

小波分析基本原理

XIAOBO FENXI JIBEN YUANLI

蒋英春 编

013028499

0241.86

30

小波分析基本原理

蒋英春 编



0241.86

30



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS



北航

C1635012

001850810

内 容 简 介

本书根据编者多年的教学经验编写而成,其特点是强调小波分析的数学思想和方法,详细地阐述了小波分析的基本原理.其主要内容包括Fourier(傅里叶)分析、小波变换、多尺度分析与小波构造、提升小波、小波包理论、多元小波分析、离散小波分析等.

本书适合作为本科高年级和研究生的小波分析课程教材,也可以供从事相关领域研究与应用的科研工作者参考使用.

小波分析基本理论

图书在版编目(CIP)数据

小波分析基本原理/蒋英春编. —天津:天津大学出版社, 2012.12

ISBN 978-7-5618-4581-3

I. ①小… II. ①蒋… III. ①小波分析—理论 IV. ①0177

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第004601号

出版发行 天津大学出版社

出 版 人 杨欢

地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)

电 话 发行部:022-27403647

网 址 publish.tju.edu.cn

印 刷 河北省昌黎县思锐印刷有限责任公司

经 销 全国各地新华书店

开 本 185mm×260mm

印 张 7.75

字 数 193千

版 次 2012年12月第1版

印 次 2012年12月第1次

印 数 1-2 000

定 价 18.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请向我社发行部联系调换

版权所有 侵权必究

前 言

小波分析是20世纪80年代后期形成的一个新的数学分支,它是在Fourier(傅里叶)分析的基础上发展起来的.因其具有较好的时频局部化分析能力而被广泛应用于信号处理等诸多领域.

编者近年来一直从事小波分析及其应用的研究和教学工作,本书是在编者的“小波分析及其应用”课程讲义的基础上编写而成,主要目的是希望能够突出小波分析的框架体系,使学生了解小波分析的发展,认识和掌握小波分析的基本理论,达到能够根据自己的实际需要而选择适当的小波工具的目的.本书首先从介绍Fourier分析开始,通过分析Fourier变换的特点,进而循序渐进地引入小波变换的概念,并分类介绍了连续小波变换、二进小波变换和离散小波变换.突破高深的数学理论,使学生从本质上了解小波变换的发展由来以及其相对Fourier分析的优势.其次,在介绍了小波构造的基本框架后,着重介绍常用紧支撑小波的构造及其性质,小波分析中的快速分解重构算法以及提升小波的基本原理和算法,进一步介绍了小波包理论和多元小波分析理论.最后简要介绍了离散空间中的小波理论,而目前国内涉及这块内容的教材尚不多.

本书适合相关专业的研究生使用,也适合于高年级工科学生或爱好者参考使用.

本书的编写过程得到了许多人的协助,特别是唐艳和欧炳华同学在制图方面的辛勤工作,编者在此表示感谢.

由于编者水平的限制,错漏之处在所难免,欢迎广大读者批评指正.

本书的出版得到国家高技术研究发展计划(863计划)项目(2012AA011005)、广西自然科学基金创新研究团队项目(2012jjGAG0001)、国家自然科学基金(11161014, 11201094)、广西教育厅项目(201102ZD015, 201012M9094, 201106LX172)和新世纪广西高等教育教改工程项目(2011JGB045)的资助,特致感谢.

编 者

2012年5月于桂林电子科技大学

目 录

第1章 预备知识.....	1
1.1 函数空间.....	1
1.2 Hilbert空间的基函数.....	2
1.3 算子理论.....	3
第2章 Fourier分析.....	4
2.1 Fourier级数.....	4
2.2 Fourier变换.....	6
2.3 窗口Fourier变换.....	8
2.4 离散Fourier变换.....	11
2.5 序列Fourier变换.....	14
第3章 小波变换.....	18
3.1 容许小波与连续小波变换.....	18
3.2 二进小波与二进小波变换.....	21
3.3 离散小波变换.....	23
第4章 多尺度分析与小波构造.....	29
4.1 多尺度分析的概念.....	29
4.2 正交小波及其构造.....	32
4.3 双正交小波及其构造.....	38
4.4 多尺度分析的构造.....	43
第5章 紧支撑小波.....	48
5.1 小波函数的消失矩.....	48
5.2 Daubechies正交小波.....	48
5.3 小波函数的光滑性.....	52
5.4 CDF双正交小波.....	52
5.5 样条小波.....	56
第6章 Mallat分解重构算法.....	64
6.1 正交的情形.....	64
6.2 双正交的情形.....	66
6.3 初始化.....	67
第7章 提升小波与Swelden算法.....	69
7.1 提升基本原理.....	69
7.2 Swelden算法.....	71



第8章 小波包理论	76
8.1 小波包定义及性质	76
8.2 小波空间的分解	78
8.3 最佳小波包分解	79
第9章 多元小波分析	82
9.1 多元多尺度分析	82
9.2 多元张量积小波	83
9.3 多元小波包	87
9.4 各向异性分解	89
9.5 多小波	90
第10章 离散周期小波	94
10.1 一阶小波基	94
10.2 高阶小波基	101
第11章 离散非周期小波	108
11.1 一阶小波基	108
11.2 高阶小波基	110
参考文献	116

第1章 预备知识

本章简要介绍函数空间中的一些基本概念.

1.1 函数空间

定义 1.1.1 (线性空间) 一个线性空间是一个在标量域 (实数域或复数域) F 上的非空矢量集合 L , 并且定义有如下性质的加法和标量乘法:

(1) 对任意 $x, y \in L$, 有 $x+y \in L$ (加法的封闭性);

(2) $x+y=y+x$ (加法的交换律);

(3) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (加法的结合律);

(4) 存在一个 0 元素, 使得 $x+0=x$;

(5) 存在 x 的加逆 $(-x)$, 使得 $x+(-x)=0$;

(6) $\alpha \cdot x \in L, \alpha \in F$ (乘法的封闭性);

(7) $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x, \alpha, \beta \in F$ (乘法的结合律);

(8) 存在一个单位标量 1, 使得 $1 \cdot x = x$;

(9) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ (加法的分配律);

(10) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ (乘法的分配律).

定义 1.1.2 (距离空间) 设 X 为一非空集合. 如果对于 X 中的任何两个元素 x, y , 均有一个确定的实数 $\rho(x, y)$ 与之对应, 且满足如下三点.

(1) 非负性: $\rho(x, y) \geq 0$, 且 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(3) 三角不等式: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

则称 ρ 是 X 上的一个距离, 称 X 是以 ρ 为距离的距离空间.

定义 1.1.3 (赋范线性空间) 设 K 为实数域或复数域, X 是 K 上的线性空间. 如果对于 X 中的每个元素 x , 都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应, 且满足如下三点.

(1) 非负性: $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) 齐次性: 对任意的 $\alpha \in K, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(3) 三角不等式: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则称 X 为实数域或复数域的赋范线性空间, 称 $\|x\|$ 为 x 的范数.

记 定义 $\rho(x, y) = \|x - y\|$, 则 ρ 为 X 上的距离. 因此, 赋范线性空间是距离空间.

定义 1.1.4 (内积空间) 设 X 为实数域或复数域的线性空间. 如果 X 中的任何两个元

素 x, y 都对应 K 中一个数, 记为 $\langle x, y \rangle$, 且满足

- (1) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \alpha \in K,$
- (2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$
- (3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$
- (4) $\langle x, x \rangle \geq 0, \text{ 且 } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

则称 X 为实或复内积空间, $\langle x, y \rangle$ 称为 x 与 y 的内积.

注记 定义 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, 则此内积空间也是一个赋范线性空间. 如果 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x 与 y 是正交的, 记作 $x \perp y$.

定义 1.1.5 (Cauchy (柯西) 列) 设 X 为实数域或复数域的赋范线性空间, 点列 $\{x_n\} \subset X$. 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $m, n > N$ 时, 有 $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列.

定义 1.1.6 (Banach 空间) 设 X 为实数域或复数域的赋范线性空间. 如果 X 中任何 Cauchy 列都收敛于 X 中的点, 则称 X 为完备的赋范线性空间, 又称 Banach 空间.

注 如果内积空间按照对应范数完备, 则称为 Hilbert 空间.

1.2 Hilbert 空间的基函数

定义 1.2.1 设 H 为一内积空间, 集合 $S = \{e_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 H 的一个子集. 如果 $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = 0, \forall \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta$, 且 $\|e_\alpha\| = 1, \forall \alpha \in A$, 则称 S 为 H 中的标准正交集.

定义 1.2.2 (标准正交基) 设 H 为一个 Hilbert 空间, $S = \{e_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 H 中的标准正交集. 如果对任意的 $x \in H$, 有 $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$, 则称 S 为 H 的标准正交基.

定理 1.2.1 设 H 为一个 Hilbert 空间, $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 H 中的标准正交集, 则对任意的 $x \in H$, 有 $\sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \in H$, 且

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2.$$

定理 1.2.2 设 H 为一个 Hilbert 空间, $S = \{e_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 H 中的标准正交集, 则下列命题等价.

(1) S 是完备的, 即若 $\langle x, e_\alpha \rangle = 0, \forall \alpha \in A$, 则 $x = 0$.

(2) 对任意的 $x \in H$, 有 $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$.

(3) Parseval 关系成立, 即对 $\forall x, y \in H$, 有 $\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle \overline{\langle y, e_\alpha \rangle}$.

(4) Plancherel 等式成立, 即对 $\forall x \in H$, 有 $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2$.

定理 1.2.3 设 H 为一个 Hilbert 空间, $\{\alpha_j | j \in \mathbf{Z}\}$ 是 H 中的标准正交集, 并且序列 $z = [z(j)]_{j \in \mathbf{Z}}$ 满足 $\sum_{j \in \mathbf{Z}} |z(j)|^2 < +\infty$, 则级数 $\sum_{j \in \mathbf{Z}} z(j) \alpha_j$ 在 H 中收敛, 且

$$\left\| \sum_{j \in \mathbf{Z}} z(j) \alpha_j \right\|^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}} |z(j)|^2.$$

1.3 算子理论

定义 1.3.1 (线性算子) 设 X, Y 是数域 K 上的线性空间. 如果一个映射 $T: X \rightarrow Y$ 满足 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, $\alpha, \beta \in K, x, y \in X$, 则称 T 为从 X 到 Y 的线性算子. 特别地, 从线性空间 X 到数域 K 的线性算子称作线性泛函, 即取值为数的线性算子.

定义 1.3.2 设 X, Y 是数域 K 上的赋范线性空间, T 为从 X 到 Y 的线性算子. 如果存在一个常数 $C > 0$, 使得对任意的 $x \in X$, 有 $\|Tx\| \leq C\|x\|$, 则称 T 为从 X 到 Y 的有界线性算子.

定义 1.3.3 (伴随算子) 设 H_1 和 H_2 是数域 K 上的 Hilbert 空间, T 为从 H_1 到 H_2 的有界线性算子, 由恒等式 $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ ($x \in H_1, y \in H_2$) 定义的算子 $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ 称为算子 T 的伴随算子. 当 $H_1 = H_2$ 时, 也称为共轭算子. 如果 $T^* = T$, 则称 T 为自伴算子.

定义 1.3.4 (正算子) 如果一个自伴算子 T 满足 $\langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$, 则称 T 为一个正算子.

第2章 Fourier 分析

小波分析是 Fourier 分析划时代发展的结果,本章主要介绍 Fourier 分析的一些主要内容,包括 Fourier 级数、Fourier 变换、窗口 Fourier 变换(短时 Fourier 变换)、离散 Fourier 变换和序列 Fourier 变换.

2.1 Fourier 级数

在数学分析和高等数学中有下列结论.

定理 2.1.1 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,如果它满足

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 收敛,且收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, 其中,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, n \geq 1$$

为 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

注记 应用中,我们也经常使用 Fourier 级数的指数形式 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, 其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

特别地,当 x 为连续点时,就有展开式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

注意 这里的收敛为点态收敛,即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) - f(x) \right| = 0.$$

由于实际应用中遇到的以 2π 为周期的函数一般都属于 $L^2(0, 2\pi)$, 它表示实数集 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期且在 $(0, 2\pi)$ 上平方可积函数的全体,即

$$L^2(0, 2\pi) = \left\{ f(t) \mid f(t+2\pi) = f(t), \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

在信号处理中, 它表示 2π 周期能量有限信号的全体.

在 $L^2(0, 2\pi)$ 中定义内积

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

它在对应范数 $\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ 下完备, 从而是一个 Hilbert 空间.

定理 2.1.2 函数系 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的标准正交基, 即对任意的 $f \in L^2(0, 2\pi)$, 有

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}.$$

注意 这里的收敛是范数意义下的收敛, 即

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{k=-M}^N c_k e^{ikt} \right\| = 0.$$

物理解释 为了给出 $L^2(0, 2\pi)$ 中函数 Fourier 级数展开的物理意义, 不妨先考虑其三角函数的形式.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cdot \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos nt - \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cdot \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin nt \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos \varphi_n \cos nt - \sin \varphi_n \sin nt) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt + \varphi_n), \end{aligned}$$

其中, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$.

这个展开式可以理解为: 一个 2π 周期能量有限信号可以分解为不同频率的余弦波的叠加, A_n 反映了信号 $f(t)$ 中含对应频率余弦波的分量多少. 简单计算可知, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, 所以 $|c_n| = \frac{1}{2}A_n$. 因此, c_n 表示 $f(t)$ 中含简谐振动 e^{int} 的分量多少. 这里 $\{n \mid c_n \neq 0\}$ 称为 $f(t)$ 的谱点集, 因此 Fourier 分析也称为频谱分析.

因为函数系 $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的标准正交基, 所以有 Plancherel 等式

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2.$$

它可以理解为一个信号的能量等于它所包含的不同频率成分的能量之和.

2.2 Fourier 变换

2.2.1 绝对可积函数空间中的 Fourier 变换

$L^1(\mathbf{R})$ 表示绝对可积函数空间, 即

$$L^1(\mathbf{R}) = \left\{ f \mid \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, \int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt < +\infty \right\}.$$

Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

称为 $f(t)$ 的频谱密度函数.

Fourier 逆变换定义为

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

假设 $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbf{R})$, 且 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, 即重构公式成立. 事实上, 有下列结果.

定理 2.2.1 设 $f(t) \in L^1(\mathbf{R})$, 且 $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbf{R})$, 则重构公式 $(\hat{f})^\vee(t) = f(t)$ 几乎处处成立.

物理解释 $\hat{f}(\omega) = |\hat{f}(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} = R(\omega) + iX(\omega)$, 其中 $R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$ 关于 ω 为偶函数, $X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$ 关于 ω 为奇函数. 进一步可知, $|\hat{f}(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$ 为偶函数, $\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$ 为奇函数. 因此,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)| e^{i[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega. \end{aligned}$$

即非周期信号可分解为不同频率的余弦分量之和, $\hat{f}(\omega)$ 表示信号中含有对应频率余弦波的分量多少. 然而, 定理 2.2.1 中的条件不一定成立. 例如:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad f(t) = e^{-t} u(t) \in L^1(\mathbf{R}),$$

但是它的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} \notin L^1(\mathbf{R})$. 虽然 $L^1(\mathbf{R})$ 上的 Fourier 变换不能保证重构公式的成立, 但它却具有一些好的性质.

定理 2.2.2 设 $f(t) \in L^1(\mathbf{R})$, 则

- (1) $|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt, \omega \in \mathbf{R};$
- (2) $\hat{f}(\omega)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续;
- (3) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0;$
- (4) 若 $f' \in L^1(\mathbf{R})$, 则 $(f')^\wedge(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$

2.2.2 平方可积函数空间中的 Fourier 变换

由于 $L^1(\mathbf{R})$ 中的 Fourier 变换不能保证重构公式成立, 而且实际中所涉及的信号大多属于 $L^2(\mathbf{R})$. 因此, 期望在 $L^2(\mathbf{R})$ 中建立 Fourier 变换的概念, 并克服 $L^1(\mathbf{R})$ 中的缺点.

$L^2(\mathbf{R})$ 表示平方可积函数空间, 即

$$L^2(\mathbf{R}) = \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

定义内积 $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$, 则在对应范数 $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ 下构成 Hilbert 空间. 在信号处理中, 表示非周期能量有限信号的全体.

引理 2.2.1 设 $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, 则

- (1) $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$, 且 $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2;$
- (2) $\check{f} \in L^2(\mathbf{R})$, 且 $\|\check{f}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2.$

设 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 定义截断函数

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq N, \\ 0, & |t| > N, \end{cases}$$

则 $f_N(t) \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, $\hat{f}_N(\omega) \in L^2(\mathbf{R})$, 且 $\{f_N(t)\}_{N=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的 Cauchy 列. 由引理 2.2.1, $\|\hat{f}_N - \hat{f}_M\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f_N - f_M\|_2$, 所以 $\{\hat{f}_N(\omega)\}_{N=1}^{\infty}$ 也是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的 Cauchy 列. 因为 $L^2(\mathbf{R})$ 为 Hilbert 空间, 所以存在 $g \in L^2(\mathbf{R})$ 使得当 $N \rightarrow \infty$ 时有 $\|\hat{f}_N - g\|_2 \rightarrow 0$. 基于此, 给出 $L^2(\mathbf{R})$ 中 Fourier 变换的定义.

定义 2.2.1 设 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 定义 $\hat{f}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N(\omega)$, 即 $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_2 = 0$.

注 类似可以定义逆 Fourier 变换. 当 $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ 时, 定义 2.2.1 与 $L^1(\mathbf{R})$ 中的定义一致.

定理 2.2.3 设 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, 则

- (1) $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$ (Parseval 关系);
- (2) $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ (Plancherel 等式);
- (3) $\langle \check{f}, \check{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle;$

$$(4) \|\check{f}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2.$$

定理 2.2.4 Fourier 变换是从 $L^2(\mathbf{R})$ 到 $L^2(\mathbf{R})$ 的 1-1 对应, 且满足

$$(\hat{f})^\vee(t) = f(t), \quad (\check{f})^\wedge(t) = f(t).$$

与 Fourier 级数对比:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \leftrightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{int} \leftrightarrow f(t) = [\hat{f}(\omega)]^\vee(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

而且, Fourier 级数中的等式 $\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k|^2$ 与 $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ 具有相同的物理含义, 即信号的

能量等于它所包含的不同频率成分的能量之和, 反映了时频域上的能量关系.

无论是分析周期信号的 Fourier 级数还是分析非周期信号的 Fourier 变换, 虽然它们都能较好地刻画信号的频率特性, 但不能提供信号在时域上的任何局部信息. 为了研究信号的频域特性, 必须利用该信号在时域中的全部信息. 但给定一个信号, 许多情况下我们感兴趣的往往是信号局部范围内的特性.

2.3 窗口 Fourier 变换

时间定位最初是通过信号 f 的开窗实现的. 1946 年, Dennis Gabor 给出了窗口 Fourier 的定义 (Short-time Fourier Transform, STFT), 它的基本思想是将信号划分成许多小的时间间隔, 用 Fourier 变换分析每个时间间隔.

2.3.1 窗函数与窗口 Fourier 变换

定义 2.3.1 若非零函数 $W(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 且 $tW(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 则称 $W(t)$ 为一个窗函数.

时间中心 (窗中心)

$$t^* = \frac{1}{\|W\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |W(t)|^2 dt.$$

有效时间半径 (窗半径)

$$\Delta_W = \frac{1}{\|W\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t^*)^2 |W(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

对于窗函数 $W(t)$, 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|W(t)|^2}{\|W\|_2^2} dt = 1$, 所以 $\frac{|W(t)|^2}{\|W\|_2^2}$ 可以理解为概率密度函数, 从而 t^*

为数学期望, Δ_W 为方差.

定义 2.3.2 令 $W_{\omega,b}(t) = e^{i\omega t} W(t-b)$. 定义

$$(W_b f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{W(t-b)} e^{-i\omega t} dt$$

为 f 的窗口 Fourier 变换.

定理 2.3.1 设 $W(t)$ 是窗函数, 中心为 t^* , 半径为 Δ_w , 则 $W(t-b)$ 也是窗函数, 中心为 t^*+b , 半径为 Δ_w .

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad t_0 &= \frac{1}{\|W(t-b)\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |W(t-b)|^2 dt = \frac{1}{\|W\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+b) |W(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{\|W\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x |W(x)|^2 dx + \frac{b}{\|W\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(x)|^2 dx = t^* + b. \end{aligned}$$

$$\Delta_{w_0} = \frac{1}{\|W(t-b)\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t^*-b)^2 |W(t-b)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\|W\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t^*)^2 |W(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \Delta_w.$$

注记 因为 $(W_b f)(\omega) = \langle f, W_{\omega,b} \rangle$, 所以 $(W_b f)(\omega)$ 给出信号 f 在时间窗 $[t^*+b-\Delta_w, t^*+b+\Delta_w]$ 中的局部信息, 称 Δ_w 为时间分辨率.

设 $\omega \hat{W}(\omega) \in L^2(\mathbf{R})$, 则 $\hat{W}$ 也为窗函数, 令其中心为 ω^* , 半径为 $\Delta_{\hat{W}}$. 因为

$$(W_b f)(\omega) = \langle f, W_{\omega,b} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{W}_{\omega,b} \rangle =: \langle \hat{f}, V_{\omega,b} \rangle,$$

且 $V_{\omega,b}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \hat{W}_{\omega,b}(\eta) = \frac{e^{ib\omega}}{2\pi} e^{-ib\eta} \hat{W}(\eta-\omega)$, 类似定理 2.3.1 的证明可得: $V_{\omega,b}$ 仍为窗函数, 且中心为 $\omega^*+\omega$, 半径为 $\Delta_{\hat{W}}$, 所以 $(W_b f)(\omega)$ 给出信号 f 在频率窗 $[\omega^*+\omega-\Delta_{\hat{W}}, \omega^*+\omega+\Delta_{\hat{W}}]$ 中的局部信息, 称 $\Delta_{\hat{W}}$ 为频率分辨率. 称 $[t^*+b-\Delta_w, t^*+b+\Delta_w] \times [\omega^*+\omega-\Delta_{\hat{W}}, \omega^*+\omega+\Delta_{\hat{W}}]$ 为时间频率窗.

综合以上分析, $(W_b f)(\omega)$ 表征着信号 $f(t)$ 在 $t=t^*+b$ 附近所含有的 $\omega^*+\omega$ 附近的频率成分的多少. 窗口 Fourier 变换可以形象地看成是以固定尺度的矩形时频窗对信号进行观察, 确实做到了对信号的时频联合分析. 但是, 这个时频窗对于观察所有频率部分都是不变的, 限制了窗口 Fourier 变换在研究非平稳信号中的应用, 如图 2.1 所示.

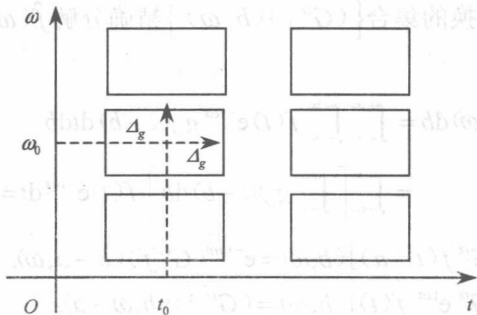


图 2.1 Fourier 变换时频分析图

2.3.2 Gabor 变换

定义 2.3.3 窗函数为 Gauss (高斯) 函数 $g(t) = g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ ($\alpha > 0$) 的窗口 Fourier 变换称为 Gabor 变换, 即

$$(G^\alpha f)(b, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} g_\alpha(t-b) dt.$$

窗中心

$$t^* = \frac{1}{\|g_\alpha\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |g_\alpha(t)|^2 dt = \frac{1}{\|g_\alpha\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \frac{1}{4\pi\alpha} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}} dt = 0.$$

窗半径

$$\begin{aligned} \Delta_{g_\alpha} &= \frac{1}{\|g_\alpha\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot \frac{1}{4\pi\alpha} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}} dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\|g_\alpha\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\alpha} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{分部积分}) \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{\|g_\alpha\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\|g_\alpha\|_2} \cdot \|g_\alpha\|_2 = \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

因为 $\hat{g}_\alpha(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}$, 所以频域中心和半径分别为

$$\begin{aligned} \omega^* &= \frac{1}{\|\hat{g}_\alpha\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{g}_\alpha(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\|\hat{g}_\alpha\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-2\alpha\omega^2} d\omega = 0, \\ \Delta_{\hat{g}_\alpha} &= \frac{1}{\|\hat{g}_\alpha\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-2\alpha\omega^2} d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\|\hat{g}_\alpha\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\alpha} e^{-2\alpha\omega^2} d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

Gabor 变换的时间-频率窗为

$$\left[b - \sqrt{\alpha}, b + \sqrt{\alpha} \right] \times \left[\omega - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \omega + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \right].$$

下面介绍 Gabor 变换的性质.

性质 1 f 的 Gabor 变换的集合 $\{(G^\alpha f)(b, \omega)\}$ 精确分解 $\hat{f}(\omega)$, 从而给出信号 f 的局部谱信息, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (G^\alpha f)(b, \omega) db &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} g_\alpha(t-b) dt db \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(t-b) db \right] f(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

性质 2 (平移性质) $[G^\alpha f(t-a)](b, \omega) = e^{-i\omega a} (G^\alpha f)(b-a, \omega).$

性质 3 (调制性质) $[G^\alpha e^{iat} f(t)](b, \omega) = (G^\alpha f)(b, \omega-a).$

性质 4 (Parseval 等式) $\langle G^\alpha f, G^\alpha g \rangle = 2\pi \|g_\alpha\|_2^2 \langle f, g \rangle$, 其中,

$$\langle G^\alpha f, G^\alpha g \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} G^\alpha f(b, \omega) \overline{G^\alpha g(b, \omega)} db d\omega.$$

性质 5 (重构公式) 如果 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \|g_\alpha\|_2^2} \iint_{\mathbb{R}^2} G^\alpha f(b, \omega) g_\alpha(t-b) e^{i\alpha b} d\omega db.$$

2.3.3 测不准原理

在窗口 Fourier 变换中, 一旦窗函数选定, 整个分析过程中的时频窗是一个固定的窗. 为了使时间频率的局部化定位更精确, 人们期望在选择窗函数时尽量使时频窗口的面积充分小. 然而, 下面的结论表明做不到这一点.

定理 2.3.2 (测不准原理) 如果 $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $\omega \hat{g}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, 则 $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{2}$, 而且等号成立当且仅当 $g(t) = ce^{iat} g_\alpha(t-b)$, 其中 $c \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

注 $\hat{g}(\omega) = ce^{-i(\omega-a)b} \hat{g}_\alpha(\omega-a)$. 因为常数和因式复指数函数不影响窗的中心和半径, 所以 $g(t)$ 的时频中心分别为 b 和 a , 时频半径分别为 Δ_{g_α} 和 $\Delta_{\hat{g}_\alpha}$, 从而窗口大小与 Gabor 变换的窗口大小相同. 因此, 窗口 Fourier 变换中 Gabor 变换做到最好.

测不准原理不允许同时有很高的时间分辨率和频率分辨率. 但是, 我们对一个有快速跃变的信号, 最感兴趣的问题是跃变发生的时刻, 而对其频率成分只要有一个较粗略的了解即可; 对信号变化很慢的部分, 我们关心的则是其频率, 比如说在 1 s 内变化了几次. 因此, 在测不准原理的限制下, 比较理想的信号分析方法应该是, 虽然窗口面积不变, 但是对信号的高频成分使用时间分辨率高而频率分辨率低的窗口. 反之, 对信号的低频成分则使用时间分辨率低而频率分辨率高的窗口. 也就是说, 在信号的局部分析过程中, 特别需要一个灵活可变的时频窗, 小波变换应运而生.

2.4 离散 Fourier 变换

定义 N 维线性空间

$$\ell^2(Z_N) = \{z = [z(0), z(1), \dots, z(N-1)] | z(j) \in \mathbb{C}, 0 \leq j \leq N-1\}.$$

其内积和范数分别定义为

$$\langle z, \omega \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \overline{\omega(k)},$$

$$\|z\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |z(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

习惯上, 约定 $z(j+N) = z(j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

定理 2.4.1 集合 $\left\{ E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i m n}{N}} \mid 0 \leq m, n \leq N-1 \right\}$ 是 $\ell^2(Z_N)$ 的标准正交基.