

学科案例教学精品丛书

丛书主编 蔡伟

ZHONGXUE SHUXUE ANLI JIAOXUELUN

# 中学数学案例教学论

■ 杨光伟 编著

学科案例教学精品丛书

丛书主编 蔡伟

# 中学数学案例教学论

杨光伟 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS  
浙江大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

中学数学案例教学论 / 杨光伟编著. —杭州: 浙江大学出版社, 2012. 12  
(学科案例教学系列丛书)  
ISBN 978-7-308-10636-8

I. ①中… II. ①杨… III. ①中学数学课—教案(教育)—教学研究 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 222082 号

## 中学数学案例教学论

杨光伟 编著

---

责任编辑 冯其华

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 浙江时代出版服务有限公司

印 刷 德清县第二印刷厂

开 本 710mm×1000mm 1/16

印 张 26.75

字 数 494 千

版 印 次 2012 年 12 月第 1 版 2012 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-10636-8

定 价 40.00 元

---

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591



## 总序

在教师职业日益走向专业化的今天,教师教育的课程与模式的改革也在不断深化。人们越来越认可杜威“培育师资的问题,是众多专业人员培育其中的一种而已”的论说,为了证明教师职业的专业性和不可替代性,教育研究者和教学工作者都希望能够像培育律师、医师、工程师、企业管理人员等专业人员一样培育师资。为此,在师范生教育和教师职后培训中,开始突破传统的纯粹的理论说教,加入了诸多实践性元素。其中,起源于哈佛法学院的案例教学法成为高等师范教育和教师职后培训的重要选择。

作为以培养基础教育优质师资为己任的省属重点高校浙江师范大学,长期以来探索着师范生教育与教师继续教育的高效途径,而案例教学早在20世纪90年代的一些师范课程中就有萌芽。到2007年下半年,浙江师范大学成立教师教育学院,党委书记梅新林(时任校长)特别重视学校师范课程建设,要求教师努力搞好“案例教学、问题化教学、任务驱动式教学”,进一步强化教师教育特色,打造教师教育品牌。教务处、研究生院与教师教育学院积极响应,不但专设了“案例教学的理论与方法”课程,而且设立专项基金,开展广泛的课题研究 with 课程改革项目建设。自此,全校上下掀起了轰轰烈烈的案例教学活动,案例教学现已成为学校师资培训的主要模式。浙师大的师范课程因此发生了崭新的变化,学生满意率也在不断提高。

我有幸成为“案例教学的理论与方法”课程首批主讲教师之一,在教学过程中,我们逐步领悟到这一涵盖中小学各学科教学论的系列课程的内涵与功效,它们既是融通教学理论与教学实践两极的独立课程,同时也为教师教育类课程的实施提供别具一格的手段和途径。我们还清醒地认识到无论是作为课程的案例教学,还是作为方法的案例教学,其目标都是希望通过对中小学教学案例的比较分析和研讨模拟,使师范生和新手教师迅速把握教学的本质,发现教学的规律,明了教学发展趋势,总结与积累成功的教学经验,寻找问题之因与问题解决的策略,并在教学理论的指导下,能够较全面地了解目前教学的实际状况与发展趋





势,发现教学中存在的诸多问题及解决的策略,从而为师范生成功入职与新教师的快速成长奠定良好的基础。

基于科学的认识和正确的定位,案例教学课程在学生中的影响力越来越大,但我们并不满足于此。为提高该课程的品质,我会同其他学科教师申报了学校精品课程,尽管由于课程建设时间短,我们的教学成果十分有限,但学校的专家评委仍然破格拔擢,为本课程的跨越式发展奠定了良好的基础。第二年我们申报省级精品课程,同样因为该课程的创新性、应用性与教育价值而被立项。连续的成功,给了我们师资团队极大的鼓励,我们的课程教育质量也获得了最大限度的提高。不但如此,各位主讲教师将该课程的精华应用于在其他的课程教学中,同样获得较大的成功,主讲教师的学生评教满意率名列前茅。这也从另一个侧面证明了案例教学的实际应用价值。

但在我们不断推进课程与教学改革的时候,越来越觉得教学资料匮乏,我们所使用的教材不能说不好的,有的甚至堪称文质俱佳,然而,毕竟案例教学较为独特,具有很强的个性,市面上能找到的案例教学教材几乎很难吻合我们的要求,这在一定程度上影响了教学质量的提升,妨碍了教学模式的发展与教法的创新。为此,我们几位主讲教师经过商讨,决定出版一套依据我们的教学理想和原则,根据我们的教学经验和我们所面对的各层次学生的需要而编写的论著,以作师范生、课程与教学论研究生及教育硕士教材之用,并定名为“学科案例教学精品丛书”。为了体现不同学科的特点,我们充分尊重各位作者的智慧,各册论著从体例结构到语言表达都不作统一规定。

我们的研究出版设想得到楼世洲副校长、李伟健处长和李长吉院长等各级领导的支持,他们从不同的角度给予我们诸多有益的建议,学校还拨专款资助本丛书的研究出版。

经过一年多的努力,本丛书终于将逐一付梓。也许丛书中的每一本论著都存在这样那样的问题,但我们相信,它们各体现了学科的特点,凝聚了我们每位作者多年来的教学经验,具有较强的针对性和可操作性,其启迪性价值是客观存在的。或许它们不一定切合每所师范院校的实际,也不一定适应每位相关学科读者的特点,但我们坚信,其中的方法、案例一定有你所需要的。我们真诚地期待你的回响。

蔡伟于浙江师范大学丽泽花园

2011. 2



## 目 录

<b>第一章 案例概述</b> .....	(1)
一、何谓案例 .....	(1)
二、对案例的基本认识 .....	(3)
三、案例的价值.....	(19)
<b>第二章 教学案例与案例教学</b> .....	(22)
一、教育案例与教学案例.....	(22)
二、案例教学的理论基础.....	(28)
三、案例教学的精神实质.....	(35)
四、案例教学的基本环节.....	(36)
<b>第三章 从案例中学习</b> .....	(40)
案例 3-1 在导数学习中如何进行数学实验 .....	(40)
案例 3-2 如何引导学生在研究中学习 .....	(45)
案例 3-3 在立体几何教学中如何应用类比的思想 .....	(52)
案例 3-4 如何深度解剖数学例题 .....	(57)
案例 3-5 构建函数模型, 解决实际问题 .....	(63)
案例 3-6 如何用几何画板探索椭圆的轨迹 .....	(68)
案例 3-7 如何在一题多解中发散学生的思维 .....	(72)
案例 3-8 如何利用开放题培养学生的创造性思维 .....	(75)
案例 3-9 如何通过元认知指导改善数学学习能力 .....	(79)
案例 3-10 如何培养学生的数学反思能力 .....	(87)
案例 3-11 复习课中如何培育学生的学习能力 .....	(92)
案例 3-12 如何在数学课堂中提出好的问题 .....	(96)
案例 3-13 如何有效地突破函数概念的教学难点 .....	(101)
案例 3-14 如何在课堂教学中有效地导学 .....	(105)
案例 3-15 如何有效地引导学生的数学探究 .....	(111)



案例 3-16	同课异构中如何提出有效的问题 .....	(116)
案例 3-17	如何实施研究性学习 .....	(123)
案例 3-18	如何在高中数学中有效地教学 .....	(130)
案例 3-19	教师如何将课堂还给学生 .....	(134)
案例 3-20	如何在实验中学习可能性 .....	(140)
案例 3-21	在概念教学中如何把握数学思想方法 .....	(146)
<b>第四章</b>	<b>中学数学教学案例分析</b> .....	<b>(152)</b>
案例 4-1	等比数列前 $n$ 项和 .....	(152)
案例 4-2	如何在课堂教学中渗透中国古代的数学思想方法 .....	(157)
案例 4-3	在正四棱台体积公式教学中如何渗透数学史知识 .....	(162)
案例 4-4	如何在整体联系中教余弦定理 .....	(169)
案例 4-5	在自然的思考过程中催生“新想法” .....	(173)
案例 4-6	函数概念教学的改进方案 .....	(178)
案例 4-7	直线与圆的位置关系 .....	(185)
案例 4-8	直线与平面垂直的判定 .....	(190)
案例 4-9	探究三角形解的个数问题 .....	(198)
案例 4-10	分类加法与分步乘法计数原理(1)的磨课 .....	(204)
案例 4-11	探究对勾函数的单调性 .....	(210)
案例 4-12	由韦达定理引发的数学之旅 .....	(217)
案例 4-13	函数的应用(第一学时) .....	(221)
案例 4-14	关于统计的教学设计 .....	(226)
案例 4-15	会跳舞的抛物线 .....	(232)
案例 4-16	常量与变量 .....	(237)
案例 4-17	轴对称变换的应用——最短路线问题 .....	(244)
案例 4-18	如何实现分层教学——以锐角三角函数为例 .....	(249)
案例 4-19	二次根式 .....	(256)
<b>第五章</b>	<b>中学数学教学设计专题案例</b> .....	<b>(260)</b>
专题一:基于 4MAT 学习模式的教学设计 .....		(260)
案例 5-1	微积分基本定理可以这样教 .....	(261)
专题二:基于 APOS 理论的教学设计 .....		(268)
案例 5-2	勾股定理 .....	(269)
案例 5-3	三角形中位线 .....	(275)
案例 5-4	平行四边形 .....	(279)
案例 5-5	黄金分割 .....	(283)



专题三:基于目标为本的学习原理的教学设计 .....	(287)
案例 5-6 探究圆的面积公式 .....	(289)
案例 5-7 零用钱的期望值 .....	(294)
案例 5-8 二元一次方程组解的数目 .....	(296)
案例 5-9 勾股定理 .....	(302)
案例 5-10 利用统计量构写数据 .....	(306)
案例 5-11 求多边形的内角和 .....	(311)
案例 5-12 探索零指数及负整数指数 .....	(314)
案例 5-13 同位角、内错角、同旁内角 .....	(317)
案例 5-14 折纸图样及立体 .....	(325)
案例 5-15 掷硬币 .....	(329)
<b>第六章 高中数学教例及其评述</b> .....	(332)
案例 6-1 函数的单调性 .....	(332)
案例 6-2 对数函数 .....	(337)
案例 6-3 平面与平面垂直 .....	(342)
案例 6-4 点到直线的距离 .....	(345)
案例 6-5 几何概型 .....	(352)
案例 6-6 任意角的三角函数 .....	(356)
案例 6-7 向量的数量积 .....	(360)
案例 6-8 两角和与差的余弦 .....	(365)
案例 6-9 数列 .....	(370)
案例 6-10 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .....	(374)
案例 6-11 指数函数的图象及其性质 .....	(379)
案例 6-12 任意角的三角函数 .....	(386)
案例 6-13 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 .....	(392)
案例 6-14 正弦定理 .....	(401)
案例 6-15 等差数列的前 $n$ 项和 .....	(411)





## 第一章

# 案例概述

### 一、何谓案例

“案例”(case)一词,在英文中可以理解成状态、情形、事例、病例等。中文辞典中有“案例”一词,系唐朝时,士人应科举考试,分身、言、书、判四方面,其中“判”,也称案判,是取州县案牒疑义,让应考的士人加以分析判断,以考查他们的能力,类似于目前公务员或司法考试中的“实例题”。

从词源学的角度看,所谓“例”为确定之成例,所谓“案”为已成之旧案,两者合而称之为“案例”,主要表示用已经发生或被记载的事情来帮助说明或证明道理。但是,在不同的学科领域内,案例有不同的称谓,如在医学上称成“病例”;在军事上称为“战例”;在法学上称为“判例”;在商业或企业管理教学中称为“实例”等。

尽管不同领域内的案例具有不同的特征,但是它们仍然具有一定的共性。

首先,案例的编写具有特定的作用。编写案例,其要旨不是为了指导工作和反馈情况,或直白地介绍经验教训,而是意在通过对案例的剖析、研讨和借鉴来认识问题、揭示规律,使人们从中得到某种启发,提高某种能力。案例所具有的这种明确的功能指向性,也使得其适用人群有着相应的类别和层次区分。尤其是用于教学培训的一些案例,不仅提供的背景资料相对较多,而且从资料选用、问题提出、编写形式、分析诱导等方面都会有相应的要求和针对性,并通常留有悬念供人们分析思考。

其次,案例的选题强调典型性。这种典型性通常表现在四个方面:在同类个案(问题)中最具有代表性和范例性;能集中体现学科专业特点和反映事物的客观规律,并具有探讨和利用价值;对现实经济社会生活有影响的热点、难点,或值得关注的新情况、新问题和新事物;有学习、效仿、推广或警示、告诫、教育意义的经验教训等。典型的案例,能够从某“个”案例中折射和概括出某“类”理论知识,



可以代表某类事物或现象的本质属性,还能体现实践中可能会遇到的问题,从而使学习者不仅掌握有关的原理和方法,而且也为他们将这些原理和方法运用于实践奠定一定的基础。

再者,案例所涉及的信息资料具有真实性。案例源自于现实生活,忠实于客观实际,具有现实性、真实性和实践性的特征。尤其是在司法实践、临床医学等领域,案例具有指导性、示范性,在资料搜集和编写要求上,更需要有一种严肃和严谨的态度。编写案例时,不能为了某种目的或效果而去虚拟情景,且必须正确认识情景描述的不完全性特征。对多数案例而言,它不仅是一个事件情景的原始记录,而且需要在保持信息资料客观真实的基础上,对原始信息进行必要的综合取舍和编辑整理,有时还要对其中一些情节作必要和恰当的技术处理。案例与故事之间的根本区别是:故事是可以杜撰的,而案例是不能杜撰和抄袭的,它反映的是真实发生的事件,不能用“摇摆椅子上杜撰的事实来替代”,也不能用从抽象的、概括化的理论中演绎出来的事实来替代。

最后,案例所涉及的主题思想具有研究性。一般而言,案情的背景相对复杂,情节较为曲折,相关要素齐全,它所涉及的主题提供了多角度的思考空间,具有深入研究的价值,其中的观点会呈现出多元化的特点,潜在内涵丰富,寓意深刻,有助于启迪思想。除少数指导性、示范性和释疑性案例外,其他案例更多的为无确定性结论或其结论往往具有多样性、争议性的特点。这既是案例与事例的重要区别,也体现了“案例是用来供研讨的”这一重要特性。正因为这一点,案例才成为一种独特的研究成果的表现形式。

总而言之,案例是一种为了达到一定目的,对具体事物和现象及其发生过程所进行的实际情境的描述。所描述的是具有典型意义的特定的现象或实况,而不是从抽象的、概括化的理论中演绎出来的情境;案例中呈现了一个相对完整的事件或例子,事件发生的时间、地点、具体情节以及过程往往都要揭示出来;好的案例描述应反映现实生活场景,有其自身的应用价值、理论价值和现实意义。

概括地说,我们可以把案例定义为:含有问题或疑难情境的真实发生的典型性事件。

### 阅读资料

## 关于案例的不同界说

案例是关于特定情景的描述。中国案例研究会会长余凯成教授认为:“所谓案例,就是为了一定的教学目的,围绕选定的问题,以事实作素材而编写成的某一特定情景的描述。”简单地说,一个案例就是一个实际情境的描述,在这个情境



中包含有一个或多个疑难问题,同时也可能包含有解决这些问题的方法。它一般是从学校管理者或教师的角度来描述的,涉及学生如何按照学校管理者或教师提出的解决问题的方案,一步步向前运行的。

案例是关于商业事物的记录。如美国学者格柯说:“案例就是一个商业事物的记录,管理者实际面对的困境,以及作出决策所依赖的事物、认识和偏见等都在其中有所显现。通过向学生展示这些真正的和具体的事例,促使他们对问题进行相当深入的分析 and 讨论,并考虑最后应采取什么样的行为。”

案例是包含多种因素在内的故事。如理查认为:“教学案例描述的是教学实践。它以丰富的叙事形式,向人们展示了一些包含有较适合学生学习的典型行为、思想、感情在内的故事。”顾泠沅认为:“所谓案例,就是指包含有某些决策或疑难问题的教学情境故事,这些故事反映了典型的教学思考水平及其保持、下降或达成等现象。”

案例具有多重含义。如托尔认为:“一个出色的案例,是教师与学生就某一具体事实相互作用的工具;一个出色的案例,是以实际生活情境中肯定会出现的事实为基础所展开的课堂讨论。它是进行学术探讨的支撑点;它是关于某种复杂情境的记录;它一般是让学生理解这个情境之前,首先将其分解成若干成分,然后再将其整合在一起。”

## 二、对案例的基本认识

上述概括性的描述,应该说总体上反映了案例的形貌。从这一概述中可以看到,对事物静态的、缺乏过程把握的描述不能称之为案例;信手拈来的不包含问题或疑难情境在内的事件也不能称之为案例;不以客观真实为基础,缺乏典型意义的事件也不能称之为真正的案例。换句话说,对于案例的理解,至少应该存在以下几点认识。

首先,案例是一个事件,是对实际情境的某种描述。案例讲述的应该是一个一个的故事,叙述的是故事产生、形成以及发展的历程,是对事物或现象的动态性的把握。

其次,案例是含有问题或疑难情境在内的事件。事件只是案例的必要条件,而不是充分条件。换句话说,事件不过是案例的基础素材,并不是说所有的事件都可成为案例,能够称之为案例的事件,必须要包含问题在内,并且也可能包含解决这些问题的方法。

再次,案例展现的是一个典型性的事件。除了“问题或疑难情境”这样一个





基本要素,作为案例的事件还需具有一定的典型性,要能够从这个事件的解决当中说明、诠释类似事件,要能够给读者带来这样或者那样的启示、体会。

最后,案例展现的是一个真实发生的事件。案例虽然展示的是一个饶有趣味的故事,要与故事一样生动有趣,但案例与故事也有一个根本性的区别,那就是故事是可以杜撰的,而案例是不能杜撰的,它反映的是真实发生的事件,是事件的真实再现。

对于案例有了这样的基本认识后,还需进一步明了一个“好”案例的标准,以便为案例的开发提供可资衡量、评判的基本参照框架。

什么样的案例才是一个适宜的“好”的案例?美国一些学者通过调查,提出了一个“好”案例的下列标准:

一个“好”的案例应讲述一个故事。像所有“好”故事的标准一样,一个“好”的案例必须要有有趣的情节。要能把事件发生的时间、地点、人物等按一定结构展示出来,当然在这其中,对事件的叙述和评点也是必要的组成部分。

一个“好”的案例要把注意力集中在一个中心论题上,要突出一个主题,如果是多个主题的话,叙述就会显得杂乱无章,难以把握住事件发生的主线。

一个“好”的案例描述的是现实生活场景,应该反映的是近5年发生的事情,因为这样的案例读者更易于理解。

一个“好”的案例可以使读者有身临其境的感觉,对案例所涉及的人产生移情作用。

一个“好”的案例应包括从案例反映的对象那里引述的材料。例如,反映某个学校或某个班级的案例,可引述一些口头或书面的、正式或非正式的材料,以增强案例的真实感。

一个“好”的案例需要对面临的疑难问题提出解决方法。

一个“好”的案例需要有对已经作出的解决问题决策的评价。也就是说,一个“好”的案例不仅要提供问题及问题解决的方法,而且也要有对这种解决问题方法的评价,以便为新的决策提供参照点。

一个“好”的案例要有一个从开始到结束的完整情节,要包含有一些戏剧性的冲突。

一个“好”的案例的叙述要具体、特殊,也就是案例不应是对事物大体如何的笼统描述,也不应是对事物所具有的总体特征所作的抽象化的、概括化的说明。

一个“好”的案例要把事件置于一个时空框架之中,也就是要说明事件发生的时间、地点等。

一个“好”的案例要能反映教师工作的复杂性,揭示人物的内心世界,如态度、动机、需要等。



## 阅读资料

### 使用面积模型表示分数、小数和百分数

给图 1-1 所示矩形中的 6 个小正方形涂上阴影。

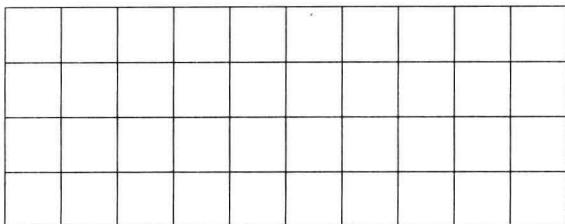


图 1-1

使用图表,解释怎样解决下面的问题:

- (1)表示阴影区域所占的百分比;
  - (2)表示阴影区域的小数;
  - (3)表示阴影区域的分数。
- (在阅读荣·卡斯特曼的教学方法之前完成。)

### 荣·卡斯特曼的教学方法

荣·卡斯特曼是一位经验丰富的教师,他对学生要求很高。在进入教师行列之前,他是一家大公司的工程师。尽管在工作上,他被认为是一个成功人士,但是他发现自己在一些重要的方面还缺点什么。于是,在事业中期,他回到学校并获得了教育学硕士学位。由于他的知识背景以及对该学科的爱,他很自然地主修了初中数学(五至八年级)。有趣的是,在他刚开始教中学数学的时候,他发现自己数学上的天赋反倒成了教学上的“绊脚石”,而不是有用的资源。荣不是那种只呈现毫无意义的算法的教师,对此他感到自豪。可是他发现自己思考概念和程序的方式与七年级学生的思考方式很难沟通。当学生未能获取那些概念和程序时,他常常变得心情沮丧,而责怪学生没有认真听课或者不够努力。

荣花了很长一段时间才领悟到为什么与学生交流会有如此大的困难。不过,几年的教学之后,他不仅学会了怎样对学生“说”,而且学会了“听”学生说。这使他开始明白学生正在如何正确或错误地理解数学。这些年里,他发现鼓励学生讨论数学的最有用的策略之一是使用图表。尽管图表不是什么灵丹妙药,但荣相信它提供了一个推理的工具。由于使用了图表,他发现学生们对数学充满了热情。



在这几年里,荣在教学中广泛使用了可视图表,他认为他和学生们开始以一种有意义的方式对重要的数学概念进行了相互交流,不过有时他担心那些程序——极为快速而有效的实现从A到B的方式——在这个过程中可能丧失。在过去的一年里,他致力于在培养学生概念性理解与灵活使用有效的程序两者之间找到平衡。

荣·卡斯特曼是这样谈论他班上的情况的:

我和七年级学生一起学习分数和小数已经好几周了。开始我们学习的是传统的换算(例如, $\frac{3}{5}=3$ 除以 $5=0.6$ ),接着就转向学习分数和小数概念的意义。我们通过使用学具和可视图形进行学习,重点是一个单位整体的部分和位值。例如,我们使用分成10份和100份的小数方块(见图1-2),来阐明所有由 $\frac{3}{5}$ , $\frac{6}{10}$ , $0.6$ , $\frac{60}{100}$ 和 $0.60$ 覆盖的区域相同。

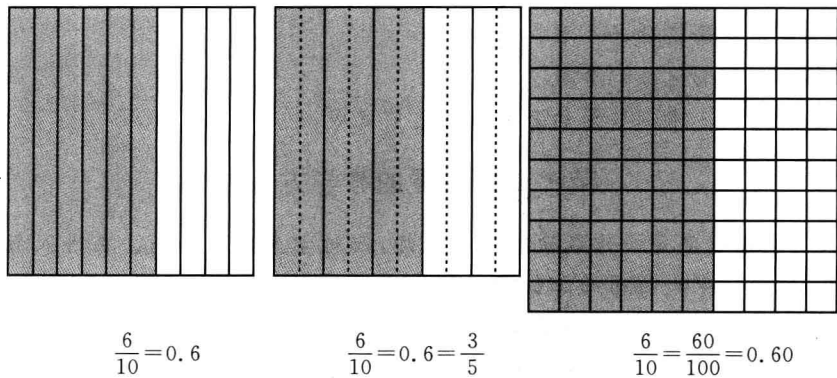


图 1-2 阴影部分表示与 $\frac{3}{5}$ , $\frac{6}{10}$ , $0.6$ , $\frac{60}{100}$ , $0.60$ 等价的小数方块

最近,我们开始了百分数的学习。我们把大量时间花在强调使用各种各样的学具和可视图形上来加深对百分数意义的理解。

我上的七年级两个班的课都接近单元的尾声了,可是他们才开始学习有理数,对此我感到焦虑不安。在今天这不寻常的一天,我决定让学生同时学习三种表示法——分数、小数、百分数。目标就是要学生想出一系列矩形阴影部分的百分数、小数、分数表示形式。我尤其想让学生使用可视图形去寻找他们的答案,而不是依赖该单元开始之前就已经学习过的传统算法。我希望这会有助于提高他们对分数的各种表示形式和它们之间关系的理解。

我计划在第二节和第六节按同样的方式上课,这样我能够在午餐时去反思



先上的那节课,并在所讨论的和还未讨论的基础上对教学过程作出调整。这两个班在成员组成以及学生的课堂反应上有惊人的相似性,所以我常常发现这种实施策略效果较好(有时我先在第六节课尝试新课,以使上第二节课的学生并不总像实验室里的小白鼠那样被当做实验的对象)。

## “第二节课”课堂设计

### 【组织教学】

在上课开始时,我提出三个问题,并要求学生关注第一个问题(阅读资料开头的图 1-1)。

我期望这个问题对学生会是一个挑战,因为这是他们第一次处理不是  $10 \times 10$  的格子。这增加了一定的复杂性,因为小格子组成的区域,如十分之几或百分之几不再那么一目了然,学生必须理解分数的关系之后才能推理得出。

在讨论问题时,我指出我希望他们实实在在地使用图表去算出每个问题的答案,而且解决办法不止一种。在讲授中,我明白地告诉学生,他们应该准备好去解释和(或)用图形演示他们的答案之所以有意义的理由。我对学生们说,他们和同伴一起大约有 10 分钟的时间去解决第一个问题。然后我们全班一起复习学过的内容,复习时我要他们当众示范怎样用图表来解决问题。

### 【实施任务】

当学生们开始成对解题的时候,我巡视教室,观察他们处理问题的方法。所有学生都很容易地给 6 个正方形涂上了阴影。我观察到学生所面临的第一个困难是不能计算出那 6 个正方形在整个图形中所占的百分比。一些学生很高兴地写上 6%,但没有注意到正方形数目的总和不再是 100,而是 40。不过,大多数学生确实注意到了这个图不是通常  $10 \times 10$  的格子图,因而 6% 可能不是正确答案。到现在为止他们还没有学过计算“6 是 40 的  $x\%$ ”的算法规则,学生对下一步该做些什么显得很困惑。我让他们努力思考了一小会儿,对他们的进展越来越不满意。学生们感到自己没有能力快速解决问题而开始向我施加压力,希望我能够给他们一种能用来计算出正确答案的算法。对此,我犹豫不决。从内心讲,我不想只是简单地给他们提供一种能找到百分比的方法;我想让他们使用图表自己解答,但是我不能确定怎样才能让他们那样做。许多学生开始感到困难,逐渐对模棱两可的问题感到不知所措。

我快速地对问题进行了估计,发现从第三个问题(涂上阴影的区域表示的分数是多少?)开始入手可能容易些。巡视各小组的时候,我建议他们先从计算分数开始。我的直觉是正确的,大多数学生确实成功地用矩形计算出那 6 个涂上



阴影的正方形要用分数 $\frac{6}{40}$ 来表示,然后可以化简到 $\frac{3}{20}$ 。可是,下一步又如何进行却没有包含在我的“游戏”计划之中。但是我觉得不能让“游戏”终止。学生们很兴奋,并注意到现在已经能够做第二个问题(涂上阴影的区域部分用小数表示是多少?),他们只需要简单地用3除以20就可以,并得到答案是0.15。他们一知道小数表示是0.15,就马上转向“尝试法”,把小数点向右移2个单位,将小数转换成了百分数。这一刻,他们认为自己已经解答了问题,而等待我去巡视他们的小组以判定他们的答案是否正确。可是,他们是否理解隐藏在换算之中的推理,是否理解分数、小数、百分数与矩形中相应阴影部分之间的关系,对此我不能确定。看来他们并没有使用图表,甚至没有检查所获答案的合理性。

这一阶段已进行了15分钟,我们需要顺次继续进行下去。当我在每个小组都停留了一会儿,并评判他们答案对错之后,我说该是与全班同学分享答案的时候了。我要杰纳和雷展示他们的方法和答案。在巡视时我就已经注意到他们两个的计算有误。我决定让他们用图表去检验答案的合理性。杰纳和雷已正确计算出把 $\frac{3}{20}$ 作为第三个问题的答案,但是做除法时犯了错,而得出第二个问题的答案是0.015,第一个问题的答案是1.5%。在展示了他们的计算过程和答案之后,我说:“看看这个图,它看起来仅有1.5%的矩形被涂上了阴影吗?”他们还没有回答,几个学生就在座位上抢着指出他们做除法时小数位移错了。我感到不能忽视这一点,于是我很快地复习了一下小数的乘除程序。一计算出0.15这个正确答案,杰纳和雷就迅速把他们的百分数改为15%,然后回到自己的座位上去了。我向全班指出,看来15%确实是比1.5%作为阴影部分所占百分比的答案更合理的估计。

尽管这个问题我们已经花了20分钟,并且三个问题都有了正确答案,但是我还是不想马上就告一段落。因为我仍然有一种不安的感觉,我们花了太多时间去考虑答案和程序正确与否,而实际上在使用图表进行推理上却没有留出足够时间。我决定冒一个险,把夏芮思和奎斯塔开始时给第一列的4个正方形涂上阴影,然后说有6%的正方形被涂上了阴影。(我知道他们的答案不正确,但是我不知道该做些什么使他们能重新思考答案,不过这并不重要。当我还在考虑说什么时,他们的注意力就已经转移了,开始积极地展示第二个问题的答案。)对第二个问题,他们说自己还没有具体的答案,不过他们有一个想法。奎斯塔指着矩形说:“总共有10列,这意味着每一列是 $\frac{1}{10}$ ,如果给1列涂上阴影,答案就是0.1;如果有2列涂上阴影,答案就是0.2,那么问题答案就落在两者之间的中





途。”我问他们怎样计算或者把 $\frac{1}{10}$ 的 $\frac{1}{2}$ 写成小数。有两个学生自告奋勇,但提供的答案却是不正确的。由于时间紧迫,我提醒全班注意我们以前所做的工作,那就是我们把“的”翻译成乘积符号。我一边解释一边在黑板上写道“ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{10}$ 等于 $\frac{1}{20}$ ,这可写成等价分数 $\frac{5}{100}$ 或小数0.05”。我接着说明6个阴影的正方形的小数表示是 $0.15\left(\frac{1}{10} + \frac{5}{100}\right)$ 。

我看了一下表,发现45分钟的课差不多已进行了30分钟。我想在这个问题上我们已经花了足够多的时间,学生应该开始做剩下的两个问题了。

午餐时,我细细回顾了第二节期间发生的事,还批阅了学生关于那三个问题所做的练习,事实上大多数人完成了所有三个问题。可是,绝大多数学生直接跳到了算法的使用上,实际上几乎没有人对图形加以注意,而且学生们使用的程序有时还是错误的,他们常常没有按正确的步骤执行。令我惊奇的是,我发现学生草率执行程序与他们明显没有检查答案合理性的事实相比较,后者更令我心烦意乱。

经过深思,我认为我的目标是合理的,我选择和组织实施的任务是好的。如果学生放慢速度,真正把时间花在思考他们正要解决的问题上,那么他们一定能够完成我所要求的任务。我决定在第六节课上再试一次,不过这次我不想让时间控制我们的进度。我也绝不因为学生们不知怎样操作而顾虑重重,如果我能够找到一种不直接告诉他们该怎样做而支持他们的方法……

## “第六节课”课堂设计

### 【组织教学】

在第六节课上,我组织任务的方式与第二节课堂上所采用的方式完全一样,也向他们强调要使用图表法去得出答案。我一再说明,除了看他们所得答案正确与否以外,我还要根据他们解释答案的质量和利用可视图形进行推理的过程来给予评判。

### 【实施任务】

当学生开始与他们的伙伴解题时,我巡视教室,观察他们解决问题的方法。与第二节课一样,我观察到的第一个困难在于学生没能成功地算出6个正方形占整个图形的百分数。少数学生还是写下6%,并没有注意到正方形总数是40,而不是100。不过大多数人确实注意到所给图表不是通常 $10 \times 10$ 的格子,因而