研究生教学用书

基 础 课 系 列

高等工程数学

（第四版）

Advanced Engineering Mathematics

于寅

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

高等工程数学

（第四版）

于　寅

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

高等工程数学(第四版)/于　寅.—武汉：华中科技大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5609-8245-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.于…　Ⅲ.工程数学-研究生-教材　Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 168743 号

高等工程数学(第四版)　　于　寅

策划编辑：谢燕群
责任编辑：谢燕群
封面设计：刘　卉
责任校对：朱　玢
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：禾木图文工作室
印　　刷：华中科技大学印刷厂
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：28.5
字　　数：653 千字
版　　次：2012 年 7 月第 4 版第 1 次印刷
定　　价：48.00 元

内 容 提 要

本书为研究生课程“高等工程数学”的教材，内容包含矩阵论、数值计算方法和数理统计三部分. 其主要内容有：线性代数基本知识、方阵的相似化简、向量范数和矩阵范数、方阵函数与函数矩阵、矩阵分解、线性空间和线性变换（矩阵论部分）；误差分析、线性方程组的数值解法、方阵特征值和特征向量的数值计算、计算函数零点和极值点的迭代法、插值与最佳平方逼近、数值积分与数值微分、常微分方程数值解法（数值计算方法部分）；数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、线性统计推断（数理统计部分）。

本书可作为工学（含工程类型）硕士研究生的教材或参考书，也可供有关教师和工程技术人员参考。

Abstract

This book is primarily written for the graduate course “Advanced engineering mathematics” in Huazhong University of Science and Technology. It consists of three parts: Matrix theory, Numerical methods and Mathematical statistics. The main topics are Elements of linear algebra, Matrix reduction by similarity transform, Norms of vector and matrix, Function of matrix, Matrix decomposition, Linear space and linear transformation (Part of Matrix theory); Error analysis, Numerical methods for solving systems of linear algebraic equations, Computation of eigenvalues and eigenvectors of matrix, Iterative methods for evaluting zeros and extremum points of function, Interpolation and approximation, Numerical integration and numerical differentiation, Numerical solutions of ordinary differential equations (Part of Numerical methods); Basic concepts of mathematical statistics, Parameter estimation, Significance test, Linear statistical inference (Part of Mathematical statistics).

The book can serve as textbook or referrence for graduate students in Master degree. It can also be consulated by relevent teachers and engineers.

第四版前言

本书第三版自 2001 年出版至今已有 10 多年了，其间多次印刷。广大读者和使用本书的同行对于它的内容编排、基本体系和风格都表示认同。因此，这次改版主要是对第三版中的一些错误、疏漏和不妥之处进行认真仔细的改正。在文字叙述上也作了少许修改，个别章节增加了一些习题和解说性的段落，以使论述更加条理清楚和深入浅出，便于读者理解和掌握。

由于学识水平所限，虽经修改仍难免存在不足之处，恳请读者和同行批评指正。

编　者

2012 年 6 月

目　录

第一部分　矩阵论

第二部分 数值计算方法

第三部分 数理统计

第一部分

矩　阵　论

应用矩阵的理论和方法解决工程技术和社会经济领域中的实际问题已越来越普遍，矩阵论已经成为最有实用价值的数学分支之一.就矩阵论的实质来说，它是讨论有限维线性空间的空间形式与数量关系的有力工具，其中许多思想、概念和方法对学习数学的其他分支有重要的作用，例如，无限维线性空间的理论和方法（这是泛函分析研究的主要对象）就是在矩阵论的基础上发展起来的.而数字计算机的广泛使用和数值计算方法的普及与发展，更为矩阵论的应用开辟了广阔的前景，许多数值计算方法的理论基础是矩阵论，学习本书的第二部分数值计算方法和第三部分数理统计时会有更深的体会.

这一部分讲述矩阵论中最主要的一些基本概念、基本理论和方法，其中也涉及一些较深的内容，但从应用的角度来说，它们是重要和有用的.为了便于读者理解和掌握所述的内容，我们力求叙述清楚，论证详细，并多举一些例题，同时，在每节末都附有习题，其中有些是基本的，也有少量是所讲授内容的拓广和延伸，希望读者能多做些习题，这对于深入理解概念、掌握方法、提高运算能力及培养分析问题与解决问题的能力都是极有效的.

第一章　线性代数基本知识

本章带有复习性质，其目的是帮助读者整理一下学习矩阵论要用到的线性代数方面的一些基本概念和结果. 熟悉这部分内容的读者可浏览或略过这一章，而其他读者应仔细阅读，为后几章学习打下良好基础.

1.1　向量和向量空间

数域 F 中的 n 个数 $x_1,\cdots,x_n$ 组成的有序数组 $[x_1,\cdots,x_n]$，在数学上称为数域 F 上的 **n 维(行) 向量**. 数 x_i 称为此 n 维向量的第 i 个分量. 如果 F 是实数域，则称其为 n 维实向量；如果 F 为复数域，称其为 n 维复向量. 我们用 $\mathbf{R}^n$ 记实数域上 n 维向量全体所组成的集合，用 $\mathbf{C}^n$ 记复数域上 n 维向量全体所组成的集合. 为了方便，我们用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 或小写英文黑体字母 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots$(必要时带有下标) 表示向量. 例如记

$$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}},$$

它表示 $\boldsymbol{x}$ 是一个 n 维列向量，其中 T 表示转置(为了节省空间，常用行向量的转置表示列向量；除非特别声明，向量指的是列向量).

1.1.1　向量的运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维向量，当且仅当 $a_i=b_i(i=1,\cdots,n)$ 时，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

若一个向量的每个分量均为 0，则称该向量为零向量，记作 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0}=[0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$.

给出向量的如下运算：

(1) 加法　设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$，则称向量 $[a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n]^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

(2) 数乘　设 k 为一数，$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，则称向量 $[ka_1,\cdots,ka_n]^{\mathrm{T}}$ 为 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积，简称数乘，记之为 $k\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}k$.

特别地，当 $k=-1$ 时，$-\boldsymbol{\alpha}=(-1)\boldsymbol{\alpha}=[-a_1,\cdots,-a_n]^{\mathrm{T}}$，称其为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量.

向量的加法与向量的数乘统称为向量的线性运算. 不难验证，向量的线性运算满足下列八条运算规则：对于任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 和数 k、l，有

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$.

定义 1.1-1 设 $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, \cdots, a_n], \boldsymbol{\beta} = [b_1, \cdots, b_n]$ 都是 n 维复向量,记

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i, \tag{1.1-1}$$

其中 $\bar{b}_i$ 表示对 b_i 取共轭. 称 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**.

容易验证,这里定义的内积满足下列运算规则:

(1) 正定性 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时才有 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0$;

(2) 共轭对称性 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle}$,这里 $\overline{\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle}$ 表示对 $\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$ 取共轭;

(3) 关于第一个变元的可加性 $\langle \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle + \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle$;

(4) 关于第一个变元的齐次性 $\langle k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = k \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$,其中 $k \in \mathbf{C}$(即 k 属于复数域 $\mathbf{C}$,亦即 k 是复数).

根据上述的内积运算规则,有关于第二个变元的可加性. 事实上,

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \overline{\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} + \overline{\langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle.$$

但关于第二个变元没有齐次性,这是因为对于复数 k,

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta} \rangle = \overline{\langle k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \overline{k \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \bar{k}\, \overline{\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \bar{k} \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle \neq k \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle.$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^n$,则 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ 是实数,从而共轭对称性简化为对称性,即有

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle,$$

并且对任意实数 k,有

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta} \rangle = k \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle,$$

因此关于第二个变元也有齐次性.

定义了线性运算和内积的 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 称为**欧氏空间(酉空间)**,今后仍用 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 表示.

利用内积可以引进向量长度及向量正交的概念.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度**定义为 $\sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle}$,记作 $|\boldsymbol{\alpha}|$. 长度为 1 的向量称为**单位向量**.

这样定义的向量长度具有通常的长度性质:

$$|k\boldsymbol{\alpha}| = |k|\,|\boldsymbol{\alpha}|;$$

$$|\boldsymbol{\alpha}| = 0 \text{ 当且仅当 } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

对于任一非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,有

$$\left| \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} \right| = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|} |\boldsymbol{\alpha}| = 1,$$

即 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$ 是单位向量. 这种对一非零向量除以该向量长度成为单位向量的办法,称为向量的单位化.

定理 1.1-1 向量的内积满足

$$|\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|. \tag{1.1-2}$$

证 当 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 时,(1.1-1) 式显然成立. 下设 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$,令

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\alpha} - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \boldsymbol{\beta},$$

则有

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \left\langle \boldsymbol{\alpha} - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \right\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle - \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 0,$$

$$0\leqslant \langle \xi,\xi\rangle = \left\langle \xi,\boldsymbol{\alpha}-\frac{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\boldsymbol{\beta}\right\rangle = \langle \xi,\boldsymbol{\alpha}\rangle - \frac{\overline{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\langle \xi,\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \xi,\boldsymbol{\alpha}\rangle$$

$$= \left\langle \boldsymbol{\alpha}-\frac{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle$$

$$= |\boldsymbol{\alpha}|^2 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\overline{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}}{|\boldsymbol{\beta}|^2} = |\boldsymbol{\alpha}|^2 - \left|\frac{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle^2}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\right|,$$

即

$$|\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle|^2 \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2.$$

两边开方便得(1.1-2)式. ∎

(1.1-2)式称为 Cauchy-Schwarz 不等式.

定理 1.1-1 的一个推论是三角不等式

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|. \tag{1.1-3}$$

事实上,由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 &= \langle \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle + \langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle + \langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle + \langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle\\ &\leqslant |\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle| + |\overline{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}| + |\boldsymbol{\beta}|^2 \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|^2 + 2|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}| + |\boldsymbol{\beta}|^2\\ &= (|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|)^2,\end{aligned}$$

所以两边开方便得(1.1-3)式.

对于向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$,若$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交,记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

由于当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$时必有$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$,所以零向量与任何向量正交.

容易推出,当 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ 时有 $\quad |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$.

1.1.2 向量组的线性相关性和向量组的秩

给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,如果存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}, \tag{1.1-4}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**. 否则,称这个向量组**线性无关**. 换句话说,如果只有当 $k_1=\cdots=k_s=0$ 时才使(1.1-4)式成立,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**.

例 1 证明 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

证 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$,则有

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_n=0,\\ \qquad k_2+\cdots+k_n=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad k_n=0.\end{cases}$$

于是 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. ∎

对向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,如果有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**,或称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**线性组合**.

定理 1.1-2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量能用其余向量线性表出.

证 **必要性**：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，即有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使(1.1-4)式成立.不妨设 $k_1\neq 0$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_s}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_s,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可用其余 $s-1$ 个向量线性表出.

充分性：不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，即存在一组数 $k_1,\cdots,k_{s-1}$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}_s=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1},$$

则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+(-1)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

由于 $k_1,\cdots,k_{s-1},-1$ 中至少 -1 不是零，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. ▮

下面讨论向量组之间的关系.

设有两个向量组：

(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$;

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$.

如果向量组(Ⅱ)中每个向量都可用向量组(Ⅰ)线性表出，则称向量组(Ⅱ)能由向量组(Ⅰ)线性表出.如果向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)能互相线性表出，则称这两个向量组**等价**，记作(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ).

向量组的等价具有下列性质：

(1) 自反性 (Ⅰ)$\cong$(Ⅰ);

(2) 对称性 若(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ)，则(Ⅱ)$\cong$(Ⅰ);

(3) 传递性 若(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ)，(Ⅱ)$\cong$(Ⅲ)，则(Ⅰ)$\cong$(Ⅲ).

上述(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)表示三个向量组.

定理 1.1-3 如果两个线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价，则 $r=s$.

证 设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_r,\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s=a_{s1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{sr}\boldsymbol{\alpha}_r.\end{cases}\tag{1.1-5}$$

考察向量方程

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0},\tag{1.1-6}$$

将(1.1-5)式代入(1.1-6)式，得到

$$(k_1a_{11}+\cdots+k_sa_{s1})\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_1a_{1r}+\cdots+k_sa_{sr})\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故上式成立的充要条件是

$$\begin{cases}a_{11}k_1+\cdots+a_{s1}k_s=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{1r}k_1+\cdots+a_{sr}k_s=0.\end{cases}\tag{1.1-7}$$

如果 $s>r$，则齐次线性方程组(1.1-7)必有非零解，从而有一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使(1.1-6)式成立，即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.这与题设矛盾，因而只能 $s\leqslant r$.同理可证 $r\leqslant s$，故得证 $r=s$. ▮

向量组的一个重要概念，是它的极大线性无关组，其定义如下.

设 S 是一个向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是它的一个子组.如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，且 S

中任一向量都可用这个子组线性表出，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量组$S$的一个**极大线性无关组**.

一般地说，向量组的极大线性无关组不是唯一的，但它们之间必定是等价的，从而极大线性无关组中所含向量的个数r是由原向量组唯一确定的，我们称这个数为该向量组的**秩**.

只含零向量的向量组没有极大线性无关组，我们规定它的秩为0. 再则，由向量组的秩的定义可知，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充要条件是它的秩等于其所含向量的个数$m$.

1.1.3 向量空间

定义 1.1-2 设V是数域F上的n维向量组成的非空集合，如果集合V对于加法及数乘两种运算封闭(即，若$\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}\in V$，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$；若$\boldsymbol{\alpha}\in V,k\in F$，则$k\boldsymbol{\alpha}\in V$)，则称$V$为**$F$上的向量空间.**

例如，n维实向量的全体$\mathbf{R}^n$是一个向量空间；n维复向量的全体$\mathbf{C}^n$是一个向量空间；只含一个n维零向量的集合$\{\mathbf{0}\}$也是一个向量空间.

例 2 集合

$$V=\{\boldsymbol{x}=[0,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbf{R},2\leqslant i\leqslant n\}$$

是一个向量空间，因为若$\boldsymbol{\alpha}=[0,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\in V,\boldsymbol{\beta}=[0,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\in V$，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]^{\mathrm{T}}\in V$，且当$k\in\mathbf{R}$时有$k\boldsymbol{\alpha}=[0,ka_2,\cdots,ka_n]^{\mathrm{T}}\in V$. ∎

定义 1.1-3 设V_1和V_2都是同一数域F上的向量空间，若$V_1\subseteq V_2$，则称V_1是V_2的子空间.

例如，例2中的向量空间V是$\mathbf{R}^n$的子空间.

定义 1.1-4 设V是向量空间，如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是$V$中给定顺序的一个极大线性无关组，则称它为$V$的一个基，记为$\mathscr{B}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$，其向量个数$r$称为$V$的**维数**，记作$\dim V=r$，并称$V$为$r$维向量空间.

定理 1.1-4 设$\mathscr{B}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是$n$维向量空间$V$的一个基，则$V$中任一向量$\boldsymbol{\beta}$都可由$\mathscr{B}$唯一地线性表出.

证 只需证明唯一性. 设有

$$\boldsymbol{\beta}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则得

$$(a_1-b_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(a_n-b_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

于是由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关推出

$$a_i=b_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$ ∎

这个定理表明，在V中取定一个基$\mathscr{B}$，那么对任一$\boldsymbol{\beta}\in V$，存在唯一的一组数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，使

$$\boldsymbol{\beta}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

我们称有序数组$a_1,a_2,\cdots,a_n$为$\boldsymbol{\beta}$在基$\mathscr{B}$下的**坐标**，记作$\boldsymbol{\beta}=[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$.

例如，在$\mathbf{R}^3$中，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,3,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$构成一个基. 对向量$\boldsymbol{\beta}=[1,1,4]^{\mathrm{T}}$有

$$\boldsymbol{\beta}=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-1)\boldsymbol{\alpha}_2+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3,$$