Sobolev空间与变分原理

Sobolev Space and Variational Principles

张维弢 著

中国科学技术大学出版社

当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书

Sobolev空间与变分原理

Sobolev Space and Variational Principles

张维弢 著

中国科学技术大学出版社

内容简介

第1章讲述Sobolev空间，这是变分方法和分析的理论基础，介绍迹定理、紧性定理、嵌入定理及其新进展.第2章讲述Peter Li和丘成桐(1983)的本征值估计及其应用和改进.第3章讲述椭圆算子在Sobolev空间的可解性、变分不等方程、单调算子理论和山路定理.第4章讲述Lions(1973)创立的渐近分析理论、stiff问题的渐近展开和椭圆边界层问题的一般收敛定理，解决了Lions(1973)中的一个公开的问题，分析了边界层形态的变化，给出改进后的Brézis不等式在渐近分析和渐变引起突变中的应用.第5章讲述Lions(1988)的HUM和利用乘子方法建立的积分恒等式、Haraux引理(1978,1989,1994)及其改进，统一和扩展了法国学者的波方程边界反馈的镇定性.第6章讲述变分方法在几何和相对论中的应用，给出Gauss曲率和平均曲率的变分计算，介绍Riemann几何初步，讨论数量曲率的变分，分析Einstein用物理直觉建立广义相对论场方程和Hilbert用变分论证建立场方程的条件.场方程在弱场和无奇点的条件下是成立的，依此，对宇宙起源于奇点给予质疑.

本书可作为高等院校数学系相关专业高年级学生和研究生的教材或学习参考书，也可供从事偏微、几何和相对论等学科的研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

Sobolev空间与变分原理/张维弢著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013.1

(当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书：中国科学技术大学校友文库)

"十二五"国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-312-03004-8

Ⅰ.S… Ⅱ.张… Ⅲ.泛函分析—应用—变分(数学) Ⅳ.①O177.92 ②O176

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第271070号

出版发行 中国科学技术大学出版社
地址 安徽省合肥市金寨路96号，230026
网址 http://press.ustc.edu.cn
印　　刷 合肥晓星印刷有限责任公司
经　　销 全国新华书店
开　　本 710 mm×1000 mm 1/16
印　　张 20.25
字　　数 342千
版　　次 2013年1月第1版
印　　次 2013年1月第1次印刷
定　　价 58.00元

编 委 会

总　序

大学最重要的功能是向社会输送人才，培养高质量人才是高等教育发展的核心任务.大学对于一个国家、民族乃至世界的重要性和贡献度，很大程度上是通过毕业生在社会各领域所取得的成就来体现的.

中国科学技术大学建校只有短短的五十余年，之所以迅速成为享有较高国际声誉的著名大学，主要就是因为她培养出了一大批德才兼备的优秀毕业生.他们志向高远、基础扎实、综合素质高、创新能力强，在国内外科技、经济、教育等领域做出了杰出的贡献，为中国科大赢得了“科技英才的摇篮”的美誉.

2008 年 9 月，胡锦涛总书记为中国科大建校五十周年发来贺信，对我校办学成绩赞誉有加，明确指出：半个世纪以来，中国科学技术大学依托中国科学院，按照全院办校、所系结合的方针，弘扬红专并进、理实交融的校风，努力推进教学和科研工作的改革创新，为党和国家培养了一大批科技人才，取得了一系列具有世界先进水平的原创性科技成果，为推动我国科教事业发展和社会主义现代化建设做出了重要贡献.

为反映中国科大五十年来的人才培养成果，展示我校毕业生在科技前沿的研究中所取得的最新进展，学校在建校五十周年之际，决定编辑出版《中国科学技术大学校友文库》50 种.选题及书稿经过多轮严格的评审和论证，入选书稿学术水平高，被列入“十一五”国家重点图书出版规划.

入选作者中，有北京初创时期的第一代学生，也有意气风发的少年班毕业生；有“两院”院士，也有中组部“千人计划”引进人才；有海内外科研院所、大专院校的教授，也有金融、IT 行业的英才；有默默奉献、矢志报国的科技将军，也有在国际前沿奋力拼搏的科研将才；有“文革”后留

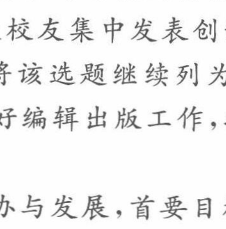
美学者中第一位担任美国大学系主任的青年教授，也有首批获得新中国博士学位的中年学者……在母校五十周年华诞之际，他们通过著书立说的独特方式，向母校献礼，其深情厚谊，令人感佩！

《文库》于 2008 年 9 月纪念建校五十周年之际陆续出版，现已出书 53 部，在学术界产生了很好的反响. 其中，《北京谱仪Ⅱ：正负电子物理》获得中国出版政府奖；中国物理学会每年面向海内外遴选 10 部“值得推荐的物理学新书”，2009 年和 2010 年，《文库》先后有 3 部专著入选；新闻出版总署总结“‘十一五’国家重点图书出版规划”科技类出版成果时，重点表彰了《文库》的 2 部著作；新华书店总店《新华书目报》也以一本书一个整版的篇幅，多期访谈《文库》作者. 此外，尚有十数种图书分别获得中国大学出版社协会、安徽省人民政府、华东地区大学出版社研究会等政府和行业协会的奖励.

这套发端于五十周年校庆之际的文库，能在两年的时间内形成现在的规模，并取得这样的成绩，凝聚了广大校友的智慧和对母校的感情. 学校决定，将《中国科学技术大学校友文库》作为广大校友集中发表创新成果的平台，长期出版. 此外，国家新闻出版总署已将该选题继续列为“十二五”国家重点图书出版规划，希望出版社认真做好编辑出版工作，打造我国高水平科技著作的品牌.

成绩属于过去，辉煌仍待新创. 中国科大的创办与发展，首要目标就是围绕国家战略需求，培养造就世界一流科学家和科技领军人才. 五十年来，我们一直遵循这一目标定位，积极探索科教紧密结合、培养创新拔尖人才的成功之路，取得了令人瞩目的成就，也受到社会各界的肯定. 在未来的发展中，我们依然要牢牢把握“育人是大学第一要务”的宗旨，在坚守优良传统的基础上，不断改革创新，进一步提高教育教学质量，努力践行严济慈老校长提出的“创寰宇学府，育天下英才”的使命.

是为序.



中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士
2010 年 12 月

序

1975年9月吴新谋先生发表译文——《J. L. Lions的工作的短评》，这篇译文对思考中国数学，特别是应用数学发展之路的人们是一份珍贵的参考资料. 1985年11月至1986年12月，笔者有机会赴法，对Lions学派有了一些接触. 笔者认为他们有如下特点：

(1) Schwartz创立广义函数后，曾预言偏微分方程"将会得到重新重视并获得完全重新的发展"，Lions与合作者以其卓越的工作，实现了其导师的预言. 他们利用广义函数深刻地研究了Sobolev空间，建立了迹和内插理论，创立了非齐次边值理论和变分不等方程理论，用当代的数学理论改造和重建了自Poincaré以来近一个世纪的渐近分析理论，建立了分布参数控制理论和许多重要的应用数学的新分支.

(2) 高度重视数值分析，以此检验理论，并从中找到发展创新的素材.

(3) 从技术科学的需求中找课题，高度重视工程师的实践经验.

(4) 多学科多领域的专家组成交叉互动联合作业队伍，深加工所获得的素材，产生新理论、新方法.

笔者十分初步、十分不完全地学习了Lions的一些著作，同时十分初步、十分不完全地调研和学习了这一学派与己有关的领域目前的新进展. "十分初步、十分不完全"的含义是，仅从书本上、论文中学习，没有在产生理论的实际中去寻找问题，有的书仅认真学习了其中的部分内容，而非全部内容，没有下决心学会使用计算机和数值分析.

本书是笔者多年学习的总结，主要内容如下：

第 1 章讲述 Sobolev 空间的基础知识、迹定理、嵌入定理和紧性定理等.给出 $H_0^1(\Omega)$,$H_0^2(\Omega)$,$H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$中的常用不等式和等式,讨论 $H^1(\Omega)$中的等价范数.利用 Fourier 变换,直接证明了迹定理.利用 Hadamard 的例和解析开拓,给出单位圆上的迹定理的实例.讨论检验嵌入定理达到至极 Sobolev 空间阶数的函数和接近至极阶数的函数,给出对函数取 log 后不影响 Sobolev 空间阶数的函数,当 $n=2$ 时,分析了由这些函数构成的 $\mathbf{R}^3$ 中曲面的 Gauss 曲率在奇点的量级(见 1.1 节和 1.7 节).给出嵌入定理不能表达其可积性的值得注意的函数(见 1.4 节式(1.4.7)).讨论了嵌入定理的新进展:当 $n\geqslant 3$ 时,证明了 Trudinger 不等式(1967)(丘成桐、孙理察和张恭庆的书给出 $n=2$ 的流行情形的证明,Ладыженская(1985)给出 $n\geqslant 3$ 的表达式,但没有给出证明),在 Brézis(1980,1981)和丁夏畦(1982)的基础上,证明了改进的极限情形的 Sobolev 不等式(见 1.7 节式(1.7.87)).

第 2 章讲述 Peter Li 和丘成桐(1983)利用 Hörmander 建议的引理与郑绍远和 Peter Li(1981)引入的截断估计技巧,给出 0 边值条件的 Laplace 算子本征值估计,这使 Pólya 猜想的解决前进了一大步.2.3 节和 2.4 节,利用改进后的 Hörmander 引理,对 Peter Li 和丘成桐的 λ_1 估计给出一个小改进.2.5 节利用 CLY(Cheng-Li-Yau)技巧,讨论具有间断系数椭圆算子的本征值估计,并提出一些笔者无法解决的问题.2.6 节讨论近年来由柔性结构控制产生的一类新型本征值问题.

第 3 章 3.1 节讨论 $2m$ 阶椭圆算子在 $H^m(\Omega)$中的可解性.3.2 节讲述二阶椭圆算子在 $H^2(\Omega)$中的可解性,并介绍非齐次边值问题.3.3 节讲述变分不等方程.3.4 节讲述单调算子理论.3.5 节讲述山路定理和临界值的分类,并给出方程、力学和几何中临界值类型的实例.

第 4 章 4.1 节讲述"硬"(英文"stiff",法文"raide")问题在变分形式中,从 ε 负幂的渐近展开.当一些问题的存在唯一和数值分析遇到困难时,仍然可用渐近分析解决(见 4.1 节的例 4.2).全局非线性的渐近分析是 Lions(1973)[92]提出的公开问题(见 4.1 节注记 4.1.5).4.2 节讲述椭圆边界层问题的一般的收敛定理和边界层现象的力学与数学描述.4.3 节讲述 Tartar 对二阶方程的边界层形态分析和Lions(1973)[210,355]上提出的公开问题.4.4 节讲述 Lions 公开问题的解决、四阶方程的边界层形态

分析.4.5节利用改进后的Brézis不等式讨论渐近分析的传统的Poincaré定义与Lions的定义的区别.4.6节利用改进的一般的Pohozaev恒等式给出边界层形态的另一描述.4.7节利用改进的Brézis不等式,给出具有突变点,渐变引起突变的实例,并提出刻画边界层形态的量也应具有突变点的猜想,但多年来,笔者未能给出证明.

第5章5.1节讲述流形上的Gagliardo-Nirenberg不等式(1959)在波方程全局非线性边界反馈的镇定性中的应用,改进了Zuazua(1991)局部非线性边界反馈的镇定性结果.5.2节讲述Lions(1988)创立的HUM,HUM是建立在利用常数乘子$Mu=2m\cdot\nabla u+(n-1)u$,进行能量估计(即先验估计)的基础之上的.在这一节中,我们引入变数乘子和函数乘子$Mu=\xi m\cdot\nabla u+\eta u$,建立相应这些乘子的更加完全的能量积分恒等式(乘子引理),为统一和扩展法国学者的结果准备条件.5.3节讲述Haraux引理(1978,1989,1994)及其改进.5.4节讲述利用变数乘子引理和Haraux引理,统一和扩展法国学者(1991,$n\geqslant3$;1994,$n=2$)波方程边界反馈的结果,并引入指数衰减域和敏感反馈系数的概念.5.5节讲述波方程第三边值问题的精确可控性及其近似.5.6节讲述利用流形上改进的Brézis不等式和内插定理,讨论函数乘子引理在椭圆方程中的应用.

第6章6.1节给出Gauss曲率和平均曲率的变分计算.6.2节讲述Riemann几何初步,建立二维流形上的方程$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=0$.这个方程是通向Gauss-Bonnet公式的桥梁.值得注意的是,这个方程与广义相对论中真空中的场方程具有相同的形式.6.3节讲述几何中的测地线是由变分原理定义的,而测地线的参数(自变元)是弧长.在引力时空中质点运动是被假定由该时空中的测地线来描述的.测地线的参数是时空中的事件间距τ,τ由时间和空间的结合而定义,τ是第一位的,而单独提到时间或空间是第二位的.τ在坐标变化下不变,这是基于光速不变原理得到的.而作为20世纪人类最伟大的发现之一的光速不变原理,是以铁的实验事实为依据的.尽管引力时空中质点运动的描述有人为"假设"的因素,但它经受了实际观测的检验,因而比传统力学更精确、更有生命力.6.4节讲述数量曲率的变分.在场正规(假定场光滑无奇点)的情形

下，可证 $\delta\int_{\omega} RG^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}U=\int_{\omega}(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R)\delta g^{ik}\mathrm{d}U$，上式成立的条件是在 ω 上处处可建立测地坐标系．若在 ω 上有奇点，测地坐标系不能建立，则上式不成立．利用测地平移（对比测地线，测地平移也有变分最优的含义）和 $R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=0(n=2)$，可以给出 Gauss 曲率表示测地平移的点态扭曲性（见 6.4 节式(6.4.35)）．6.5 节讲述 Einstein 利用物理直觉建立场方程和 Hilbert 利用变分论证建立场方程．Einstein 曾假设场方程的左边只有 R_{ik}，后改为左边 $L_{ik}=R_{ik}+ag_{ik}R$，在弱场（即引力场的时空度规近似等于无引力的 Minkowski 时空度规，二者之差的一阶导数甚小）的条件下，利用 Riemann 几何中的 Bianchi 恒等式的缩并和能量守恒定律定出 $a=-\frac{1}{2}$．再通过 Riemann 几何公式（见 6.2 节的式(6.2.10)）在弱场情形下的近似，并对比引力势 $\overline{\phi}$ 满足 $\Delta\overline{\phi}=4\pi\overline{G}\rho$，而定出 $L_{ik}=c_1T_{ik}$，$c_1=-8\pi G$．分析场方程的建立过程可知，场方程适用于弱场条件，不适用于数学意义下的奇点．而 Hilbert 变分论证建立场方程的理论基础是 6.4 节，条件是测地坐标系成立，有奇点场方程不成立．6.6 节假设 Einstein 场方程处处成立，假设宇宙服从于正数量曲率的 Friedmann 模型，在 Einstein(2001,1961) 的基础上，经过计算，我们可以得出宇宙的膨胀期和收缩期．宇宙始于起点而止于终点．因为在奇点处场方程不成立，宇宙始于奇点是一个待商榷的问题，引用 Prigogine 的论述更加重了笔者对这个问题的疑虑．

回首往事，最幸运的是笔者 1960 年考入中国科学技术大学数学系，遇到了吴文俊老师．吴师授课极认真严谨，通过学习，学生们感悟到要养成在读学懂[①]中至理求索的能力，要树立几何直观、数形结合的理念．名家教大学生，不仅会传道授业解惑，而且会在学子的一生中留下不尽的回忆、对比、感动和震撼．这是学子们学业长进、知识升华、素质锤炼、知难而进的动力．笔者在中国科学技术大学研究生院和中国科学院研究生院讲授了 19 个学期“偏微概论”课，在中国科学院数学与系统科学研究

① “读学懂”三字出自：胡作玄，石赫．国家最高科学技术奖获奖人丛书．吴文俊之路[M]．上海：上海科学技术出版社．字下三点是笔者加的．

院讲授“渐近分析”“Lions 的最优控制与 Einstein 的相对论”“相对论的意义”等课，获中国科学院华为奖教金、五个学期的优良课程奖、2008 年中国科学院研究生院“杰出贡献教师”称号.这归功于吴师的榜样力量的感动和鼓舞，在此向吴师表示深切的谢意.大学毕业时间越久，越深地感受到吴师授课的含义，学习吴师科学巨匠的品格，我等小兵之辈，只能从微力所及之事、一点一滴做起.

1996 年，J. L. Lions 教授在推荐修改笔者与冯德兴(1996B)的稿件时，给笔者寄来一本新书——V. Komornik(1994).没有对这本书的学习，就没有本书的第 5 章.Lions 教授虽然已经故去，但每当想起异国老师审稿寄书之事，笔者的心就久久不能平静.

感谢法国 L. Tartar 教授关于边界层问题的来信(见第 4 章 4.4 节).

笔者退休前十年转向学习控制理论.在这期间，笔者受到了陈翰馥教授和秦化淑教授多方面的鼓励、支持和帮助，他们这种为发展学业可贵的包容情怀，使笔者深受感动，在此向两位教授表示深切的谢意.

冯德兴教授细心给笔者讲解补习算子半群理论描述的可控性问题，并经常就发展前沿进行讨论，这种交流切磋使笔者受益匪浅，不同学科的交叉融合，会产生意想不到的新成果，笔者对冯德兴教授的热情帮助表示衷心的感谢.

衷心感谢丁夏畦老师对笔者学习 Fourier 分析和 Sobolev 空间的热情指导和帮助.

审稿人提出了宝贵的修改建议，笔者对此表示深切的谢意.

感谢中国科学技术大学出版社出版校友文库，感谢侯建国校长为文库写的充满深情寄托的序言.出版校友文库是创办世界一流研究型大学的有远见卓识的举措.祝愿母校人才辈出，祝愿中科大学子勇攀世界科学高峰和创造世界科学高峰.

笔者志小学浅才疏，所提出的问题仅供参考，切勿费时思考，应把时间和精力用于解决著名数学家提出的问题上，这可提高水平，早日成才.

张维弢

2012 年 6 月 15 日

目　　次

第 1 章　Sobolev 空间

本章内容包括分布(广义)导数的引入、可导与可积相结合的 Sobolev 空间、嵌入定理描述函数的可积性与光滑性、内部与边界 Sobolev 空间关系的表述——迹定理、迹定理引出算子、算子族的内插定理和 Sobolev 空间的内插定理.

1.1　Sobolev 空间的引入

1.1.1　求导认识的深化

设 $\Omega=(a,b)$，u 在 (a,b) 上一次可导，设 $C_0^1(a,b)=\{\phi\mid\phi$ 在 (a,b) 上一次可导，且 $\phi(a)=\phi(b)=0\}$. 由 $(u\phi)'=u'\phi+u\phi'$，$\phi\in C_0^1(a,b)$，利用 Newton-Leibniz 公式，在 (a,b) 上积分，有

$$\int_a^b u'\phi\,\mathrm{d}x=-\int_a^b u\phi'\,\mathrm{d}x,\quad\forall\,\phi\in C_0^1(a,b).\tag{1.1.1}$$

设存在一个函数 w 满足

$$\int_a^b w\phi\,\mathrm{d}x=-\int_a^b u\phi'\,\mathrm{d}x,\quad\forall\,\phi\in C_0^1(a,b).\tag{1.1.2}$$

我们暂时称 w 为 u 的广义导数并记为 $\mathrm{D}u$，称 ϕ 为检验函数. 引入记号

$\langle u,v\rangle=\int_a^b uv\mathrm{d}x$,则式(1.1.2)记为

$$\langle \mathrm{D}u,\phi\rangle=-\langle u,\mathrm{D}\phi\rangle,\quad \forall\,\phi\in C_0^1(a,b).\qquad(1.1.2')$$

若 u 在(a,b)上一次可导,由式(1.1.1)、式(1.1.2′)可知,$\mathrm{D}u=u'$.以后我们会看到:若 u 在(a,b)上不是一次可导,如有奇点或间断点,则 $\mathrm{D}u$ 与传统导数相比就很不同,且这些不同点还依赖空间维数.

从 1665 年微积分创立(Bell(2004)[116])以来的两个半世纪期间,人们都沿用传统导数定义,只是到了 20 世纪二三十年代(Evans(1920),Wiener(1926),Morrey(1933),Friedrichs(1934),Leray(1934),Sobolev(1936)),人们才开始认识到用式(1.1.2′)含检验函数 ϕ 的积分形式定义导数要更先进、更合理.由此,产生了广义函数(即视其为泛函,Schwartz(1950)).就一般情形来说,检验函数的集合怎样定义,广义函数怎样定义,广义函数的导数怎样定义,广义导数比传统导数广在何处,这些都是我们要研究的问题.

1. $\mathscr{D}(\Omega)$

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$($n\geqslant2$,特殊情形 $n=1$)中的有界开集,$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$,$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$,其边界 Γ($n\geqslant2$)是无限可微的($n-1$)维 Riemann 流形,ν 是 Γ 的单位外法线.

我们定义函数 ϕ 的支集 $\operatorname{supp}\phi=\{x\mid\phi(x)\neq0\}$的闭包

$$\mathscr{D}(\Omega)=\{\phi\mid\phi\text{ 在 }\Omega\text{ 上无限可微且紧支集包含于 }\Omega\}.$$

设函数列$\{\phi_i\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$,我们称$\lim\limits_{i\to\infty}\phi_i=0(\mathscr{D}(\Omega))$,这是指:

(1) $\operatorname{supp}\phi_i$ 含于一个共同的紧集 K 中,$K\subset\Omega$;

(2) ϕ_i 以及 ϕ_i 的各阶导数一致地收敛于 0(Schwartz(1950)[24],Hörmander(1963)[5],李邦河和李雅卿(1992)[5]),即对任意非负整数组$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$成立

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{x\in K}|\mathrm{D}^\alpha\phi_i(x)|=0,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\geqslant0$,$\mathrm{D}^\alpha=\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

2. $\mathscr{D}'(\Omega)$

我们定义 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上连续线性形式的全体. $\forall\,T\in\mathscr{D}'(\Omega)$,用 $\langle T,\phi\rangle$(当 T 可积或局部可积时,$\langle T,\phi\rangle=\int_\Omega T\phi\mathrm{d}x$)表示 T 在 ϕ 上的取值.连续线性形式是指:

(1) $\forall\ \varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{D}(\Omega),\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}$,有 $T(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1 T(\varphi_1)+\alpha_2 T(\varphi_2)$;

(2) 若 $\varphi_i\to 0$,有$\langle T,\varphi_i\rangle\to 0$.

依 L. Schwartz,我们称 $\mathscr{D}'(\Omega)$为 Ω 上的分布空间,或广义函数空间.

设紧集 K 包含于Ω,引入

$$\mathscr{D}_K(\Omega)=\{\phi\mid\phi\text{ 在}\Omega\text{ 上无限可微且支集包含于}K\}.$$

定理 1.1.1　定义在 $\mathscr{D}(\Omega)$上的线性形式 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$的充要条件是对任意紧集 $K\subset\Omega$,存在 k,c 成立

$$|\langle T,\phi\rangle|\leqslant c\sum_{x\in K}\sup_{|\alpha|\leqslant k}|\mathrm{D}^\alpha\phi(x)|,\quad\forall\ \phi\in\mathscr{D}_K(\Omega).\tag{1.1.3}$$

证　首先证充分性.设 T 是定义在 $\mathscr{D}(\Omega)$上的线性形式.任取$\{\phi_i\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$且$\lim\limits_{i\to\infty}\phi_i=0(\mathscr{D}(\Omega))$,故对 $\forall\ i$,$\mathrm{supp}\phi_i\subset K$,对这个 K 式(1.1.3)成立.利用式(1.1.3)的右部和$\lim\limits_{i\to\infty}\phi_i=0(\mathscr{D}(\Omega))$,有$\langle T,\phi_i\rangle\to 0$,即 T 为连续线性形式,$T\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

其次证必要性.若式(1.1.3)不成立,则存在给定的紧集 $K_0\subset\Omega$,对任意 j,存在 ϕ_j,成立

$$|\langle T,\phi_j\rangle|>j\sum_{x\in K_0,|\alpha|\leqslant j}\sup|\mathrm{D}^\alpha\phi_j(x)|.$$

设 $\hat{\phi}_j=\dfrac{\phi_j}{\langle T,\phi_j\rangle}$,对 $\hat{\phi}_j$,有$|\mathrm{D}^\alpha\hat{\phi}_j|\leqslant\dfrac{1}{j}$.当 $j\to\infty$ 时,$\hat{\phi}_j$ 有共同支集 K_0 且一致地成立 $\mathrm{D}^\alpha\hat{\phi}_j\to 0$,即$\lim\limits_{j\to\infty}\hat{\phi}_j=0(\mathscr{D}(\Omega))$,而$\langle T,\hat{\phi}_j\rangle=1$,这与 T 连续相矛盾,即 T 连续式(1.1.3)必定成立. □

当 k 与K 无关时,称 T 为有限阶分布(广义函数),使式(1.1.3)成立的最小的 k 称为分布 T 的阶.

显然,我们有包含关系

$$\mathscr{D}_K(\Omega)\subset\mathscr{D}(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega).\tag{1.1.4}$$

3. 不成分布的实例

设 $0<\alpha\ll 1$,$p_0=\log_2(1+\alpha)(0<p_0<1)$,$p\geqslant p_0$,$\Omega=\mathbf{R}^1$,考虑函数

$$T(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^p}}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

取 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$,$0\leqslant\phi\leqslant 3$,$\mathrm{supp}\phi\subset\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^1}\phi\,\mathrm{d}x=1$.设 $\varepsilon_k=\mathrm{e}^{-k^p}$,