高 級 中 學

解析幾何課本

上 冊

編輯大意

1. 本書是依照中央人民政府教育部1950年定的普通中學數學精簡綱要，並參考中南軍政委員會教育部的中等數學教材精簡綱要編的. 分上下兩册，每册供一個學期教學的用.

2. 本書是用編者所編的開明新編高級解析幾何學改削的. 但除立體解析幾何全部删去外，所減少的並不很多. 編排的次序基本上也沒有變更.

3. 三種圓錐曲線的幾何作法和機械作法是新加入的. 此外還加上褒變方程式一章. 這樣一來，材料也許還是太多，但有些可以略去不講的，都作*號表出，時間來不及無妨不講.

4. 習題較原來的約删去四分之一，假如時間還不夠，所有的雜題無妨略去.

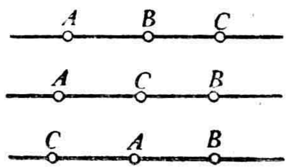
5. 原來也想到另行寫過，但因爲趕着在1951年秋季供應，並且正式的課程標準也沒有確定，多少總帶着實驗性質，所以只是改削. 希望教師們活用並且盡量提出意見以便逐漸修改作爲將來依照正式規定的標準正式改編時的參考.

目　　錄

第一章

直坐標—點

1. 線段的正負 在無限直線上任意用兩點截取一段如第1圖的 AB, 稱爲線段. 初等幾何中只研究線段長短的關係，不問它的方向，所以 AB 和 BA 相等. 但在近世幾何中，線段的方向和它的長短一般地重要.



(1 圖)

方向原是相對的，如圖以 A 點做標準，則可說 B 點在它的右邊；但若以 B 點做標準，則可說 A 點在它的左邊. 同樣的理由，用 A 點做標準，AB 的方向和 BA 的就恰相反；若用 B 點做標準，則 BA 和 AB 的方向也相反.

對於兩個相反的方向，我們可以任意假定一個是正的，則另一個便是負的；所以假定 AB 爲正，則 BA 爲負，因此：

$$AB=-BA,$$

或

$$AB+BA=0.$$

在 AB 線段上若另有一點 C, 則一共成了三條線段 AB, BC 和 AC. 因了 C 點對於 AB 的位置關係不同，也就有三種形式. 如第 1 圖所示. 這三條線段的關係若照初等幾何，不問

它們的方向,則可得不同的三個式子,就是:

$$(1)\quad AB+BC=AC,$$

$$(2)\quad AB-CB=AC,$$

$$(3)\quad BC-BA=AC.$$

但若照上面所說的,用 A 點做標準,由 A 向右爲正,向左爲負,則(1)式中,AB, BC 和 AC 都是正的;(2)式中 AB, AC 是正的,BC 卻是負的而等於'$-CB$';(3)式中 AB 是正的,AC BC 都是負的,而 AB 等於'$-BA$'.

由此,(1)(2)(3)三個式子都可用(1)式來代表;換句話說,無論 C 點對於 AB 的位置關係怎樣,下列的關係都可以成立;

卽:
$$AB+BC=AC.$$

2. 平面上點的位置 學過地理的人,總都已知道,地球上一個地方的位置,須得知道它的經度和緯度纔能決定;如北京在東經 116°29′,北緯 39°53′;倫敦在西經 5′,北緯 51°32′便是. 經度是用經過格林維契的做標準,緯度是用地球的赤道做標準. 所以北京在格林維契的東,倫敦卻在它的西;而北京和倫敦都在赤道的北. 倘若只知道紐約是西經 74°6′,我們不過知道它在格林維契西邊 74°6′ 的那條經線上面,至於它是在北半球或南半球,就莫名其妙了;所以必須還要知道它是在北緯 40°25′12″,它在地球上的位置纔能確定.

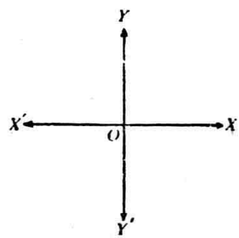
地球的表面我們可當作一個平面看,北京 倫敦或紐約,

我們可以當作這平面上的一點. 由上面的說法可以知道, 一個點在平面上的位置, 須有兩個不同的量纔能決定.

在這裏有一個疑問可以發生, 譬如說, 甲地在乙地的東北五里; 倘若乙地是我們已經知道的, 那末, 甲地的位置不是也就可以明瞭了麼? 這不是只有一個量嗎? 但仔細分析一下, '東北五里' 所含的實在是兩個不同的量; (1) '東北' 所表示的是從東方轉向北方45度; (2) '五里' 所表示的是從乙到甲的直線距離有五里.

3. 直坐標　依前節所說的, 平面上一點的位置須有兩個不同的量纔能決定; 但位置本是相對的, 所以就得有兩個決定位置的標準. 在平面上取直角相交的兩條直線來作決定這平面上一點的位置的標準, 這是極通常而且便當的.

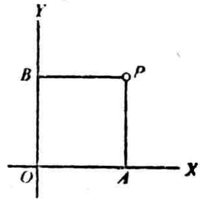
如第 2 圖中, XOX' 和 YOY' 兩條直線相交成直角, 就可用來決定它們所包含的平面上各點的位置. 這稱爲直角坐標, 或簡稱爲直坐標. XOX' 和 YOY' 稱爲坐標軸; 而 XOX' 稱爲橫坐標軸或橫軸, 或 x 軸, YOY' 稱爲縱坐標軸或縱軸, 或 y 軸, 它們的交點 O 稱爲原點.



(2 圖)

XOX' 和 YOY' 將平面分成四個象限, 這是平面三角中已經講過的, 不用再加說明了.

4. 點的坐標和它的畫法　如第 3 圖從 P 點向兩坐標軸各作平行線 PB 和 PA, 則 BP 稱爲 P 點的橫坐標, AP 稱爲它的縱坐標. 因爲從直線外的一點只能作一條直線和它平行, 所以若 P 點的位置一定, 則 BP 和 AP 的方向和長短也一定. 反過來, 若 BP 和 AP 的方向和長短一定, 則 P 點的位置也就決定了. 若 BP 和 AP 的長相應地等於 a 和 b 個單位, 則 a, b 稱爲 P 點的坐標, 我們記成 (a, b), 第一個數表示橫坐標, 第二個數表示縱坐標.



(3 圖)

橫坐標以原點作標準向右爲正, 向左爲負; 縱坐標以原點作標準向上爲正, 向下爲負. 因此, 在各個象限中, 點的坐標的符號便不相同:

第一象限……$(+, +)$,　　第二象限……$(-, +)$,

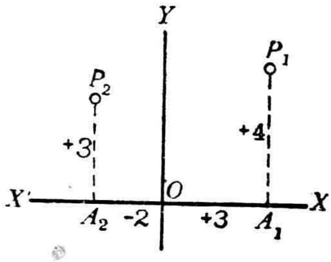
第三象限……$(-, -)$,　　第四象限……$(+, -)$.

實際上, 已知道 P 點的坐標要將它畫出, 並不定要作 BP, AP 兩平行線; 因爲 $OAPB$ 既是一個平行四邊形, OA 和 BP 便相等. 所以若 P 點的坐標爲 (a, b), 先在橫軸上取一 A 點使 OA 等於 a, 然後平行於縱軸, 從 A 取 AP 使等於 b, 則 P 點就是所求的.

例如 P_1 的坐標爲 $(+3, +4)$, 先從 O 向右(正)在 OX 上取 OA_1 等於 3 個單位, 得 A_1 點, 再從 A_1 向上(正)和 OY 平行, 取 A_1P_1 等於 4 個單位, 就得 P_1 點.

又 P_2 的坐標爲 $(-2,\ +3)$，先從 O 向左(負)在 OX' 上取 OA_2 等於 2 個單位，得 A_2 點，再從 A_2 向上(正)和 OY 平行，取 A_2P_2 等於 3 個單位，就得 P_2 點.

〔注意〕 坐標的單位可以任意定，並且在兩條坐標軸上不一定要一樣，但通常總用一樣的單位。



(4 圖)

習　題　一

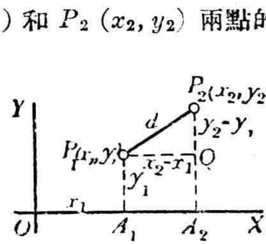
1. $(0,0)$，$(0,b)$，$(a,0)$ 這三點各在什麼地方？

2. 用適當的單位畫出下列各點：

(a) $(0,1)$;	(b) $(1,0)$;	(c) $(1,1)$;
(d) $(-1,1)$;	(e) $(-1,-1)$;	(f) $(1,-1)$;
(g) $(2,3)$;	(h) $(-2,3)$;	(i) $(3,-2)$;
(j) $(0,-2\frac{1}{2})$;	(k) $(-3.7,0)$;	(l) $(-1\frac{1}{2},-1\frac{3}{4})$;
(m) $(-4,3.2)$;	(n) $(3,-\sqrt{2})$;	(o) $(-\sqrt{2},\sqrt{3})$.

5. 兩點間的距離　若 $P_1\ (x_1, y_1)$ 和 $P_2\ (x_2, y_2)$ 兩點的坐標已經知道的時候，則它們中間的距離 d 很容易求出.

如第 5 圖先畫 P_1 和 P_2 的坐標，又畫 P_1Q 垂直於 A_2P_2，則



(5 圖)

$$P_1Q = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1,$$

和　　$$QP_2 = A_2P_2 - A_2Q = y_2 - y_1.$$

但 P_1QP_2 是一個直角三角形,依照商高定理,

$$\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_1Q}^2+\overline{QP_2}^2.$$

所以 $$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

習 題 二

求下列各題兩點間的距離,並照第 5 圖畫出來:

1. (3,3)和(7,6). **2.** $(-6,2)$和$(6,-3)$.

3. (6,2)和$(-2,-4)$. **4.** $(-\frac{1}{2},5)$和$(-8\frac{1}{2},-3)$.

求下列各兩點間的距離:

5. (2,1)和(5,1). **6.** (0,0)和(2,5).

7. (6,0)和(0,5). **8.** (0,0)和(a,b).

9. $(-6,0)$和$(0,-6)$. **10.** (0,0)和$\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

11. 證明從原點 O 到 $P(x,y)$ 的距離爲 $\sqrt{x^2+y^2}$.

12. 若 P_1 在第二象限, P_2 在第四象限,畫圖並證明第 5 節的公式.

13. 證明 (7,2)和$(1,-6)$在以$(4,-2)$爲圓心的圓周上; 並求這個圓的半徑.

14. 若(6,2)和$(3,k)$的距離爲 5,求 k 的值. 將圖畫出.

將下面的三點作頂點畫三角形,由它們各邊的長證明是正三角形,等腰三角形,直角三角形;並且,其中有兩個若當作三角形看,則它們的面積等於零:

15. $(-4,3)$, $(2,-5)$, $(3,2)$.

16. $(4,0)$, $(-4,0)$, $(0,-4\sqrt{3})$.

17. $(2,3)$, $(-4,1)$, $(6,-2)$.

18. $(-6,8)$, $(6,-8)$, $(8,6)$.

19. $(5,1)$, $(2,-2)$, $(8,4)$.

20. $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(3,3)$.

21. $(4,1)$, $(1,3)$, $(-3,1)$, $(-2,-1)$, 是四邊形的頂點,將這個四邊形畫出,並且求它的兩對角線的長.

22. 將直線 AB 和它的垂直平分線作坐標軸，證明這垂直平分線上的點到 A 和 B 的距離相等.

23. 證明：若 (x,y) 到 $(2,3)$，$(4,5)$ 的距離相等則 $x+y=7$.

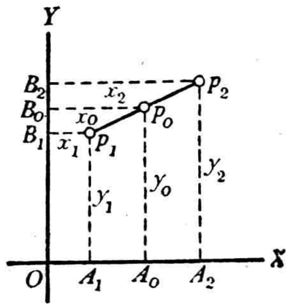
24. 三角形的頂點爲 $(2,3)$，$(4,5)$，$(6,1)$，求它的外心 (x,y)。

6. 線段中點的坐標　在第 6 圖中設 $P_0(x_0,y_0)$ 是 P_1P_2 的中點，因爲 B_0P_0 和 A_0P_0 相應地是梯形 $B_1P_1P_2B_2$ 和 $A_1A_2P_2P_1$ 的中線，由初等幾何，這很容易明白，

$$B_0P_0=\tfrac{1}{2}(B_1P_1+B_2P_2),$$

和 $$A_0P_0=\tfrac{1}{2}(A_1P_1+A_2P_2),$$

所以我們可以得出下面的公式：



(6 圖)

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},$$

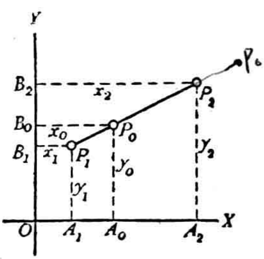
和 $$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

7. 依定比內分線段　設線段 P_1P_2 和內分點 P_0 的坐標分別爲 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 和 (x_0,y_0)，

而 $$P_1P_0:P_0P_2=m:n.$$

因爲 $$\frac{A_1A_0}{A_0A_2}=\frac{P_1P_0}{P_0P_2}=\frac{m}{n},$$

故 $$\frac{x_0-x_1}{x_2-x_0}=\frac{m}{n}.$$



(7 圖)

將 x_0 當作未知數解這方程式，則

$$x_0=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}.$$

同樣地 $$y_0=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

設 $$\frac{m}{n}=\lambda,$$

則 $$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

〔注意〕 前節所得的公式只是本節的特例，因爲中點就是內分線段成相等的兩部分的點，即 $m=n$，而 $\lambda=1$.

8. 依定比外分線段 若 P_0 外分線段 P_1P_2，則 P_0P_2 爲負；或 P_1P_0 爲負；故

$$\frac{x_0-x_1}{x_0-x_2}=\frac{m}{n},$$

或 $$\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}=\frac{m}{n};$$

而 $$x_0=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}.$$

同樣地 $$y_0=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$$

但若設 $-\dfrac{m}{n}=\lambda,$

則 $$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

〔注意〕 這兩節的末了的公式形式上是統一的，λ 是正則爲內分點，λ 是負則爲外分點.

習 題 三

下列的各對坐標是一條線段的兩端點的；試求它們的中點(1到6口答)；

1. $(7,4)$, $(3,2)$.　　2. $(6,-4)$, $(-2,-2)$.

3. $(-3,1)$, $(2,7)$.　　4. $(4,-1)$, $(-4,1)$.

5. $(a,1)$, $(1,a)$.　　6. $(0,0)$, $(0,\frac{2}{3})$.

7. $(-2.8,6.4)$, $(-3.9,7.2)$.　　8. $(-3\frac{3}{8},-7\frac{5}{8})$, $(2\frac{3}{4},-4\frac{1}{2})$.

下列坐標表示一線段的兩端點，依照所給各比的絕對值求各內，外分點，畫圖表示：

9. $(2,1)$, $(3,-9)$; $4:1$.　　10. $(5,-2)$, $(5,3)$; $2:3$.

11. $(-4,1)$, $(5,4)$; $5:2$.　　12. $(8,5)$, $(-13,-2)$; $4:3$.

下列坐標各各表示一條線段的兩端點，試求它們的兩個三等分點：

13. $(-1,2)$, $(-10,-1)$.　　14. $(11,6)$, $(2,3)$.

15. $(7,8)$, $(1,-6)$.

16. 若線段的一端點是$(4,6)$，中點是$(5,2)$，求他一端點.

17. $A(4,7)$, $B(5,3)$ 和 $C(6,9)$爲三角形的頂點，求這三角形各邊的中點，和它的重心(應用初等幾何關於重心的定理).

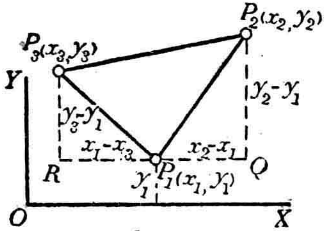
18. ABC 三角形的頂點爲(x_1,y_1), (x_2,y_2), 和 (x_3,y_3)，試證明它的重心是：

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

9. 三角形的面積　如第8圖 $P_1P_2P_3$ 爲一個三角形，經過 P_1 作 RQ，平行於 OX，並且從 P_3 和 P_2 作 RQ 的垂線，則

$$\triangle P_1P_2P_3 = \text{梯形 } P_3RQP_2 - \triangle RP_1P_3 - \triangle P_1QP_2$$
$$= \tfrac{1}{2}RQ(RP_3 + QP_2) - \tfrac{1}{2}RP_1 \cdot RP_3 - \tfrac{1}{2}P_1Q \cdot QP_2.$$



(8 圖)

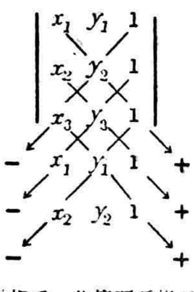
$$\therefore\quad \triangle P_1P_2P_3 = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

若是用行列式表示，那末

$$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

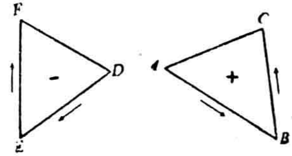
〔注意一〕 多角形的面積可分成若干個三角形來求各面積的和.

〔注意二〕 沒有學過行列式的，上式可照下法計算:



將直線所連的每三個數相乘，依箭頭所指示的符號而求這六個乘積的代數和.

10. 面積的正負　和線段以及角一般，面積也可分成正負兩種，若從一個頂點起，順了多角形的邊，照着鐘錶的指針轉動的相反方向轉過去，則面積爲正；反過來，若依照鐘錶的指針轉動的方向轉過來，則面積爲負，所以在右圖中，$\triangle ABC$ 的面積是正的，$\triangle DEF$ 的面積就是負的.



(9 圖)

習　題　四

在方格紙上畫下面的各個三角形，依公式求它們的面積，再由圖上來覆證所得的結果：

1. $(3,3)$, $(-1,-2)$, $(-3,4)$.　**2.** $(0,0)$, $(12,-4)$, $(3,6)$.

3. $(1,3)$, $(3,0)$, $(-4,3)$.　**4.** $(-2,-2)$, $(0,0)$, $(5,5)$.

5. 求四邊形 $(4,5)$, $(2,-3)$, $(0,7)$, $(9,2)$ 的面積，並且在方格紙上畫圖來覆證所得的結果.

6. 試證明四邊形 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, $P_4(x_4,y_4)$ 的面積爲

$$\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3+x_4y_1-x_1y_4).$$

7. 三角形 ABC 的重心 G 與各頂點相聯，則成三個相等的三角形，試證明它.

8. 三角形的三頂點爲 $A(4,-1)$, $B(2,5)$, $C(-8,4)$，求它的面積，和從 C 到 AB 的高的長.

9. 求三角形 $A(-4,-3)$, $B(-1,5)$, $C(3,-4)$ 的各條高的長.

10. 若三角形 $A(6,1)$, $B(3,8)$, $C(1,k)$ 的面積爲 41，求 k 的值.

11. 由計算三角形的面積，證明 $A(-1,-14)$, $B(3,-2)$, 和 $C(4,1)$ 三點在一直線上.

12. 順次聯 $A(7,4)$, $B(-1,-2)$, $C(0,1)$, $D(6,1)$ 而由第六題的公式

證明四邊形 $ABCD$ 的面積等於 O.

13. 證明聯結三角形 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ 三邊的中點所成的三角形的面積，等於原三角形的面積的四分之一.

雜　　題

1. 若 $P(5,9)$ 是圓周上的一點，這圓的中心是$(1,6)$，求它的半徑，並且將它畫出來.

2. 證明$(8,5)$和$(6,7)$兩點到$(3,2)$這點的距離相等.

3. 用商高定理，證明三角形 $A(2,1)$, $B(3,-2)$, $C(-4,-1)$的 BAC 角是直角.

4. 畫三角形 $A(4,6)$, $B(-2,2)$, $C(-4,6)$, 並且證明兩邊中點的聯線等於第三邊的一半.

5. 證明圓心$(4,1)$和半徑 10 的圓經過三點 $P_1(-2,9)$, $P_2(10,-7)$ 和 $P_3(12,-5)$；並將圖畫出來.

6. 若 $P_4(-4,k)$ 也在前題的圓周上，求 k 的值.

7. 經過 $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ 三點畫一圓，求它的圓心和半徑.

8. 若$(3,k)$ 和 $(k,-1)$ 到 $(4,2)$的距離相等，求 k 的值.

9. 若 $(3,k)$ 和 $(4,-3)$ 到 $(-5,1)$的距離相等，求 k 的值.

10. 若 (a,b) 到 $(4,-3)$ 和 $(2,1)$的距離相等，而到$(6,1)$和$(-4,-5)$的也相等，求 a 和 b 的值. 並且將這圖畫出來.

11. 若 $A(5,4)$, $B(6,-9)$ 引長到 C, 而 BC 等於 $\frac{1}{2}AB$, 求 C.

12. 若平行四邊形的三頂點是 $(1,2)$, $(-5,-3)$, $(7,-6)$. 求它的第四個頂點，和兩條對角線的長.

畫出 $A(-4,3)$, $B(2,6)$, $C(7,-3)$ 和 $D(-3,-8)$ 四點，證明：

13. 聯結 AD 和 BC 的中點的線段等於 AB 和 CD 的和的一半.

14. 聯結 AC 和 BD 的中點的線段等於 AB 和 CD 的差的一半.

15. $A(2,-4)$, $B(5,2)$, $P(3,-2)$ 三點在一直線上，求依 P 點內分 AB 的比，外分 AB 的點.

16. 證明 $A(6,11)$, $B(-4,-9)$, $C(11,-4)$ 和 $D(-9,6)$ 在同一圓周

上；並且證明 AB, CD 都是這個圓的直徑，而且它們互相垂直.

兩個圓的圓心為 $C(2,5)$ 和 $C'(11,-4)$，並且相交於 $A(6,8)$點；證明：

17. $B(-1,1)$ 是它們的另外一個交點.

18. AB 的中點分 CC'，成 1 和 17 的比.

19. 用 $C(-1,-3)$為圓心，5 做半徑畫圓，那末 $P_1(2,1)$ 和 $P_2(-4,1)$ 在這圓周上麼？

20. $A(1,1)$ 到 B 的長為 5，AB 的中點的橫坐標為 3，求 B 點.

21. 三角形 ABC 中，A點是 $(4,-1)$，AB 的中點 $M(3,2)$，重心 $P(4,2)$，求 B 和 C.

22. P 是 $A(2,3)$ 和 $B(8,4)$ 的內分點，而

$$AP : PB = PB : AB,$$

求 P 的坐標.

23. 三角形 $A(-6,-2)$，$B(6,-5)$，$C(2,-8)$，頂角 C 的平分線與 AB 交於 D，求 D.

(應用初等幾何中比例的定理.)

24. 前題若 C 的外角的平分線與 AB 交於 D'，求 D'.

25. 證明直角三角形斜邊的中點到三頂點的距離相等.

26. 依次聯結四邊形相鄰兩邊的中點，則成平行四邊形，試由對邊相等的性質證明它.

27. 三角形的頂點是 $A(0,0)$，$B(4,8)$ 和 $C(6,-4)$，若 M 分 AB 成 3:1，而 P 是 AC 上的一點，三角形 APM 的面積等於三角形 ACB 的面積的一半；P 分 AC 成怎樣的比？

28. D 為 ABC 三角形 AB 邊的中點，證明：

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2).$$