高等学校工科数学系列

概率论与数理统计学习指导

主　编　苑延华　徐　莹　姜文彪

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

概率论与数理统计学习指导

主　编　苑延华　徐　莹　姜文彪
副主编　陈洪海　王宏久

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是与科学出版社出版的苑延华、母丽华等编写的《概率论与数理统计》教材相配套的学习指导，内容涵盖了概率论与数理统计的基本内容，包括：概率的定义、性质；离散型、连续型随机变量的分布及其性质与应用；随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本的分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析。

本书可作为理工及经管类本、大专科学生的学习参考书使用，还可作为教师的教学参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导 / 苑延华，徐莹，姜文彪主编. —哈尔滨 ：哈尔滨工程大学出版社，2012.8
ISBN 978 - 7 - 5661 - 0405 - 2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①苑… ②徐… ③姜… Ⅲ. ①概率论 - 高等学校 - 教学参考资料②数理统计 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 171279 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451 - 82519328
传　　真 0451 - 82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm × 960mm 1/16
印　　张 14
字　　数 292 千字
版　　次 2012 年 8 月第 1 版
印　　次 2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 31.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

高等学校工科数学系列编审委员会

前　言

概率论与数理统计是解决随机现象(即或然性、偶然性)的科学观和方法论,是现代人才不可或缺的基本科学素养之一。在我国理工及经管类本、专科生高等教育中占据着越来越重要的地位。对基础学科的学习,多做习题是必不可少的,这不仅是理解和掌握理论知识的过程,更重要的在于理解解决问题的过程和应用的思想方法及技巧。

本书是与科学出版社出版的苑延华、母丽华等编写的《概率论与数理统计》教材相配套的学习指导书。编写的主要目的是对课堂教学内容进行补充,其内容独立于教材,可单独使用。全书内容包括概率的定义、性质;离散型、连续型随机变量的分布及其性质与应用;随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本的分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析。第 1 ~8 章内容设计了七个板块,包括本章知识结构、知识要点、典型例题、考研真题选讲、课后习题解答、自我测试及答案、实践应用。第 9,10 章内容设计了本章知识结构、知识要点、典型例题、自我测试及答案、实践应用五个板块,从而方便读者学习参考。

“知识要点”栏目中不仅给出了学习要求、内容索引,还指出了常见的易混淆概念间的区别与联系;“典型例题”和“考研真题选讲”通过对经典问题的解答使读者领悟出概率论与数理统计的观点及应用技巧,从而对知识学习效果起到很好的指导和帮助作用;“自我测试”和“实践应用”栏目,不仅可以帮助读者了解自我学习的程度,而且还能启示读者,使其了解概率论与数理统计的思想方法在解决实际问题时的一般途径与方法,为本学科知识的实践应用打下先期的基础。

我们试图通过以上内容的编排,帮助读者理解概率论与数理统计的基本概念,掌握解题的方法与技巧,提高综合分析及解决实际问题的能力。

本书适合高等院校各类本、专科学生及教师作为学习和教学参考使用。

全书由苑延华负责统稿,参编作者的分工如下:第 1 章由苑延华编写;第 2 章由杨春玲编写;第 3,4,9 章由徐莹编写;第 5,6 章由姜文彪编写;第 7 章由王宏久编写;第 8 章由陈洪海编写;第 10 章由刘照升编写。我们尽了最大努力使本书内容不出错,但书中难免存在不妥之处,欢迎读者批评指正,我们将十分感谢。

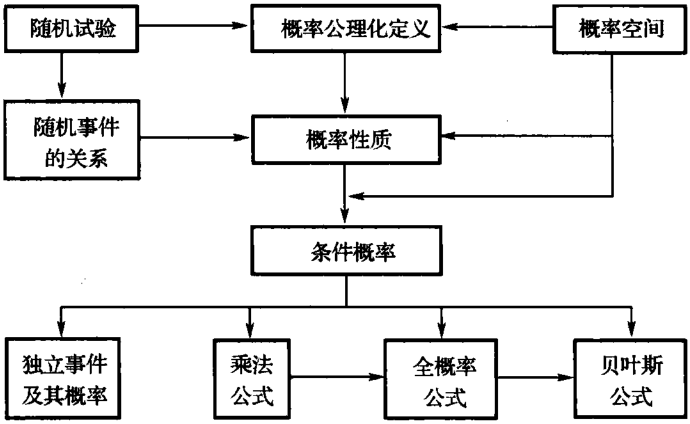
编　者

2012 年 5 月

目　录

第1章　概率的公理

1.1　本章知识结构



1.2　知 识 要 点

1.2.1　本章重、难点

教学内容:随机事件与概率定义;概率的性质与计算;条件概率及其相关应用.

重点:

1. 理解概率公理化定义;
2. 熟练掌握随机事件间的关系;
3. 熟练应用概率的性质进行计算;
4. 理解并掌握条件概率的概念,能够应用乘法公式、全概率公式(和贝叶斯公式)解决实际问题;
5. 理解独立事件的定义,并可用独立性确定事件的概率.

难点:

1. 准确理解和掌握“随机试验”“概率空间”“条件概率”“独立事件”的定义;
2. 熟练应用概率的性质和有关的公式进行计算;

3. 应用独立性确定事件的概率；
4. 利用概率模型解释不确定现象.

1.2.2 知识点归纳

1. 随机试验

在概率论中我们将具有以下三个特点的试验称为随机试验，即具有“在相同条件下可重复进行”“每次实验的可能结果不止一个，并且能事先明确所有可能结果”和“进行一次试验之前不能确定哪个结果会出现”.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记作 S.

3. 样本点

试验 E 的每个结果称为样本空间的样本点，记作 ω，可见：样本点就是样本空间的元素.

4. 随机事件

试验 E 的样本空间 S 的子集 A 称为试验 E 的随机事件 A，简称事件 A. 由一个样本点组成的单点子集称为基本事件；样本空间 S 包含所有的样本点，是其自身的子集，在每次试验中它总发生，称为必然事件，记作 S；试验中不发生的事件称为不可能事件，记作 $\varnothing$.

5. 事件发生

在每次试验中，当且仅当随机事件 A 中的一个样本点 ω 出现时，称作事件 A 发生.

6. 事件的关系和运算

事件的关系和运算见表 1－1，事件关系运算推广见表 1－2.

表 1－1　事件的关系和运算

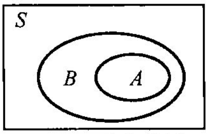
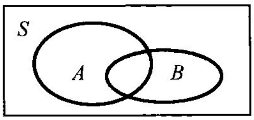
名称	意义	文氏图	备注
事件的包含： $A\subset B$ 或 $B\supset A$	如果事件 A 发生，那么事件 B 一定发生，称为事件 B 包含事件 A		$\varnothing\subset A\subset S$
事件的相等： $A=B$	如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等		
事件的和： $A+B$ 或 $A\cup B$	“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”是一个事件，称为事件 A 与 B 的和		

表 1-1(续)

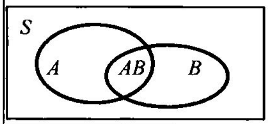
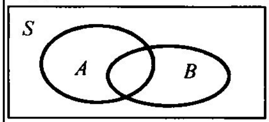
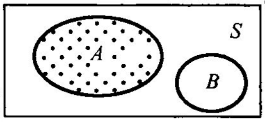
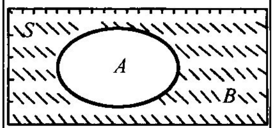
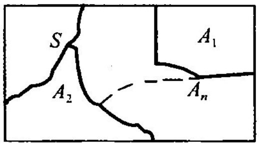
名称	意义	文氏图	备注
事件的积: AB 或 $A\cap B$	"事件 A 与事件 B 同时发生"是一个事件,称为事件 A 与 B 的积		
事件的差: $A-B$	"事件 A 发生而事件 B 不发生"是一个事件,称为事件 A 与 B 的差		$A-B$ 与 $B-A$ 是两个不同的事件
事件的互不相容: $AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 AB 是不可能事件,称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥)		事件 A 与 B 互不相容只表示这两个事件不能同时发生,但允许它们同时不发生
事件的对立: $\overline{A}=B$ 或 $\overline{B}=A$	事件 A 与事件 B 不能同时发生,但必有一个事件发生,即 A,B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$,此时称事件 A 与事件 B 是对立的事件		事件 A 与事件 B 对立时,它们既不能同时发生,又不能同时不发生
完备事件组 (或样本空间的一个分割)	如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,且满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组(或样本空间 S 的一个分割)		完备事件组中事件的个数可以是有限的,也可以是可列个,即满足:$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=S$

表 1-2 事件关系运算的推广

分配律:$A(B+C)=AB+AC$	交换律:$A+B=B+A$;$AB=BA$
结合律:$(A+B)+C=A+(B+C)$; $(AB)C=A(BC)$	棣摩根律(对偶律):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$
排中律:$\overline{A}\cup A=S$	还原律:$\overline{\overline{A}}=A$
吸收律:若 $A\subset B$,则 $AB=A$ 且 $A+B=B$	分解律:若 $A\subset B$,则 $B=A+\overline{A}B$
蕴含律:若 $AB=\varnothing$,则 $A\subset\overline{B}$,$B\subset\overline{A}$	差积转换律:$A-B=A\overline{B}=A-AB$
矛盾律:$A\overline{A}=\overline{A}A=\varnothing$	

7. 域和波雷尔(Borel)域

集合 S 的子集构成的集合,称为集合 S 的子集类. 已知 F 是一个非空的子集类,且满足以下两条:

①如果 $A\in F$,那么$\overline{A}\in F$;

②如果 $A\in F$ 且 $B\in F$,那么 $A\cup B\in F$;

则称 F 是域. 进一步地,若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是 F 的一个无穷序列,且这些集合的任意可列并和可列交都属于 F ,则称 F 为波雷尔(Borel)域.

8. 概率的公理化定义

赋予样本空间 S 上每个随机事件 A 一个数 $P(A)$,并称之为事件 A 的概率,则这个数满足下列三条公理:

公理 1 非负性 $P(A)\geqslant 0$;

公理 2 正则性 $P(S)=1$;

公理 3 可加性 若 $AB=\varnothing$,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

公理 3′ 可列可加性 若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)(i,j=1,2,\cdots)$,则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

注:$P(A)$是随机试验 E 中事件 A 发生的可能性大小的数值度量,但它不能揭示随机事件 A 何时发生.

9. 概率空间

F 是某一样本空间 S 的一些子集(事件)组成的波雷尔域,在 F 上定义满足概率公理 1,2,3 和 3′的实值函数 $P(A)$,其中 A 是 F 的任意元素,称 $P(A)$ 为事件 A 的概率,而称三元素 (S,F,P)为概率空间.

注:定义概率空间时,第一步,要定义与随机试验对应的样本空间 S;第二步,确定关心的随机事件,再在 S 上构造包含这些随机事件的波雷尔域 F ;第三步,以 F 为定义域定义满足概率公理的实值函数 $P(A)$,其中 A 是 F 的元素,如此即可构造出概率空间.

10. 概率的计算

(1)直接计算法

频率法 对于随机试验 E 独立重复观察 n 次,若事件 A 发生 k 次,则事件 A 发生的概率为 $P(A)=\dfrac{k}{n}$.

古典法 样本空间 S 中有且仅有 n 个试验结果,且每个结果等可能出现,那么定义每个试验结果构成的基本事件发生的概率为 $\dfrac{1}{n}$,任意事件 A 若由 r 个试验结果构成,则事件 A 发生的概率为 $P(A)=\dfrac{r}{n}$.

几何法 若样本空间 S 能够用空间可度量的几何体表示，且几何体中每一点表示的结果等可能出现，此时几何体中可度量的子集成为随机事件，于是，随机事件 A 发生的概率就是 A 所在几何体的度量与样本空间 S 所在几何体的度量的比值，即

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$$

注：当 S 是线段时，$m(\cdot)$ 表示线段的长度；当 S 是有限平面区域时，$m(\cdot)$ 表示平面区域的面积；当 S 是空间有限立体时，$m(\cdot)$ 表示空间立体的体积.

直接定义法 对样本空间 S 中的基本事件 A_i 直接定义概率 p_i，满足 $p_i \geqslant 0$ 和 $\sum_i p_i = 1$.

(2)间接计算法

通过概率的性质计算随机事件发生的概率.

①不可能事件 不可能事件发生的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$.

②对立事件 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

③减法公式 对于同一概率空间中的任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

特别地，当 $B\subset A$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

④加法公式 对于同一概率空间中的任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

当事件 A 和 B 互不相容时，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

⑤一般加法公式 对于同一概率空间中的可数个任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} P(A_iA_j) + P(A_1A_2A_3);$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} (-1)^{k-1}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

⑥半可加性 对于同一概率空间中的可数个任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n) \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P(A_i)$$

⑦可分解性 对于同一概率空间中的任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$$

⑧单调性 当 $B\subset A$ 时，有 $P(B)\leqslant P(A)$.

11. 条件概率

一般情况下，若任意事件 A,B 属于概率空间 $(S,\mathscr{F},P)$，且 $P(B)\neq 0$，则在事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率为

$$P(A\mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

记作 $P(A\mid B)$.

事实上,条件概率满足概率的非负性、规范性和可列可加性这三条公理,因此说条件概率也是概率. 可以把条件概率理解为:它是由原概率空间限制在事件 B 上时,导出的新的概率空间 $(S_B,\mathscr{F}_B,P_{A|B})$,$S_B$ 中的元素就是 B 的元素,$\mathscr{F}_B$ 中的元素就是 $\mathscr{F}$ 的元素与事件 B 的积事件构成的波雷尔域,其概率函数 $P_{A|B}$ 是由原概率空间 $(S,\mathscr{F},P)$ 中,事件 A,B 同时发生的概率 $P(AB)$ 与事件 B 发生概率 $P(B)$ 的比值定义的.

利用条件概率的定义,我们可以得到计算概率的三个常用公式,即

①乘法公式

$$P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B\mid A) & P(A)\neq 0\\ P(B)P(A\mid B) & P(B)\neq 0\end{cases};$$

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_n)&=P(A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})\\&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1});\end{aligned}$$

②全概率公式

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)\\&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\mid A_n);\end{aligned}$$

其中 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 S 的一个分割,满足 $A_iA_j\neq\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$;$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

③贝叶斯公式

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\mid A_n)}$$

其中,S 是试验 E 的样本空间,B 是 E 的事件,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的一个分割,且 $P(B)>0$,$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$.

12. 独立事件

设 A,B 是两个随机事件,如果有 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立,则称随机事件 A 与随机事件 B 相互独立,简称 A,B 独立.

当 $P(A)>0$ 时,若 $P(B\mid A)=P(B)$ 成立,则有事件 A,B 独立. 其直观含义是"若事件 B 发生的概率不受事件 A 发生与否的影响,则有事件 A,B 独立".

同样地,当 $P(B)>0$ 时,$P(A\mid B)=P(A)$ 成立,同样有事件 A,B 独立.

设 A,B,C 是三个随机事件,若如下四个等式同时成立:

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$$

则称随机事件 A,B,C 相互独立.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个随机事件,如果其中任意 $k(k=2,3,\cdots,n)$ 个事件同时发生

的概率等于每个事件发生概率的乘积,即

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}), \qquad k=2,3,\cdots,n$$

则称随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

1.2.3 概念辨析

1. 随机试验 E 的“结果(outcome)”“事件(event)”和“基本事件”

答 所谓随机试验 E 的“结果”,是指在对随机试验观察时,每次看到的具有排他性的现象,即对随机试验的一次观察中,不能同时出现两个或两个以上的不同“结果”. 而“事件”具有相容性,即在对随机试验的一次观察中,两个不同“事件”可以同时发生. 例如连续抛两枚硬币,用“h”表示正面,“t”表示反面,该试验的全部结果为$\{hh,ht,th,tt\}$,显然在一次观察中,四个结果有且仅有一个结果出现;但是,若令 A 表示“至少出现一个正面”,B 表示“两次都是正面”,那么,当结果 hh 出现时,事件 A,B 就同时发生了. 可见随机试验的“结果”和“事件”是两个不同的概念.

在不易混淆的场合下,我们总是说随机试验的单个结果定义的事件为该随机试验的基本事件,但这个概念是模糊的. 还看上面的试验,若仅关心 A 是否发生,这时又可将 $A,\bar{A}$看作该试验仅有的两个不同基本事件. 产生这种混乱的原因在于:对于同一个随机试验 E,因为观察目的不同,可以建立不同的概率空间. 为此,我们借助概率空间$(S,\mathscr{F},P)$的定义来区分这三个概念:

①随机试验 E 的“结果”是样本空间 S 的元素;

②$\mathscr{F}$中的每个元素都是随机试验 E 的随机事件;

③全部基本事件不仅构成波雷尔域 $\mathscr{F}$的一个子集,而且是样本空间 S 的一个分割,同时,$\mathscr{F}$中的任意元素都能用部分(或全部)基本事件的和事件表示.

2. “对立事件”“互斥(互不相容)事件”和“独立事件”

答 这三个概念都是描述随机事件之间关系的,为书写方便,以下将“随机事件”简写为“事件”.

若事件 A 与事件 B 对立,必有事件 A 与事件 B 是互斥事件,反之不然.

事件 A 与事件 B 是互斥事件,意味着事件 A 发生,则事件 B 必然不发生. 可见, 事件 A 与事件 B 之间是存在排斥依赖关系的,它也可表述为 AB 是不可能事件,且有 $P(AB)=0$.

事件 A 与事件 B 是独立事件,意味着事件 A 发生与否对事件 B 发生的机会的大小没有影响,可见,事件 A 与事件 B 之间不存在依赖关系. 此时,若 $P(A)>0,P(B)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$,即事件 AB 不是“不可能事件”.

由此可见,当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时,“事件 A 与 B 互斥”和“事件 A 与 B 相互独立”的关系不能同时出现. 当然,这也不意味着非此即彼,也就是说事件 A 与 B 之间存在着不是互斥的依赖关系. 从这个意义上讲,任意两个事件 A 与 B 之间必然存在“互斥”“相容”和“独立”这三

个关系之一，且仅有其中一种关系. 还要说明的是“不可能事件$\varnothing$”和“必然事件 S”是既对立又独立的一对事件. 任意事件 A 与不可能事件$\varnothing$(或必然事件 S)都是独立关系.

3. 条件概率也是概率

答 设 A,B,C 是概率空间$(S,\mathcal{F},P)$中的任意三个事件，且 $P(C)>0$，那么：

①非负性 $P(A\mid C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}\geqslant 0$；

②正则性 $P(S\mid C)=\dfrac{P(SC)}{P(C)}=1$；

③可加性 当 $AB=\varnothing$时，$P((A\cup B)\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C)$成立.

可见“条件概率”符合概率公理化定义. 因此，概率的性质关于条件概率均成立，例如：

$$P(\overline{A}\mid C)=1-P(A\mid C)$$
$$P((A\cup B)\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C)-P(AB\mid C)$$
$$P(AB\mid C)=P(B\mid C)P(A\mid BC)$$
$$P((A-B)\mid C)=P(A\mid C)-P(AB\mid C)$$

但是，若事件 A 与 B 相互独立，一般没有 $P(AB\mid C)=P(A\mid C)P(B\mid C)$成立，即原概率空间中相互独立的事件，在条件概率空间上独立性一般不被保持.

4. 随机试验 E 中概率为 1 的事件 B 与任意事件 A 相互独立

答 尽管概率为 1 的事件不一定是必然事件，但是，由 $P(B)=1$，知

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(AB)$$

因此，当 $A\subset B$ 时，$P(AB)=P(A)$，即 $P(A\mid B)=P(A)$，此时，事件 A 与 B 相互独立；若 $A\not\subset B$，即 $A\overline{B}\neq\varnothing$，由 $P(B)=1$，知 $0\leqslant P(A\overline{B})\leqslant P(\overline{B})=0$，显然 $P(A\overline{B})=0$. 从而，

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(AB)+0=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)$$

故仍有事件 A 与 B 相互独立.

5. 直觉不一定能判定事件的独立性

答 一般来说，事件间的独立关系有很强的直观背景，但不能由此断言直觉能够代替理性. 下面的例子说明凭直觉匆忙下结论是危险的，这时，数学定义是研究的基本前提.

例 a 在一个有两个孩子的家庭中，假设生男孩和生女孩是等可能的，并且一个家庭里第一个孩子的性别与第二个孩子的性别是相互独立的，用 A 表示随机事件“这个家庭中既有男孩又有女孩”，B 表示随机事件“这个家庭中至多有一个女孩”，我们来看看事件 A 与 B 的独立性.

对于有两个孩子的家庭来说，样本空间可记为 $S_1=\{11,10,01,00\}$，有序数“11”表示第一个孩子是男孩，第二个孩子也是男孩，而有序数“01”表示第一个孩子是女孩，第二个孩子是男孩，类似可得其余表示的含义. 这样一来，事件 A 与 B 可表示如下：

$$A=\{10,01\},B=\{11,10,01\}$$

可见
$$AB=\{10,01\}$$

根据“生男孩和生女孩是等可能的”，以及“一个家庭里第一个孩子的性别与第二个孩子的性别是相互独立”的假设，样本空间 S_1 中的每个基本事件发生的概率均应等于$\frac{1}{4}$，于是

$$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{3}{4},P(AB)=\frac{1}{2}P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

显见，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，即事件 A 与 B 不相互独立.

例 b　如果假设不变，但这个家庭有三个孩子呢？事件 A 与 B 含义同上，那么事件 A 与 B 还不相互独立吗？

事实上，样本空间已经改变了，这也就带来了事件 A 与 B 组成的变化. 在三个孩子的家庭中，样本空间可记为

$$S_2=\{111,110,101,011,100,010,001,000\}$$

0－1 序列含义同上，这样一来，事件 A 与 B 分别表示为

$$A=\{110,101,011,001,010,100\},B=\{111,101,110,011\}$$

那么
$$AB=\{110,101,011\}$$

于是
$$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{3}{8}=P(A)P(B)$$

可得“事件 A 与 B 相互独立”，例 a 和例 b 得到了完全相反的结论. 这说明在形式上看来是相同的命题，由于处在不同的概率空间中，其事件的独立性可能表现为完全不同的结论. 因此应该按照随机事件独立性的定义判断独立关系.

1.3　典 型 例 题

例 1　对下面的 3 个随机试验确定它们的样本空间：

(1)E_1：掷一枚均匀的骰子，观察朝上一面出现的点数；

(2)E_2：某人射击一个目标，若击中目标射击就停止，记录射击的次数；

(3)E_3：任取一只灯管，连续使用，直到损坏为止，记录它的寿命.

解　(1)E_1 中，因为骰子是六面体，试验结果共有 6 个：1,2,3,4,5,6，所以样本空间为 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，这是有限型样本空间.

(2)E_2 中，因为射击是一次一次地进行的，若击中目标，不再进行下次射击，若未击中目标，射击就要进行下去. 因此，其试验结果为射击 1 次、2 次、3 次…，所以样本空间为 $S=\{1,2,3,\cdots\}$，这是无限可列型样本空间.

(3)E_3 中，寿命是用时间表示的，时间是连续的，是不可列的. 因此它的样本空间表示为