# 高等数学

②

上海交通大学数学教研组编

# 高　等　数　学

**2**

(試 用 本)

上海交通大学数学教研組編

1960・8

# 高等数学第二册目次

# 第十一章 复变函数

## §11.1 复数及其运算

### I. 复数及其表达式

我們知道平面上的点可用一对有次序的实数表示，如用直角坐标$(x, y)$，或用极坐标$(r, \varphi)$，或用平面矢量 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 表示，各种不同的表示中相互之間又有一定的关系。各种不同的表示使量的运算在图上具有对应的几何意义(如两矢量之和对应于原有两矢量为边所組成平行四边形的对角綫)。为了实际应用方便起見，我們定义对应于平面上的点用相当于矢量的量 $x+iy$ 对应，$x$ 与 $y$ 为一对实数，$i$ 称为"虛"单位，这种点的表示法称为复数，記作

$$z=x+iy,$$

$x$ 称为复数 $z$ 的实部，記作 $x=Re(z)$，$y$ 称为复数的"虛"部，記作 $y=Im(z)$。它的几何意义为直角坐标中点$(x,y)$，或矢量 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，这样平面上的点与复数成一一对应，这个平面称为复数平面。$OX$ 軸称为实軸，$OY$ 軸称为虛軸。由于 $x, y$ 与极坐标中 $r,\varphi$ 有关系：

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$$

因此复数还有极坐标表示法(或称三角表示法)，

即 $$z=r\cos\varphi+i\,r\sin\varphi,$$

极徑 $r$ 称为复数的模(或絕对值)，記作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

极角 $\varphi$ 称为复数 $z$ 的幅角，記作

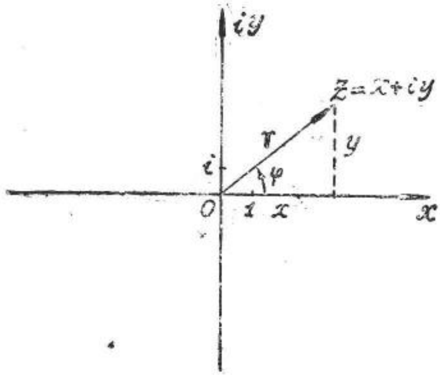


图 11.1

$$\operatorname{Arg} z=\varphi=\operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x}\quad(x\neq 0)。$$

一个复数的模是被唯一地确定的，复数的幅角却可以相差$2\pi$的任何一个整数倍，今后用 $\arg z$ 表示幅角的所有值 $\operatorname{Arg} z$ 的主值：

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 相等 $z_1=z_2$，就是 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$。

关于实轴互为对称的一对复数称为互为共轭的复数。若其中一个复数为 $z_1=x+iy$，与它共轭的复数为 $z_2=x+i(-y)$，常記作 $z_2=\bar{z}_1$。由此知 $|\bar{z}|=|z|$, $\arg\bar{z}=-\arg z$, $\bar{\bar{z}}=z$。

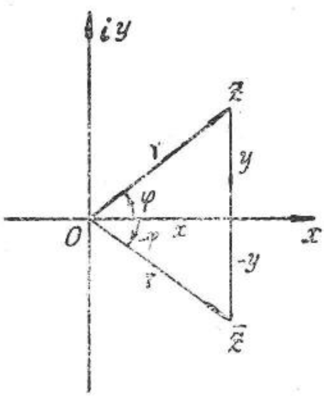


图 11.2

复数与实数具有一定的关系。当 $y=0$ 时，复数 $z=x+i0$，就与实数 $x$ 一一对应；若虚部等于零的复数相等，则对应为两个实数相等。在此基础上复数包括了实数。当然，复数与实数还有区别，一般复数无大小可比較，只有

其模才可比較大小,因为模是实数。

II. **复数的运算法則**

(i) 加法　我們定义复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 之和相当于它們对应的两矢量之和,因此得

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

即实部相加作为和的实部,虛部相加作为和的虛部。

对于复数的加法,交換律、結合律成立。

(ii) 減法　減法是加法的逆运算,即所謂两复数之差,就是要求一个复数 $z$,使 $z_1=z_2+z$。因此 $z_1-z_2=$ $=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$。它的几何意义相当于从 $O$ 出发作平行于矢量 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 而得的矢量,或对应于此矢量的端点。

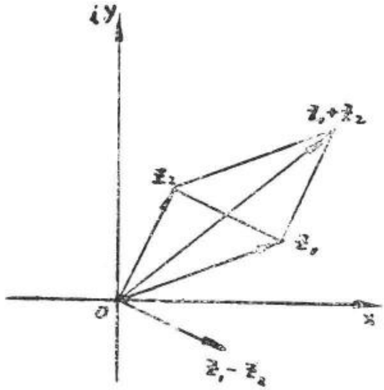


图　11.3

(iii) 乘法　两复数 $z_1=r_1\cos\varphi_1+ir_1\sin\varphi_1$ 与 $z_2=r_2\cos\varphi_2+ir_2\sin\varphi_2$ 的乘积定义为一复数 $z$,它的模等于复数 $z_1$ 的模的 $r_2$ 倍,它的輻角等于复数 $z_1$ 的幅角 $\varphi_1$ 再加上 $\varphi_2$,即 $z_1\cdot z_2$ 等于把对应的矢量 $z_1$ 繞极点 $O$ 按逆时針方向旋轉角度 $\varphi_2$,并把长延长(或縮短) $r_2$ 倍,即

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)+ir_1r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)。$$

利用直角坐标与极坐标的关系,还可以証明

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)。$$

对于乘法的交换律、結合律显然成立。

对于分配律也成立:

$$(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3。$$

由乘法的直角坐标运算，得复数极坐标的另一种写法：

$$z=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=(r+io)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)。$$

若 $z_1=z_2=i$，则得 $i\cdot i=-1$。由此可知，两复数在直角坐标表示下的乘积可看作两多项式 $x_1+iy_1$，$x_2+iy_2$ 的普通代数多项式运算，只要把 $i\cdot i$ 用 $-1$ 替代卽得。又两个互为共轭的复数的乘积为

$$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2。$$

两复数之乘积为零，则其中至少有一个复数为零，因这时 $r_1\cdot r_2=0$，故必有 $r_1$ 或 $r_2$ 为零，或全为零。

两复数当虚部为零时，其乘积根据定义卽相当于两实数的乘积，因此对乘法講复数也包括了实数。

根据乘法定义，得

$$z^n=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

取 $r=1$，得徳模佛(de Moivre)公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi。$$

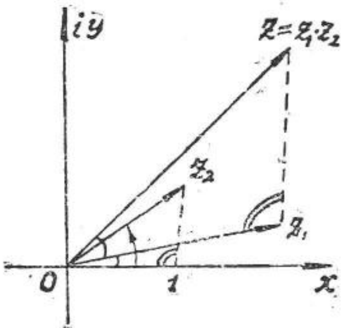

图 11.4

两复数乘积的几何作图如图所示，作 $\triangle O1Z_2$ 与 $\triangle OZ_1Z$ 相似，卽得 $z=z_1\cdot z_2$。

(iv) 除法　除法是乘法的逆运算。因此，当 $z_2\neq0$ 时推得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+$$
$$+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]。$$

利用直角坐标表示，则得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},$$

这結果可由 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$ 的分子与分母各乘以 $\bar{z}_2$ 而得到。

当 $z_1$ 与 $z_2$ 的虚部同时为零时，可得 $\frac{z_1}{z_2}$ 与对应的两实数相除的結果一样。因此复数对除法也包含了实数。

由除法运算法則，推得德模佛公式对于負整数成立：

$$z^{-m}=\frac{1}{z^m}=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-m}$$

$$=\frac{1}{r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)}$$

$$=r^{-m}(\cos m\varphi-i\sin m\varphi)=r^{-m}[\cos m\varphi+$$

$$+i\sin(-m)\varphi]。$$

复数 $z_1$ 被 $z_2$ 除的运算可看作 $z_1$ 乘以 $\frac{1}{z_2}$，因此只要看 $w=\frac{1}{z}$ 的几何意义。首先假定 $0<|z|<1$，則从 $Z$ 点作射綫 $OZ$ 的延綫，得与点 $Z$ 对称于圓 $|z|=1$ 的点 $\bar{w}=\frac{1}{r}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 这个点 $\overline{W}$ 可由过 $Z$ 点作垂綫与圓周相交于 $P$，过 $P$ 作圓周的切綫，与 $OZ$ 的延綫相交之点卽为 $\overline{W}$。这是因为联 $\overline{OP}$，可得 $z\cdot\bar{w}=1$，点 $Z$ 与 $\overline{W}$ 称为对于圓 $|z|=1$ 的对称点。再作 $\overline{W}$ 对称于实軸的点

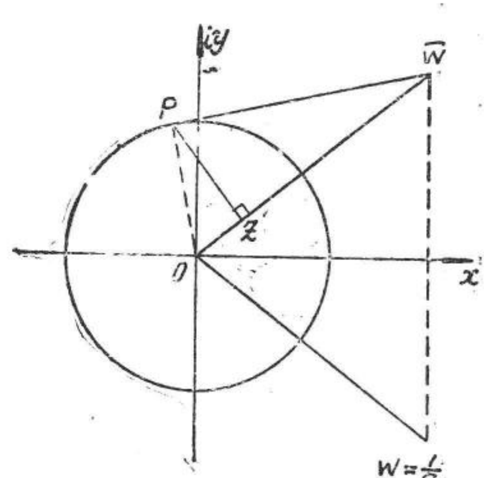


图 11.5

$w=\frac{1}{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\frac{1}{z}$，若 $|z|>1$，則采取相反步驟，可得 $w=\frac{1}{z}$，若 $|z|=1$，則 $w=\frac{1}{z}$ 与 $z$ 对称于实軸。为了使平面上点通过 $w=\frac{1}{z}$ 都有値对于圓 $|z|=1$ 对称，我們設想在 $z$ 平面引入一点，它与 $z=0$ 对于圓 $|z|=1$ 对称，这个点称为无穷远点，記作 $z=\infty$。

总之，任何两个給定的复数經过任何有限次四則运算之后，可以产生一个唯一的复数，只有用零除这种情况除外。

由复数运算法則知复数的四則运算法則及交換律、結合律、分配律都与实数的运算法則一样，因此，凡从这几条規律而推得的一切代数恒等式，无論它的文字表示实数或复数，結果都同样成立。例如

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}),$$

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m \text{ 等等。}$$

(v) 复数的开方根　已知复数 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，要求复数 $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，而使 $w^n=z$，則一切満足等式的复数 $w$ 称为 $z$ 的 $n$ 次方根，記作

$$w=\sqrt[n]{z}.$$

今計算 $w$。由 $w^n=z$，得

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

即

$$\begin{cases}\rho^n=r,\\ n\theta=\varphi+2k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r},\\ \theta=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots。\end{cases}$$

由于复数当模固定时，幅角差 $2\pi$ 的任何整数倍其値不变，因此我們只要取 $k=0,1,2,\cdots,(n-1)$。于是得 $n$ 个不同的根

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

$$k=0,1,2,\cdots(n-1)。$$

它的几何意义，可用一个以原点为中心，以 $\sqrt[n]{r}$ 为半徑的圓的內接正 $n$ 边形的 $n$ 个頂点表示。

例 1. 一复数的开方有两个根，相互差一个符号。因

$$w_k=\sqrt{a}=\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\arg a+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{2}\right), k=0,1;$$

卽

$$w_0=\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\arg a}{2}+i\sin\frac{\arg a}{2}\right),$$

$$w_1=\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\arg a+2\pi}{2}+i\sin\frac{\arg a+2\pi}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\arg a}{2}+i\sin\frac{\arg a}{2}\right)。$$

例 2. 求 $\sqrt[4]{1+i}$ 的所有値。

**解** $$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right],$$

得 $$w_k=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),$$

$$k=0,1,2,3;$$

卽

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)\right]=iw_0,$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)\right]=-w_0,$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)\right]=-iw_0,$$

$w_0, w_1, w_2, w_3$ 在圓周 $|w|=\sqrt[8]{2}$ 的內接正方形的頂上。

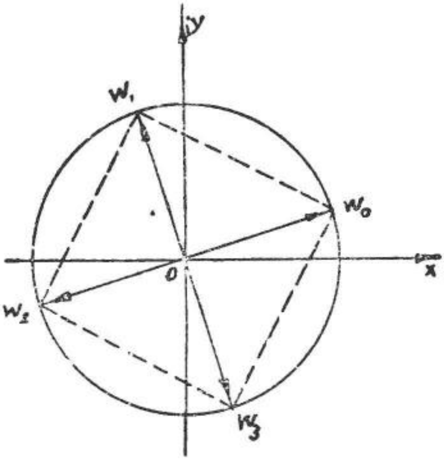


图 11.6

## III. 复数的絕对值及其性質

复数 $z$ 的絕对值就是复数的模 $|z|=r$，它的几何意义就是由原点 $O$ 到点 $z$ 的距离 $|\overline{oz}|=r$，同理模 $|z_1-z_2|$ 表示点 $z_2$ 到点 $z_1$ 的距离。

从乘法与除法的运算法則及絕对值的定义知

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}。$$

从絕对值的几何意义知

$$|z_1+z_2|\leqslant||z_1|-|z_2||。$$

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

当 $z_1$ 与 $z_2$ 为实数时，就是实数的絕对值不等式，因此，凡由实数絕对值及其性質而得出之結果，对于复数仍然成立。

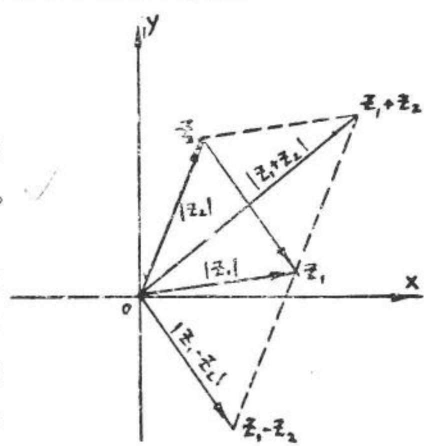


图 11.7

## § 11.2 复变函数及其导数

### I. 复变函数概念

复变函数在科学技术上，如流体力学、彈性力学、理論物理、电工学、天体力学等方面都得到了广泛的应用。

(i) 复变函数　我們已經知道平面上的点可与复数 $z=x+iy$ 一一对应。当平面上一动点在某一范圍变动时，对应的 $x, y$ 表示变量，因此 $z=x+iy$ 也表示变量，变动范圍对应于动点变动范圍。常常考虑动点在一区域中变动，則 $x$ 与 $y$ 可以在一范圍內相互独立的变动，例如考虑动点可以在以原点为中心，以 $R$ 为半徑的圓內变动，則对应的变量 $z$ 的变动范圍是 $|z|<R$; 考虑动点沿一曲綫变动，則对应于点的 $x$ 与 $y$ 在一范圍內变动，但相互有依賴关系: $x=X(t), y=Y(t), t_1\leqslant t\leqslant t_2$, 这里 $t_1, t_2$ 也可为 $-\infty$ 与 $+\infty$,对应的变量是 $z(t)=X(t)+iY(t), t_1\leqslant t\leqslant t_2$, 例如动点沿以原点为中心,以 $R$ 为半徑的圓周上变动,則对应的变量变动范圍是 $|z|=R$ 或 $z(t)=R\cos t+iR\sin t$。

在多元函数中，我們曾經看到过函数組

$$\begin{cases} u=u(x, y), \\ v=v(x, y), \end{cases}$$

它把 $XOY$ 平面的点 $(x_0, y_0)$ 映射到 $UOV$ 平面上的对应点

$$\begin{cases} u_0=u(x_0, y_0), \\ v_0=v(x_0, y_0), \end{cases}$$

把曲綫
$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

一般映射为曲綫
$$\begin{cases} u=u[x(t), y(t)], \\ v=v[x(t), y(t)]。 \end{cases}$$

把区域 $D$ 一般映射为区域 $D^*$。我們利用复数表达，則得对应关系

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)。$$

根据对应法则 $f$ 把 $z$ 平面上点映到 $w$ 平面上对应的点，这种对应关系 $w=f(z)$ 称为 $z$ 的复变函数，或簡称为复函数。若复函数 $w=f(z)$ 把 $z$ 平面的点映射到 $w$ 平面上对应的点并且一一对应，则复函数 $w=f(z)$ 称为单叶的。

設已給函数 $w=f(z)$ 把区域 $D$ 映射到区域 $D^*$。而函数 $z=\varphi(w)$ 把区域 $D^*$ 映射到区域 $D$，則称 $z=\varphi(\omega)$ 为函数 $w=f(z)$ 的反函数。設函数 $w=f(z)$ 把区域 $D$ 映射到区域 $D^*$，而 $\omega=g(w)$ 又把区域 $D^*$ 映射到区域 $D^{**}$，則函数 $\omega=g[f(z)]=h(z)$ 它把区域 $D$ 映射到区域 $D^{**}$，称为由 $f$ 与 $g$ 所合成的复合函数，对应的映射 $h$ 称为映射 $f$ 与 $g$ 的乘积。今后如不另外說明，則認为复函数 $w=f(z)$ 是单值的。例如

$$w=z+b=(x+b_1)+i(y+b_2)$$

相当于函数組

$$\begin{cases} u=x+b_1, \\ v=y+b_2。\end{cases}$$

此为平移公式，把点 $(x, y)$ 沿矢量 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}$ 移到点 $(u, v)$。

又如 $w=az=|a|r[\cos(\alpha+\varphi)+i\sin(\alpha+\varphi)]$ 相当于把 $z$ 平面上点繞原点旋轉 $\alpha$ 角并沿此方向延长(或縮短) $|a|$ 倍。
当 $|a|=1$，就是旋轉公式

$$\begin{cases} u=r\cos(\alpha+\varphi), \\ v=r\sin(\alpha+\varphi)。\end{cases}$$

(ii) **极限与連續** 在研究映射时要进一步考虑点邻近的映射情况，就是考虑当点 $(x_0, y_0)$ 的邻近的点 $(x, y)$ 向这点接近时，对应的点 $(u, v)$ 是否向一点接近，若接近于一点，则这一点是否就是 $(x_0, y_0)$ 的对应点的問題。若对应的点 $(u, v)$ 向一点接近，則这映射称为在点 $(x_0, y_0)$ 有极限，若就是接近于对应于 $(x_0, y_0)$ 的点，則这映射称为在点 $(x_0, y_0)$ 連續。現用复数表达，則得

**定义** 設复函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$

的邻近有定义。

$$
\text{若}\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=l_1,
$$

$$
\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=l_2
$$

存在,则函数 $w=f(z)$ 称为在点 $z_0=x_0+iy_0$ 有极限,极限为 $l_1+il_2$,記作

$$
\lim_{z\to z_0} f(z)=l_1+il_2\text{。}
$$

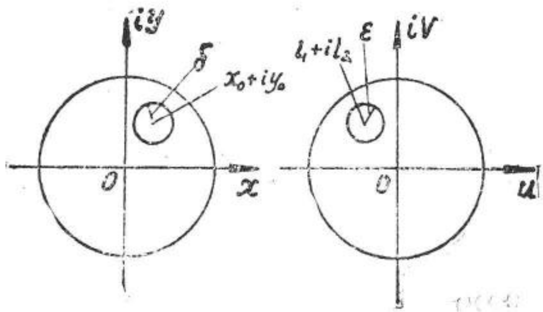


图 11.8

这里 $f(z)$ 在 $z_0$ 不必考虑有无定义。若

$$
\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0),
$$

$$
\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0,y_0),
$$

则函数 $w=f(z)$ 称为在 $z_0=x_0+iy_0$ 連續,記作

$$
\lim_{z\to z_0} f(z)=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)=f(z_0)\text{。}
$$

这里必須考虑 $f(z)$ 在 $z_0$ 有定义。

根据定义,可知

$$
\sqrt{[u(x,y)-l_1]^2+[v(x,y)-l_2]^2}\leqslant|u-l_1|+|v-l_2|<\varepsilon,
$$

$\varepsilon$ 为任意小正数,只要 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$。用复函数表示就是 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$,只要 $|z-z_0|<\delta$。

反之，$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，$|z-z_0|<\delta$，可得

$$|u-l_1|\leqslant|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

$$|v-l_2|\leqslant|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon，\text{只要 } |z-z_0|<\delta。$$

根据定义，可知极限运算定理成立，即

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim_{z\to z_0}f(z)\pm\lim_{z\to z_0}g(z),$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=\lim_{z\to z_0}f(z)\cdot\lim_{z\to z_0}g(z),$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}g(z)}，\text{若 }\lim_{z\to z_0}g(z)\neq 0。$$

若函数 $w=f(z)$ 在一閉区域 $\overline{D}$ 的每一点上連續，則函数 $w=f(z)$ 称为在閉区域 $\overline{D}$ 連續，在边界上理解为当 $z$ 由 $D$ 内向边界接近时函数的极限值等于在該点的函数值。

在这里对于在閉区域上連續的复函数 $w=f(z)$ 也有如实函数同样的性質：

(1) 在閉区域函数有界，即 $|f(z)|\leqslant M$，$M$ 为与 $z$ 无关的正实数。

(2) 在 $\overline{D}$ 存在点 $z_1$ 使 $|f(z_1)|\geqslant|f(z)|$，存在点 $z_2$ 使 $|f(z_2)|\leqslant|f(z)|$。

并有定理，若函数 $w=f(z)$ 在区域 $D$ 連續，而且作出一个把区域映到 $w$ 平面內某一范圍 $\triangle$ 上去的单叶映射，則 $\triangle$ 也必定是一个区域，而且反函数 $z=\varphi(w)$ 在 $\triangle$ 内連續。

这些性質与定理不詳細說明。

## II. 初等函数

我們在这里介紹几个常用的初等函数，这些初等函数是在实变函数的初等函数的基础上推得的。并从定义可知这些初等函数在定义范圍内連續。

### (i) 指数函数 $w=e^z$

**定义** 指数函数 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$。