A Course in Mathematical Analysis

Volume 2

数学分析教程

第二册

常庚哲　史济怀

江　苏　教　育　出　版　社

Chang Gengzhe　Shi Jihuai

Jiangsu Education Publishing House

封面设计：刘小地

ISBN 7-5343-3677-5

9 787534 336775 >

ISBN 7－5343－3677－5

G・3362　　定价:15.00 元

数学分析教程

第二册

常庚哲　史济怀

A Course in Mathematical Analysis

Volume 2

Chang Gengzhe　Shi Jihuai

江苏教育出版社
Jiangsu Education Publishing House

数学分析教程

第二册

常庚哲　史济怀

责任编辑　喻　纬

责任校对　丁建华　史玉娜

出版发行：江　苏　教　育　出　版　社

（南京市马家街31号，邮政编码：210009）

经　　销：江　苏　省　新　华　书　店

照　　排：南京展望照排印刷有限公司

印　　刷：淮　阴　新　华　印　刷　厂

（淮阴市淮海北路44号，邮政编码：223001）

开本 850×1168 毫米 1/32　印张 10.75　插页 2　字数 260 300

1999 年 9 月第 1 版　1999 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2 500 册

ISBN　7—5343—3677—5

G・3362　　定价：15.00 元

序　言

“数学分析”究竟应该包括哪些内容，从西方和东欧各国名为《数学分析》的书籍来看，一直没有十分明确的定义．但是在我国，它作为大学数学系的一门课程的名称，通常包含一元和多元微分学和积分学，以及与之相关的内容．从它的地位和作用，从所占用的学时数来看，说它是数学系最重要的基础课，是当之无愧的．

微积分已有三百多年的历史，经过跨越好几个世纪的数学巨匠们的精雕细琢，千锤百炼，已经形成了一个完整的、精密的庞大知识宝库．随着时代的进步和科学技术的发展，传统数学分析教材的内容显得比较陈旧，只有极少数的几处（例如 Bernstein 多项式）涉及到 20 世纪初的发现．今天，当 21 世纪的朝阳喷薄欲出的时候，这种反差更加强烈，改革数学分析教材的必要性日益显露出来了．在有些新出版的数学分析教科书中，引入了拓扑空间、微分流形，这是朝“现代化”方向走的一种试验．我们的想法则是在保持原有理论水平的基础上，着重于加强数学分析同现代应用数学的其他分支学科的联系．这样做既不会加重学生的负担，又不会挤占后续课程的时间．我们认为，任何积极的改革，都不应该触动其中最基础的理论部分．回顾 20 世纪 50 年代和 70 年代以抛弃这些基本理论为特色的教学改革都未能坚持下来的历史，使我们变得聪明起来，不再干那种蠢事．

何琛、史济怀、徐森林三位教授所著的《数学分析》（共三册）一

书，由高等教育出版社于 1985 年公开出版. 其实，该书早在 1985 年以前，就以讲义的形式作为中国科学技术大学数学系、少年班和教改试点班的教材. 直到今天，这套教材已经为中国科学技术大学的数学教学起过重要的作用，在全国同类教材中也产生了积极的影响.

本书正是以上述《数学分析》一书为基础而写成的. 全书仍为三册. 这中间融合了 19 年来使用《数学分析》作为教科书的教学经验，同时也参考了国内外同类书籍中的许多名著. 在我们看来，本《教程》有如下特色.

1. 从基本理论上看，本《教程》不但包含了上述《数学分析》的全部内容，而且在许多地方添加了新的材料. 其中值得一提的是，在单变量的积分理论中，我们证明了“Riemann 可积的充分必要条件是被积函数在积分区间上的不连续点的集合是一零测集”. 通常这一定理是“实变数函数”课程中的内容，但是我们用了完全属于数学分析的技巧加以处理. 有了这一定理，就可以删去关于可积性的许多讨论，从总体上来看反而缩短了篇幅. 其次，增加了二元凸函数的理论和应用；采用了 Peter Lax 对圆的等周性质的优美证明；收入了能充满整个正方形的 Schoenberg 的连续曲线. 至于更加系统的知识的补充，将在以下的条款中作详细介绍.

2. 在第 2 章“函数的连续性”的最后，我们介绍了“混沌现象”，叙述并证明了李天岩和 Yorke 的“周期 3 蕴涵混沌”的著名定理(1975). 虽然对混沌的研究是当今数学的一个热门分支，但是在它的生长点上，则完全是“微积分的”，更具体地说，只不过是连续函数在闭区间上的性质的巧妙应用. 过去，人们热衷于找出函数迭代的表达式，欢喜收敛的迭代. 在这里我们告诉读者，研究不收敛的迭代会碰到一些非常奇特的现象，从而生长出新的理论.

3. 本书的第 5 章，名为“插值与逼近初步”. 我们从指出 Lagrange 插值多项式的弱点入手，介绍了 1946 年由 Schoenberg

提出的“三次插值样条函数”. 在传统的观念中，函数是愈光滑愈好，往往忽视了在光滑性上无可挑剔的多项式的毛病. 虽然“样条函数”已经成了专门的学问，但是在它的生长点上，却完全是“微积分的”. 在传统的微积分中，罗列着勉强编造的“分段函数”、“左、右连续”、“左、右可导”的例子，但是建立三次样条函数连续性方程的时候，这些概念成了自然而然非出现不可的东西. 三次样条函数是工程样条的一种非常恰当的数学抽象. 读者由此能认识实践对数学的推动，而无须领受生硬的说教.

4. 在第一册的最后一章——第 8 章“曲线的表示和逼近”中，我们介绍了计算机辅助几何设计(computer aided geometric design，简写为 CAGD)中广泛使用的 Bézier 曲线. 它的数学基础是经典的 Bernstein 多项式(1912 年). 过去，在很多数学分析书中也介绍过 Bernstein 多项式，主要是用来作为用多项式来一致逼近有限闭区间上的连续函数的一个构造性的证明. 在逼近论中，研究 Bernstein 多项式的文献浩如烟海，但由于它的收敛速度十分缓慢，直到 20 世纪 60 年代初期，逼近论的专家们还在为它没有任何的实际应用而悲叹. 正在那个年代，法国的工程师 Bézier 创造的、后来被人们称为 Bézier 曲线的曲线被成功地运用到汽车设计中来，当今已成了 CAGD 和 CG(计算机图形学)的理论基础. 人们发现，所谓 Bézier 曲线(曲面)只不过是向量值形式的一元(二元) Bernstein 多项式，而 Bézier 成功的要点乃是他充分地利用了 Bernstein 多项式的“保形性质”——这正好是传统的数学分析教材中不曾谈到的.

在第三册中介绍了 Bernstein 多项式的一致逼近性质，这是因为它在理论上确实有着重要的地位；同时又在第一册的第 5 章中研究了它的保形性质，而在第 8 章中作为曲线理论的一部分内容，讲述了 Bézier 曲线. 这是数学同当代 CAGD 与 CG 的一个接口. 根据我们的经验，在课堂上讲述这一部分内容时，气氛最为活跃，

最能激起学生的热情和兴趣.他们在电脑上根据Bézier的方法，可以随心所欲地设计自己的曲线，亲身感受到数学理论的威力.

5. 在空间解析几何和过去的多变量函数理论中，学生都要学习曲面.但到后来，留在头脑中的到底还有多少曲面？无非是椭球面、抛物面、马鞍面……在本书第11章中，我们介绍了Bernstein-Bézier三角曲面，它是当代CAGD和CG中生成曲面的重要工具.B-B曲面的控制网的概念的进一步延伸，则是多元逼近理论中行之有效的B-网方法.

在本《教程》中，学生将学会如何去生成自己所需要的曲线和曲面，也将学到如何去分析“他们自己的曲线和曲面”的几何性质.Bernstein多项式在它诞生半个世纪之后，是工程师而不是职业数学家为它找到了实际的应用；而工程师们提出的“控制多边形”这种非常生动的几何概念，又被数学家发展成为研究多元逼近理论的有力方法.数学理论的深入和工程技术的发展相互促进和推动的例子屡见不鲜，Bernstein多项式和CAGD，CG之间的关系，就是一个有说服力的例证.

6. 在本书的第三册，当我们用Van der Waerden方法构造处处连续而处处不可微的函数之后，介绍了“分形几何”的大意.传统的数学分析只是把这个例子当成一个“反例”，当作怪物.而我们在这里试图告诉学生：在自然界和社会的现象中，到处存在着这种不规则、不光滑的东西.

7. 样条函数、混沌理论、CAGD和CG技术、分形几何等都是当代应用数学的十分活跃的分支，都已形成了各自的完整体系.这些材料是如何选择的呢？我们的原则是：

(1) 只在这些学科的“生长点”上进行讨论，“点到为止”；

(2) 不作一般的空泛的叙述和议论，必须让学生从中学到实质性的数学思想和技巧；

(3) 所涉及的数学必须是“纯微积分的”，不能再牵扯任何其

他的高深知识；

(4) 所涉及的数学推导必须是简洁的和优美的.

要做到以上几条，特别是后三条，我们必须去搜寻那些初等和简洁的证明.其中有一些是经过我们自己再次加工的.例如，三次样条函数连续性方程的推导，就是我们自己的改进；反映 Bernstein 算子“磨光性质”的 Kelisky-Rivlin 定理(Pacific J. of Math.，1976)，原先的证明用到了矩阵的特征值和特征向量，而我们的初等证明，只有短短的几行.至于三角域上 Bernstein-Bézier 曲面的凸性，更是我们自己的研究工作.

8. 对于经典的定理和理论，我们也做了一些新的处理.利用 CAGD 中的“混合函数”(blending functions)方法，把微分学的 Lagrange 中值定理、Cauchy 定理一直到 Taylor 公式的证明，统一在一种风格之下，变得较为简洁.在证明 Van der Waerden 函数处处连续而处处不可导的时候，我们采用几何方法，这种方法既是非常严格的，同时又免去了传统的证明中那一系列烦琐的区间表示.

9. 精选了例题和习题.我们更换了不少例题，对于保留下来的例题，也尽量寻找比较简单的解法.凡是一个例题也能用初等方法来解决的，同时也列出了初等的解法，以引导和鼓励读者尽可能用最少的知识来解决问题.特别应当提到的是：我们补充了大量的习题，其中一部分有一定的难度.我们把习题分作两大类：练习题和问题，前者是基本的定理和理论的直接应用，一般不需要太多的技巧，而后者则有相当的挑战性.也许我们认为较难的题目，一些聪明的学生，可能给出很简单的解法.有的习题也是正文的扩充，是本书的一个有机组成部分.一套与本《教程》相配合的教学指导书正在编写之中.

10. 在写作风格上，我们很不赞成一些数学书中的所谓“标准写法”，那些语言像是一封电码，没有任何感情色彩.我们力图把读者当成自己的朋友，平等对话，娓娓谈心.

本书与过去已有的同类教材相比，有着较大的差别，内容有不少更新，篇幅也随之加大. 究竟该讲授些什么，不讲什么，一个有经验的教师完全可以针对受教育者的情况和允许的教学时数作出取舍. 文字可以多写，讲课可以少讲，给学生留有自己阅读的余地.

习题的分量是过多了一些，这也要请任课的老师们根据学生的情况适当地选择. 初学者应当在教师的指导下做练习，不必题题都做；更不要因为有几个题目做不出来而失去信心.

本书的初稿曾经以讲义的形式，在中国科学技术大学数学系、少年班和教改试验班 1996 和 1997 两届学生中试用，收到了比较满意的效果.

在写作本书的时候，我们参考了国内外与数学分析相关的许多优秀著作，在此恕不一一列名致谢.

在写作本书的时候，得到了中国科学技术大学主管教学的负责同志和数学系负责同志的热情鼓励和大力支持，作者们谨在此对他们表示诚挚的感谢. 有着数学分析课程多年辅导经验的王建伟同志，对本书的写作提出了许多宝贵的意见，并为本书的第一册增添了许多习题，使本书增色不少.

囿于作者们的水平和经验，缺点和错误在所难免. 本书出版后，将会有怎样的反映？当前很难预料. 好在这是一次教学改革，要改革就不能怕失败. 只要多少还有一些积极的东西，我们就不会灰心和失望.

常庚哲　史济怀

1998 年 10 月 1 日

目　　录

第 9 章

多变量函数的连续性

本书的第一册主要讨论了单变量函数的微分学和积分学. 为了讨论的顺利进行,我们首先详细地论述了单变量函数的极限和连续性;所有这些都是以实数理论作为基础,因此第一册第 1 章的内容就是实数.

单变量函数是数量之间的最简单的关系. 一个事物的变化和发展通常不止是依赖于一种因素,而是多种因素,要从数量上来反映这种关系,单变量函数就不够用了,我们必须考虑一个量同时依赖于许多其他的量的情形,这就需要多变量函数. 本册的主要内容是多变量函数的微分学和积分学,我们也从多变量函数的极限和连续性谈起. 为此目的,需要了解所谓任意有限维的 Euclid 空间的基本知识,因为多变量函数正是在 n 维 Euclid 空间(简称为"欧氏空间")的子集上定义的.

为了今后的方便,我们在这里定义两个集合的"积集". 设 A, B 是两个集合,我们定义

$$A\times B=\{(a,b):\ a\in A,b\in B\},$$

并称之为 A 同 B 的**积集**. 一般来说,$A\times B$ 与 $B\times A$ 是不相等的. 我们将 $A\times A$ 简记为A^2. 例如说,$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y):\ x,y\in\mathbf{R}\}$ 就是平面上的点的全体. $\mathbf{R}^2$ 中的子集$[0,1]^2$,就是平面坐标系中,以(0,0),(1,0),(1,1)和(0,1)这四点为顶点的正方形的四边上和内部的点的全体.

集合的积集的概念,可以用很显然的方式推广到有限个集合组成的积集上去. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为 k 个集合,那么

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_k=\{(a_1,a_2,\cdots,a_k):a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,k\}.$$

我们有简写的记号

$$A^k=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k个}.$$

§9.1 n 维 Euclid 空间

我们定义集合

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

为简单起见,n 数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$用一个黑体小写字母 $\boldsymbol{x}$ 来代替,即

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**点**,也称它是一个**向量**;在什么时候用哪个术语得看行文的内容而定. 实数 x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个**分量**,每一个分量都是零的向量记为 $\mathbf{0}$,即

$$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0),$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 的**零向量**.

我们可以在 $\mathbf{R}^n$ 中定义向量的加法运算,设

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

令

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

称向量 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ **之和**.

再定义数与向量的倍运算,设 $\lambda\in\mathbf{R}$,而 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,令

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

称向量 $\lambda\boldsymbol{x}$ 是**向量 $\boldsymbol{x}$ 的 λ 倍**.

刚刚定义的这两种运算,称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**线性运算**. 容易证明,向

量的加法运算满足交换律和结合律，也就是说，对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$，有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}.$$

不难看出 $\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

我们规定

$$-\boldsymbol{x}=(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n),$$

称它为向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的**负向量**，由此可知

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}.$$

倍运算对向量的加法运算适合分配律，也就是说，对任何 $\lambda\in\mathbf{R}$ 与任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}.$$

此外，还有对任何 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，我们有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x},$$
$$\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x},$$
$$-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$$

等等.

集合 $\mathbf{R}^n$ 带上以上定义的线性运算之后，称为 **n 维向量空间**.

现在，再在 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中引进"内积"，对于任何 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

这是一个实数，叫做向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**.

内积具有以下明显的性质：

1° $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geqslant0$，其中等号成立当且只当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$；

2° $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$；

3° $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle$；

4° 对任何实数 λ，有$\langle\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$.

性质 1°与 2°分别称为内积的**定正性**和**对称性**,它们的证明是十分明显的. 如果设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,那么

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i+z_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i+x_iz_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} x_iz_i = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle,\end{aligned}$$

由此证得了性质 3°,而性质 4°的证明更为简单.

由以上性质可以推知,对于任何 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ 及任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$,我们有

$$\langle \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\mu\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle.$$

这条性质以及 3°与 4°都称为内积的线性性质.

向量空间 $\mathbf{R}^n$ 定义有内积之后,称为 **n 维 Euclid 空间**,简称**欧氏空间**. 采用这个名称是有充分的理由的. 大家知道,在 Euclid 几何中,可以计算点与点之间的距离、线段的长度、向量之间的夹角等等. 我们即将看到在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中,同样可以定义这些几何量.

对于任何向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,定义

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle},$$

称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的长度未尝不可,但数学上常常用一个更雅的名词,叫做向量 $\boldsymbol{x}$ 的**范数**. 可以证明,向量的范数具有以下三条性质:

1° $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0$,式中等号当且只当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 成立;

2° 对任何 $\lambda\in\mathbf{R}$,$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$;

3° $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$(三角形不等式).

性质 1°和性质 2°甚为明显,我们只证明性质 3°. 在 n 维空间中,Cauchy-Schwarz 不等式(见第一册 §7.8)可以通过内积表示为

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2\leqslant\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle, \tag{1}$$

它也等价于