

农业初級中学
代数教学参考材料(初稿)

下 册

(内部发行)

揚州师范学院高师函授部編

編 写 說 明

一、这套教学参考材料(初稿)是我部組織扬州、南通、盐城三专区函授輔導站的部分数学教师根据江苏省农业初級中学代数課本編写的，共分上、下两册，目的在于帮助新教师解决备課中的某些困难，仅供教学时参考。

二、这套教学参考材料(初稿)分章和单元編写，每章有：教学要求，內容和安排，重点、难点、关键，教学時間(参考新編江苏省农业初級中学代数課本的內容和說明)；每一单元有：教学要求，內容和安排，重点、难点、关键，分析和建議。

三、由于編写時間仓促和我們对农业中学教学情况調查研究不够，因此，这套教学参考材料(初稿)只能对教材作些分析，結合农业中学教学实际是很不够的，希望教师在使用这一材料时，根据具体情况，按照教改的精神創造性地进行教学。我們热烈地欢迎大家对教学参考材料提出意見，以便修改补充。

目 录

第五章 多项式的因式分解..... (1)

第六章 分式和分式方程..... (17)

第七章 数的开方..... (41)

第八章 一元二次方程..... (47)

附 录

I 抽样测产的方法..... (62)

II 劳力安排..... (64)

第五章 多項式的因式分解

一、教學要求

1. 使學生理解多項式的因式分解的意義，掌握多項式的因式分解的四種方法：提取公因式法、分組分解法、應用公式法和十字相乘法，掌握因式分解的一般步驟，能夠熟練地綜合運用各種方法進行因式分解。

2. 使學生理解最高公因式和最低公倍式的意義，掌握用因式分解法求最高公因式和最低公倍式的法則，能夠熟練地求最高公因式和最低公倍式。

二、內容和安排

本章教材的內容有：多項式的因式分解的意義和因式分解的各種方法，最高公因式和最低公倍式的意義，以及應用因式分解法求最高公因式和最低公倍式。

本章教材首先通過算術中分解質因數的例題，對比着說明學習因式分解的必要性和因式分解的意義，並且指出分解因式和乘法運算的關係。然後，系統地講解因式分解的四種方法：提取公因式法、分組分解法、應用公式分解法和十字相乘法，並在此基礎上，講解多項式因式分解的一般步驟。最後講解應用因式分解法求最高公因式和最低公倍式。

三、重點、難點、關鍵

由於因式分解在分式和分式方程和一元二次方程中有着

广泛的应用，所以本章教材的重点是因式分解的四种方法。本章教材的主要难点是熟练地综合应用各种方法分解因式，能够熟练地综合运用各种方法进行因式分解的关键，在于掌握应用某种因式分解法的多项式的特点，加强练习以熟练每一种方法的因式分解。

四、教学时间

本章教材的教学时间，估计20课时左右。各部分的教学时间，大致分配如下：

因式分解的意义	1 课时左右
提取公因式法	2 课时左右
分组分解法	2 课时左右
应用公式法	3 课时左右
十字相乘法	3 课时左右
因式分解的一般步骤	3 课时左右
最高公因式和最低公倍式	3 课时左右
复 习	3 课时左右

五、分析和建议

5.1 因式分解的意义

(1) 课本中讲解因式、因式分解的意义是从算术因数分解引入。一方面便于学生理解，另一方面可以使学生了解学习因式分解的必要性，提高学生学习因式分解的积极性。

(2) 搞清因式分解的意义，对本章的学习很重要，如果学生没有搞清这个概念，就会发生下列错误：(a) 分不清乘法和因式分解，把一个多项式分解因式后再作乘法；(b) 只

分解多項式的一部分，如 $x^3 + x^2 + x + 1 = x(x^2 + x + 1) + 1$ 。課本中除了從正面說明因式、因式分解的意義、因式分解和乘法的關係外，還配置了錯誤類型的例題和習題，以加深學生對因式分解的理解。

(3) 課本在講清因式分解的意義後，指出：因為單項式本身就是幾個整式的積，所以因式分解都是指多項式來說的，在以後的學習中，不再講解怎樣去分解一個單項式的因式。但是在講解這一段教材時，可以結合着讓學生做一些單項式因式分解的練習，這樣的練習，對以後學習提取公因式法有幫助。如：

$$6a^2b^3 = (6a)(ab^3) = (2a^2b)(3b^2) = (3ab^2)(2ab) = \dots$$

為了解答的唯一性，教師必須強調“分解因式要分解到不能再分解為止”（不提質因式概念，因與什麼數的範圍有關，本書指有理數而言），得出 $6a^2b^3 = 2 \times 3aabb^3$ 。

5.2 提取公因式法

(1) 課本首先通過單項式乘以多項式 $m(a+b-c) = am + bm - cm$ ，反過來得到 $am + bm - cm = m(a+b-c)$ 。然後，從這個例子說明多項式的公因式的意義，並得出提取公因式的法則。教學時，應先復習因式分解和乘法運算的關係，在得出 $am + bm - cm = m(a+b-c)$ 這個式子後，要着重說明多項式 $am + bm - cm$ 分解成了 m 與 $a+b-c$ 兩個因式乘積的形式，第一因式 m 是多項式各項都含有的相同的因式（公因式），第二因式 $a+b-c$ 是用公因式 m 去除多項式得到的商，且項數與原多項式項數相同。強調這一點可以避免解題時容易發生的錯誤，以便檢查已知多項式的因式分解的正確性，如錯誤地把 $cx + cy + c$ 分解成 $c(x+y)$ 。在講例 1、例 2 時也應

按法則得到結果。

(2)要提出公因式，必須首先找出多項式各項的公因式，所以掌握求各項公因式的方法，是學習提取公因式法的关键，也是判斷一個多項式能否用提取公因式法來分解因式的一個標準。為了突出這一關鍵，課本在介紹提取公因式的法則後就用兩個簡單的例題說明怎樣應用這個法則，接着通過例題3，把每一項寫成質因數與各個字母都是一次的連乘積，由觀察指出多項式各項的公因式是 $5x^2y$ ，並總結從多項式中所提取的公因式應符合兩個條件：(a)它的系數應當是已知多項式各項系數的最大公約數；(b)它的字母應當是各項都含有的字母，這些字母的指數取各項中這個字母最小的指數（教者明確：符合以上兩個條件的就是各項的最高公因式）。解題時，學生可能提取的公因式不符合一般因式分解的要求，如 $40x^3y - 25x^2y^2 + 5x^2y = 5x^2(8xy - 5y^2 + y)$ ，這時，應強調這是不符合提取多項式的公因式的條件。

(3)在提取公因式法中，學生常發生如下一些錯誤：
(a)如果某一項與公因式完全相同，提取公因式後，寫第二因式時，容易忽略寫出這一項的1。如 $40x^3y - 25x^2y + 5x^2y = 5x^2y(8x - 5y)$ ；
(b)如果多項式的第一項是負號，在提出負的公因式以後，不注意括號里各項的符號都應當變號，如 $-12a^3b^2 - 16a^2b^3 + 28a^2b^2c = -4a^2b^2(3a - 4b + 7c)$ 。教學時，結合例3、例4繼續強調括號里的這個因式是“用公因式去除多項式得到的商，且項數與原多項式項數相同”防止學生發生上述錯誤。

(4)在提取公因式法中，當公因式中含有多項式，特別是這個多項式排列的順序不一樣時，學生往往看不出這個多

項式是公因式，所以提取含有多項式的公因式是本節教材的一個難點，為了講解怎樣提取含有多項式的公因式，課本配置了例5、例6和例7三個例題，這些例題的學習，也為學習分組分解法作好了準備。在講例5的時候，應當首先使學生把 $2a(b+c)-(b+c)$ 中的 $b+c$ 看作一個數，把整個式子看作一個二項式，這樣就容易看出它們的公因式是 $b+c$ 。然後用類似的方法講解例6。對於例 $72m(x-3)^2+(3-x)(a+b)$ ，學生往往以為它沒有公因式，教學時要強調指出，如果各項的因式中含有多項式，而這些多項式的排列又不一樣時，就要先改變排列，改變排列後，如果第一項的系數是負數，要把負號提到括號外面，然後再來分解因式。在變形時的符號處理，如習題二十一4.(10) $(x-a)^3+a(a-x)$ 有乘方運算的，學生常發生錯誤，結合例7的講解複習一下添括號的法則，然後由學生口答5頁練習1的一些題目。

5.3 分組分解法

(1)分組分解法是因式分解的四種方法中較難的一種，為了分散難點，在這一節中先講分組後提取公因式的一種，其他情況留待以後再講。

課本中是通過一個具體例子來引入分組分解法。教學時，可以依照課本提出 $ax+ay+bx+by$ ，在分析這個式子有沒有公因式之後，就可提出分組的辦法，經過分組，學生就容易看出前面兩項有公因式 a ，後面兩項有公因式 b ，待各組提取公因式後，它們的另一因式 $x+y$ 相同，作為全式的一個因式。通過例題講解可以着重指出分組後提取公因式的分組分解法的特点： (a) 各組都能提取公因式（其中一組提取的公因式可能是1或-1）； (b) 各組提取公因式後，另一個因式

相同。

(2) 讲解例 1、例 2 时，应当着重说明怎样根据分组分解法的特点，把它们分解成因式乘积的形式。并要注意学生容易发生的错误的地方，如例 2 分组后添括号时符号的变化。

(3) 例 3 是一个需要把项交换后再分组分解因式的题目，课本中讲了两种不同的分组方法，教学时，分组前一定要根据分组后提取公因式的分组分解法的特点进行分析，并着重指出：尽管分组的方法不同，但必须符合上述两个特点，但是我们只要选择一种比较容易分解的方法。例 1、例 2 的另一种分组分解法可作为学生的课堂练习题。

(4) 例 4 中的两组没有公因式，需要先展开再重新分组；例 5 是一个综合应用提取公因式法和分组分解法来分解因式的题目。讲解例 5 时，着重指出一个多项式，如果各项有公因式就要先提取公因式。在提取公因式后，再启发学生判断括号中的多项式是否还能分解因式，直到不能再分解为止。讲完例题后，以上两点要进行总结，特别是多项式各项有公因式首先提取公因式，要求学生牢固掌握，对今后分解因式的综合运用很有好处。

5.4 应用公式法

(1) 平方差公式是应用较多的一个公式，因此使学生透彻掌握这个公式的特点和应用，对平方差公式的学习、培养学生综合应用各种方法进行因式分解的能力和数字简捷计算的应用中，有很大的作用。

(a) 例 1、例 2 是一般性的题目，目的是通过这两个例题的讲解，使学生掌握平方差公式左边的特点是共有两项，

第一項是某數的平方、第二項是另一數的平方；一個項是正的，一個項是負的。并教會學生怎樣應用公式進行因式分解的基本方法。教學時，第一步必須把多項式的每一項化成某數(或式)的完全平方(明確1的平方仍是1，因此象 $9x^2-1$ 類型題可化成 $(3x)^2-(1)^2$ 等)；第二步判斷是不是一個項是正的，另一項是負的再演算。中間過程絕不要省略，學生開始做題同此要求，等到掌握了公式的特點；並且能熟練地應用公式分解因式時，可省略中間過程。在11頁練習1配置了如何把一個單項式寫成另一個單項式的平方的題目，結合例1、例2的講解，要求學生進行這種基本訓練，以提高應用公式來分解因式的熟練技巧。

(b)例3是因式分解在數的運算方面的應用，通過這種類型題目的演算，可以向學生說明學習因式分解可以使數的運算簡便，以提高學生學習因式分解的積極性。

(c)講解例4、例5，應當強調公式中字母可以代表任何代數式，不僅可以代表單項式，也可以代表多項式，使學生進一步理解公式的特點，擴大學生對這個公式的應用。學生常常不注意例5的括號前面的系數16和9，把原式錯誤地變形為 $4(2m-n)^2-3(2m+n)^2$ ，或者把原式錯誤地分解成 $[16(2m-n)+9(2m+n)][16(2m-n)-9(2m+n)]$ ，且在分解過程中的合併同類項，以及不化簡到最後結果也是學生常常發生錯誤的，都要結合例題的講解提醒學生注意。

(d)例6需要先提取公因式，然後再應用公式進行因式分解，通過例題的講解，更進一步使學生明確在綜合應用各種方法分解因式時，首先要考慮能不能提取公因式。

(2)完全平方公式，也是常用的公式。教學的重點應放

在搞清公式左边的項、字母、符号、系数和指数的规律，中間这一項更要特別注意。根据教学情况，可以在課內使用13頁的練習題，使学生掌握它們的规律。

(a)例1、例2、例3的讲解，使学生掌握完全平方公式的特点，以及怎样应用完全平方公式进行因式分解的方法。讲解时也象平方差公式的例题分两个步骤来演算，不过应当强调先看首末兩項的符号是否都是正的（总结时，可指出都是負的，可把負号提到括号外边）和这两項是否各是某一数（或式）的完全平方，然后再看中間一項（不看系数的符号）是不是这两个数（或式）的积的2倍，末了再根据中間一項的系数的符号写出結果。

(b)例4的讲解，应当繼續强调公式中字母可以代表任何單項式或多項式，提高学生应用公式的熟練技巧。

(c)課本通过例5把分組分解法作进一步扩充。前面談到的分組分解法的特点，是分組后可以提取公因式，扩充后分組分解法的特点應該是：分組后每組可以分解因式（提取公因式法、应用公式法，以后还有十字相乘法）；各組分解因式后，又有公因式可提，或者又可以应用公式（以后还包括十字相乘法）。教学时，先复习已經講过的分組分解法的特点，然后結合例题作一总结，以突破分組分解法这一难点。

5.5 十字相乘法

(1)对于系数小而又便于观察在有理数范围内进行分解的非完全平方的二次三項式，应用十字相乘法分解因式，不但速度快，而且不易出錯，所以掌握这种方法，在今后学习也很有用。但必須强调凡完全平方的二次三項式仍应用公式

法分解因式，避免繁复。应用十字相乘法，常要通过几次試驗才能确定，使学生感到这种方法难以掌握。課本为了解决学生学习的难点，先通过乘法的运算来引入，使学生直观地看到二次項系数和常数項的两对因数交叉相乘的和恰好等于一次項的系数，而且先从二次項系数是1的简单情况入手，使学生掌握把常数項分解成两个因数，而这两个因数的和恰好等于一次項系数的技能，特别是通过例題的讲解和练习，进一步了解决定常数項两个因数符号的方法，即：(a)如果常数項为正，那么两个因数同号，而且与一次項系数的符号相同。(b)如果常数項符号为負，那么两个因数異号，当一次項系数为正时，因数中絕對值大者为正；当一次項系数为負时，因数中絕對值大者为負。然后再研究二次項系数不是1的情况。

(2)讲解例1、例2和例3，依照課本首先应分析常数項和一次項系数的符号，决定常数項应当分解成具有什么符号的两个因数。然后从常数項找出所有适合条件的几对因数，看其中哪一对的和恰好等于一次項的系数，这样可以减少試驗的次数。通过18頁练习1、2、3的演算，在学生基本上掌握上述步骤以后，接着讲解例4，指出把 $-10y^2$ 看作常数項，把 $-3y$ 看作 x 的系数。而且要提醒学生防止下列錯誤： $x^2 - 3xy - 10y^2 = (x+2)(x-5)$ 。(教科书中十字交叉相乘

的写法为了簡便写成：

$$\begin{array}{c} 1 \quad \quad 2 \\ \quad \times \quad \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad \quad -5 \end{array}$$

(3)讲解二次項系数不是1的例題时，重点仍应放在决定常数項两个因数的符号(因为二次項的系数总可以化成正的，如例9，它的两个因数总取正号)，这样就可以减少交

又相乘試驗的次數。其次應該講清怎樣用十字相乘來試驗，並且把其中適合的一組寫成因式。講解怎樣用十字相乘來試驗時，應當寫出所有可能的各組因數和它們可能組成的不同

交叉相乘。如符合例5的有下列兩組

$$\begin{array}{c} 1 \quad \nearrow -1 \\ 3 \quad \searrow -2 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \quad \nearrow -2 \\ 3 \quad \searrow -1 \end{array},$$

(二次項系數的因數不要再交換位置，如

$$\begin{array}{c} 3 \quad \nearrow -1 \\ 1 \quad \searrow -2 \end{array},$$

$\begin{array}{c} 3 \quad \nearrow -2 \\ 1 \quad \searrow -1 \end{array}$ ，它們交叉相乘積的和仍和上列兩組相同，也應

告訴學生)。又如符合例7的有下列各組：

$$\begin{array}{c} 1 \quad \nearrow -1 \\ 3 \quad \searrow 8 \end{array},$$

$\begin{array}{c} 1 \quad \nearrow 8 \\ 3 \quad \searrow -1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \quad \nearrow 2 \\ 3 \quad \searrow -4 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \quad \nearrow 4 \\ 3 \quad \searrow -2 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \quad \nearrow -2 \\ 3 \quad \searrow 4 \end{array},$

$\begin{array}{c} 1 \quad \nearrow -4 \\ 3 \quad \searrow 2 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \quad \nearrow -8 \\ 3 \quad \searrow 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \quad \nearrow 1 \\ 3 \quad \searrow -8 \end{array}$ ，結合本例，指出當

一次項系數為正時，應當首先舍去交叉相乘積的和是負的後四組（結合例6，可指出當一次項系數為負時，應當首先舍去交叉相乘積的和是正的各組），以便減少試驗的次數，最後得第三組交叉相乘積的和是2。

(4) 講解例9時，為了使二次項系數是正的，可把負號提到括號外面。

5.6 多項式因式分解的一般步驟

(1) 講解本節，只要把前面講過的四種因式分解的方法系統化，進一步提高學生熟練地綜合應用各種方法分解因式

的能力。讲解时結合例題和练习再一次总结过去学过的因式分解的各种方法，并提出因式分解的一般步骤，强调按步骤的顺序来分解因式，可以保证能够順利地进行因式分解和使因式分解的过程簡化。在教学过程中，逐步培养学生克服困难的意志和毅力，掌握經過試驗来分解比較复杂的多項式的因式，而且能够选择那些既簡易又迅速的方法，直到不能分解为止。根据具体情况，教会学生檢驗因式分解正确性的方法：(a)把所得到的因式連乘后是不是等于原多項式；(b)以前后相同的数值代入各个字母来計算原多項式的值是不是等于积的值。

(2)例1至例5是可以綜合应用前面四种方法来分解因式的題目，重点是怎样恰当的分組，而分組的根据又是其他三种方法。所以在讲解例題之前，可以先复习分解因式的四种方法（先复习提取公因式法、应用公式法、十字相乘法，最后是分組分解法），特别是在什么情况下一个多項式可以用什么方法来分解因式，要使学生弄清楚，还要結合例題解决学生在过去分解因式中存在的困难和問題。

讲解例1指出提出 x^2 后，另一个因式可以用十字相乘法分解成 $(x^2 - 1)(x^2 - 2)$ ，而 $x^2 - 1$ 还可以应用平方差公式分解成 $(x + 1)(x - 1)$ 。

讲解例2和例3要用到分組分解法，紧紧扣住分組分解法的两个特点，通过試驗，使学生懂得为什么不能那样分組而要这样分組，或者既可以这样分組，又可以那样分組，但在具体題目演算我們一般只要选择一种比較容易分解的方法。如例2除了課本上所列解法外，还可以如下分解：

$$\begin{aligned}
& x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 \\
&= (x^3 - xy^2) + (x^2y - y^3) \\
&= x(x^2 - y^2) + y(x^2 - y^2) \\
&= (x^2 - y^2)(x + y) \\
&= (x + y)(x - y)(x + y) \\
&= (x + y)^2(x - y).
\end{aligned}$$

使学生获得熟练地综合应用各种方法分解因式的能力。

讲解例4，指出这个例题分组后，一组可用十字相乘法，另一组可提取公因式，最后又可以提取公因式。因此结合例题把5.4应用公式法教材的分析和建议2(c)，再一次系统总结，使学生有完整的认识达到熟练技巧。

例5这种类型的题目是第一次碰到，学生分组时可能感到困难，教学时，可指出如把二次项与二次项、一次项与一次项分别结合起来，那末变形成关于 $x+y$ 的二次三项式，再用十字相乘法进行因式分解。

5.7 最高公因式 5.8 最低公倍式

(1)求几个单项式或多项式的最高公因式和最低公倍式，在以后进行分式运算时经常要用到。为了使能够熟练地求几个单项式或多项式的最高公因式和最低公倍式，以便为分式运算打下良好的基础，同时也为了巩固因式分解，因此课本把它单独安排在因式分解之后来学习。

(2)这两节的学习，可先复习算术最大公约数和最小公倍数的意义和求法，便于明确最高公因式和最低公倍式的意义，从而推得求最高公因式和最低公倍式的法则，由于学生已掌握了求单项式的最高公因式和分解因式的方法，也就不难求几个整式的最高公因式和最低公倍式。课本通过例题

說明最高公因式和最低公倍式的意義、得出法則和法則的具體運用。在講最低公倍式時，要結合例題說明與最高公因式的區別。

(3) 關於最高公因式和最低公倍式的係數問題均參看有關各節的例1。又教科書24頁倒6行的 $a(a+b)(a-b)^2$ 是 $a(a+b)^3(a-b)^2$ 之誤。

習題選解

$$\begin{aligned} 4 \text{ 頁練習 } 2 \quad & 357 \times 83 + 357 \times 49 + 357 \times 168 \\ & = 357(83 + 49 + 168) \\ & = 357 \times 300 \\ & = 107100, \end{aligned}$$

這種類型練習是因式分解在數的運算方面的應用，可以使數的運算簡便。

習題二十一 4.(10) 分解到 $(x-a)[(x-a)^2-a]$ 後，要求學生化成 $(x-a)(x^2-2ax+a^2-a)$ ，把第二因式寫成多項式，以便判斷因式分解到不能再分解為止。

4.(11) 如有學生把最後結果寫成 $(2x-y)^2(2x-y)$ ，要求他們寫成關於 $2x-y$ 的一形式，即 $(2x-y)^3$ 。

$$6.(1) \quad v = a^2c + a^2b$$

$$7. \quad 2.4 \times 21 + 2.1 \times 16 = 21(2.4 + 1.6) = 84(\text{亩})(\text{余略})$$

第8題 (7) 由於印刷錯誤，原題應為

$$30ax - 34bx - 15a + 17b.$$

(9) $x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = (x^2 + ax) + (bx + ab) = x(x+a) + b(x+a) = (x+a)(x+b)$ ，這題待學過十字相乘法以後，可直接得到 $(x+a)(x+b)$ 。

第9題

$$\begin{aligned}(2) \quad & 31\frac{3}{4} \times 1\frac{4}{7} + 10\frac{1}{2} \times 14\frac{3}{7} - 21\frac{1}{4} \times 1\frac{4}{7} \\&= 1\frac{4}{7} (31\frac{3}{4} - 21\frac{1}{4}) + 10\frac{1}{2} \times 14\frac{3}{7} \\&= 1\frac{4}{7} \times 10\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2} \times 14\frac{3}{7} \\&= 10\frac{1}{2} (1\frac{4}{7} + 14\frac{3}{7}) \\&= 10\frac{1}{2} \times 16 \\&= 168.\end{aligned}$$

习题二十二

$$\begin{aligned}\text{第2題(10)原式} &= 16\{(x+y)^2 - [2(x-y)]^2\} \\&= 16(x+y+2x-2y)(x+y-2x+2y) \\&= 16(3x-y)(3y-x).\end{aligned}$$

第5題:

$$\begin{aligned}(9) \quad & 4m^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4m^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \\&= (2m)^2 - (a-b)^2 = (2m+a-b)(2m-a+b), \\(10) \quad & (a+b)^2 - m^2 + 2mn - n^2 \\&= (a+b)^2 - (m^2 - 2mn + n^2) \\&= (a+b)^2 - (m-n)^2 \\&= (a+b-m+n)(a+b+m-n),\end{aligned}$$