} = 2x$. 反函数 $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}), y \in (-\infty, +\infty)$.

因此,所求反函数为 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), x \in (-\infty, +\infty)$.

评注 若能确定 Y, $\forall y \in Y$,则 $y = f(x)$ 可唯一解出 x, $\forall y \notin Y$,方程 $y = f(x)$ 无解,则不仅求出了反函数,而且也求出了反函数的定义域 Y.

【例 1.1.9】 求 $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$ 的反函数.

【解】 当 $x < -1$ 时,$y = 1 - 2x^2 < -1$,解得 $x = -\sqrt{\frac{1 - y}{2}}$(另一舍去);

当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时,$y = x^3 \in [-1,8]$, $\forall y \in [-1,8]$,解得 $x = \sqrt[3]{y}$;

当 $x > 2$ 时,$y = 12x - 16 > 8$, $\forall y > 8$,解得 $x = \frac{y + 16}{12}$.