

# 高等数学

2



上海交通大学数学教研组编

# 高等数学

2

(試用本)

上海交通大学数学教研組編

1960·8

# 高等数学第二册目次

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>第十一章 复变函数</b> .....                                                              | 1   |
| § 11.1 复数及其运算 .....                                                                 | 1   |
| I. 复数及其表达式 II. 复数的运算法 III. 复数的绝对值及其性质                                               |     |
| § 11.2 复变函数及其导数 .....                                                               | 9   |
| I. 复变函数概念 II. 初等函数 III. 导数与达朗贝尔—欧拉条件调和函数                                            |     |
| § 11.3 介析函数在平面場上的应用 .....                                                           | 21  |
| I. 复势 II. 保角映射 III. 环绕流动的问题                                                         |     |
| § 11.4 复变函数的积分 .....                                                                | 50  |
| I. 复变函数的积分 II. 柯西积分定理 III. 柯西积分公式 IV. 解析函数的高阶导数                                     |     |
| § 11.5 泰勒级数与罗朗级数 .....                                                              | 64  |
| I. 复变函数项级数 II. 解析函数的泰勒级数 III. 罗朗级数                                                  |     |
| § 11.6 留数及其应用 .....                                                                 | 73  |
| I. 留数定理 II. 围道积分 III. 应用举例                                                          |     |
| <b>第十二章 富里埃级数</b> .....                                                             | 87  |
| § 12.1 基本概念 .....                                                                   | 87  |
| I. 概念引入 II. 富里埃系数                                                                   |     |
| § 12.2 富里埃级数的收敛性 .....                                                              | 91  |
| I. 收敛定理 II. 举例 III. 偶函数与奇函数的富里埃级数                                                   |     |
| § 12.3 任意区间上的富里埃级数 .....                                                            | 97  |
| I. $(0, \infty)$ 区间上的富里埃级数 II. $(-l, l)$ , $(0, l)$ 区间上函数的展开 III. $(a, b)$ 区间上函数的展开 |     |
| § 12.4 富里埃积分与富里埃变换 .....                                                            | 104 |
| I. 富里埃级数的复数形式 II. 富里埃积分及其复数形式 III. 富里埃变换                                            |     |

|                                                                                                    |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 12.5 二重富里埃級數 .....                                                                               | 115        |
| <b>第十三章 数学物理方程</b> .....                                                                           | <b>118</b> |
| § 13.1 引言 方程的分类 .....                                                                              | 118        |
| I. 基本概念 II. 方程的导来 III. 二阶偏微分方程的分类                                                                  |            |
| § 13.2 振动方程 .....                                                                                  | 132        |
| I. 达朗贝尔解 II. 物理意义 III. 解的稳定性 IV. 富里埃法<br>V. 强迫振动 VI. 卜阿松公式 VII. 柱面波 VIII. 膜的横振<br>动 IX. 矩形膜 X. 圆形膜 |            |
| § 13.3 梁的强迫横振动 .....                                                                               | 161        |
| § 13.4 拉普拉斯方程 .....                                                                                | 168        |
| I. 拉普拉斯方程的边值问题 II. 关于圆的狄里赫莱问题的解<br>III. 关于球的狄里赫莱问题 IV. 格林函数 V. 求狄里赫莱<br>问题近似解的网格法                  |            |
| § 13.5 热传导方程 .....                                                                                 | 182        |
| I. 第一类边值问题 II. 有界的樞軸 III. 无界的樞軸 IV. 在<br>无穷空间的热传播 V. 在有界物体中的热传播                                    |            |
| <b>第十四章 变分法</b> .....                                                                              | <b>195</b> |
| § 14.1 变分问题的提出及解法 .....                                                                            | 195        |
| I. 问题提出与分析 II. 变分问题及其解法                                                                            |            |
| § 14.2 几种泛函的变分问题与其相当的微分方程边<br>值问题 .....                                                            | 203        |
| § 14.3 变分问题的近似解法及其应用举例 .....                                                                       | 219        |
| I. 直接法总說 II. 里兹法 III. 伽略金法                                                                         |            |
| <b>第十五章 概率論</b> .....                                                                              | <b>231</b> |
| § 15.1 概率的基本概念 .....                                                                               | 232        |
| I. 概率 II. 分布函数                                                                                     |            |
| § 15.2 正态分布 .....                                                                                  | 239        |
| I. 从误差问题引出正态分布函数 II. 一般正态分布 III. 二项<br>分布 IV. 拉普拉斯局部极限定理                                           |            |
| § 15.3 波阿松分布。最小二乘方法。大数定律 .....                                                                     | 248        |
| I. 波阿松分布 II. 最小二乘方法 III. 拉普拉斯积分定理与大<br>数定律                                                         |            |

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| § 15.4 工业上的统计方法 .....                                | 255        |
| I. 生产偏差的分析 II. 平均值与变异的估计                             |            |
| § 15.5 随机变量的统计关系 .....                               | 260        |
| I. 随机变量的统计关系 II. 变量的变换 III. 整流噪音                     |            |
| § 15.6 平稳随机过程的初步概念 .....                             | 269        |
| <b>第十六章 线性代数</b> .....                               | <b>275</b> |
| § 16.1 行列式的计算及其性质 .....                              | 275        |
| I. 三个三元线性方程组与三阶行列式 II. 高阶行列式的一般概念与其计算                |            |
| § 16.2 矩阵 .....                                      | 280        |
| I. 网络问题 II. 线性变换与矩阵的运算 III. 逆方阵                      |            |
| § 16.3 矩阵的秩与线性方程组 .....                              | 291        |
| I. 矩阵的秩 II. 线性方程组 III. 齐次线性方程组                       |            |
| § 16.4 二次型 .....                                     | 301        |
| I. 正交变换 II. 相似变换 III. 矩阵的特征值 IV. 特征值的近似计算 V. 化二次型为法式 |            |
| § 16.5 张量概念 .....                                    | 314        |

# 第十一章 复变函数

## § 11.1 复数及其运算

### I. 复数及其表达式

我們知道平面上的点可用一对有次序的实数表示, 如用直角坐标  $(x, y)$ , 或用极坐标  $(r, \varphi)$ , 或用平面矢量  $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  表示, 各种不同的表示中相互之間又有一定的关系。各种不同的表示使量的运算在图上具有对应的几何意义(如两矢量之和对应于原有两矢量为边所組成平行四边形的对角綫)。为了实际应用方便起見, 我們定义对应于平面上的点用相当于矢量的量  $x + iy$  对应,  $x$  与  $y$  为一对实数,  $i$  称为“虛”单位, 这种点的表示法称为复数, 記作

$$z = x + iy,$$

$x$  称为复数  $z$  的实部, 記作  $x = \operatorname{Re}(z)$ ,  $y$  称为复数的“虛”部, 記作  $y = \operatorname{Im}(z)$ 。它的几何意义为直角坐标中点  $(x, y)$ , 或矢量  $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ , 这样平面上的点与复数成——对应, 这个平面称为复数平面。 $OX$  軸称为实軸,  $OY$  軸称为虛軸。由于  $x, y$  与极坐标中  $r, \varphi$  有关系:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

因此复数还有极坐标表示法(或称三角表示法),

即 
$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi,$$

极徑  $r$  称为复数的模(或绝对值), 記作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

极角  $\varphi$  称为复数  $z$  的幅角, 記作

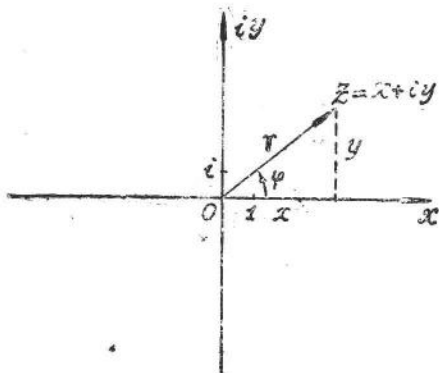


图 11.1

$$\operatorname{Arg} z = \varphi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

一个复数的模是被唯一地确定的,复数的幅角却可以相差  $2\pi$  的任何一个整数倍,今后用  $\arg z$  表示幅角的所有值  $\operatorname{Arg} z$  的主值:

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

两个复数  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  相等  $z_1 = z_2$ , 就是  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

关于实轴互为对称的一对复数称为互为共轭的复数。若其中

一个复数为  $z_1 = x + iy$ , 与它共轭的复数为  $z_2 = x + i(-y)$ , 常记作  $z_2 = \bar{z}_1$ 。由此知  $|\bar{z}| = |z|$ ,  $\arg \bar{z} = -\arg z$ ,  $\bar{\bar{z}} = z$ 。

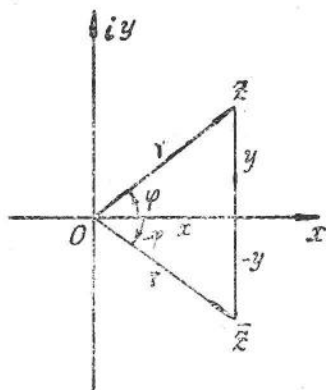


图 11.2

复数与实数具有一定的关系。当  $y=0$  时,复数  $z = x + i0$ , 就与实数  $x$  一一对应; 若虚部等于零的复数相等, 则对应的两个实数相等。在此基础上复数包括了实数。当然, 复数与实数还有区别, 一般复数无大小可比较, 只有

其模才可比較大小,因为模是实数。

## II. 复数的运算法则

(i) 加法 我們定义复数  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  之和相当于它們对应的两矢量之和,因此得

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

即实部相加作为和的实部,虚部相加作为和的虚部。

对于复数的加法,交换律、結合律成立。

(ii) 减法 减法是加法的逆运算,即所謂两复数之差,就是要求一个复数  $z$ ,使  $z_1 = z_2 + z$ 。因此  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ 。

它的几何意义相当于从  $O$  出发作平行于矢量  $\overrightarrow{z_1 - z_2}$  而得的矢量,或对应于此矢量的端点。

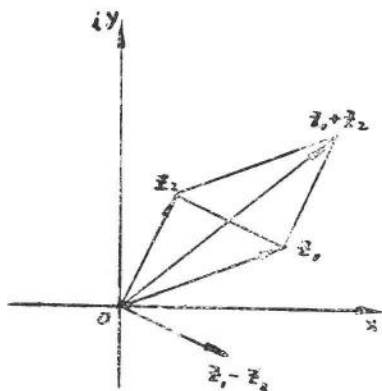


图 11.3

(iii) 乘法 两复数  $z_1 = r_1 \cos \varphi_1 + i r_1 \sin \varphi_1$  与  $z_2 = r_2 \cos \varphi_2 + i r_2 \sin \varphi_2$  的乘积定义为一复数  $z$ , 它的模等于复数  $z_1$  的模的  $r_2$  倍, 它的幅角等于复数  $z_1$  的幅角  $\varphi_1$  再加上  $\varphi_2$ , 即  $z_1 \cdot z_2$  等于把对应的矢量  $z_1$  繞极点  $O$  按逆时針方向旋轉角度  $\varphi_2$ , 并把长延长(或縮短)  $r_2$  倍, 即

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)。$$

利用直角坐标与极坐标的关系, 还可以証明

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)。$$

对于乘法的交换律、結合律显然成立。

对于分配律也成立:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3。$$

由乘法的直角坐标运算,得复数极坐标的另一种写法:

$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = (r + i0)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)。$$

若  $z_1 = z_2 = i$ , 则得  $i \cdot i = -1$ 。由此可知,两复数在直角坐标表示下的乘积可看作两多项式  $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2$  的普通代数多项式运算,只要把  $i \cdot i$  用  $-1$  替代即得。又两个互为共轭的复数的乘积为

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2。$$

两复数之乘积为零,则其中至少有一个复数为零,因这时  $r_1 \cdot r_2 = 0$ , 故必有  $r_1$  或  $r_2$  为零,或全为零。

两复数当虚部为零时,其乘积根据定义即相当于两实数的乘积,因此对乘法讲复数也包括了实数。

根据乘法定义,得

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

取  $r=1$ , 得德模佛(de Moivre)公式

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi。$$

两复数乘积的几何作图如图所示,作  $\triangle O1Z_2$  与  $\triangle OZ_1Z$  相似,即得  $z = z_1 \cdot z_2$ 。

(iv) 除法 除法是乘法的逆运算。因此,当  $z_2 \neq 0$  时推得

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]。$$

利用直角坐标表示,则得

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

这结果可由  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$  的分子与分母各乘以  $\bar{z}_2$  而得到。

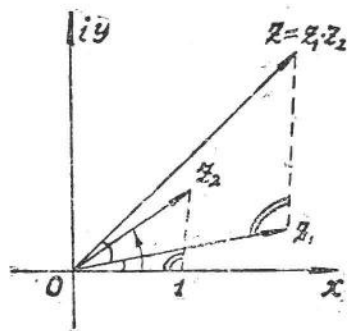


图 11.4

当  $z_1$  与  $z_2$  的虚部同时为零时, 可得  $\frac{z_1}{z_2}$  与对应的两实数相除的结果一样。因此复数对除法也包含了实数。

由除法运算法则, 推得德模佛公式对于负整数成立:

$$\begin{aligned} z^{-m} &= \frac{1}{z^m} = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-m} \\ &= \frac{1}{r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi)} \\ &= r^{-m} (\cos m\varphi - i \sin m\varphi) = r^{-m} [\cos m\varphi + i \sin(-m)\varphi]。 \end{aligned}$$

复数  $z_1$  被  $z_2$  除的运算可看作  $z_1$  乘以  $\frac{1}{z_2}$ , 因此只要看  $w = \frac{1}{z}$  的几何意义。首先假定  $0 < |z| < 1$ , 则从  $Z$  点作射线  $OZ$  的延长线, 得与点  $Z$  对称于圆  $|z| = 1$  的点  $\bar{w} = \frac{1}{\bar{z}} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ 。这个点  $\bar{w}$  可由过  $Z$  点作垂线与圆周相交于  $P$ , 过  $P$  作圆周的切线, 与  $OZ$  的延长线相交之点即为  $\bar{w}$ 。这是因为联  $\overline{OP}$ , 可得  $z \cdot \bar{w} = 1$ , 点  $Z$  与  $\bar{w}$  称为对于圆  $|z| = 1$  的对称点。再作  $\bar{w}$  对称于实轴的点

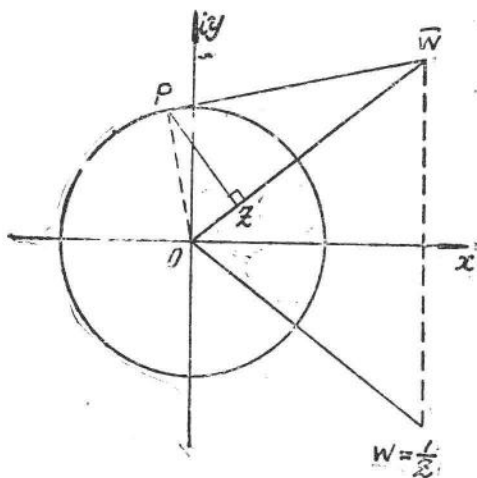


图 11.6

$w = \frac{1}{z} (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \frac{1}{z}$ , 若  $|z| > 1$ , 則采取相反步驟, 可得  $w = \frac{1}{z}$ , 若  $|z| = 1$ , 則  $w = \frac{1}{z}$  与  $z$  对称于实轴。为了使平面上点通过  $w = \frac{1}{z}$  都有值对于圆  $|z| = 1$  对称, 我們設想在  $z$  平面引入一点, 它与  $z = 0$  对于圆  $|z| = 1$  对称, 这个点称为无穷远点, 記作  $z = \infty$ 。

总之, 任何两个給定的复数經過任何有限次四則运算之后, 可以产生一个唯一的复数, 只有用零除这种情况除外。

由复数运算法則知复数的四則运算法則及交換律、結合律、分配律都与实数的运算法則一样, 因此, 凡从这几条規律而推得的一切代数恒等式, 無論它的文字表示实数或复数, 結果都同样成立。例如

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}),$$

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m \text{ 等等。}$$

(v) 复数的开方根 已知复数  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , 要求复数  $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ , 而使  $w^n = z$ , 則一切滿足等式的复数  $w$  称为  $z$  的  $n$  次方根, 記作

$$w = \sqrt[n]{z},$$

今計算  $w$ 。由  $w^n = z$ , 得

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

即

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

由于复数当模固定时, 幅角差  $2\pi$  的任何整数倍其值不变, 因此我們只要取  $k=0, 1, 2, \cdots, (n-1)$ 。于是得  $n$  个不同的根

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

$$k=0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

它的几何意义,可用一个以原点为中心,以  $\sqrt[n]{r}$  为半径的圆的内接正  $n$  边形的  $n$  个顶点表示。

例 1. 一复数的开方有两个根,相互差一个符号。因

$$w_k = \sqrt{a} = \sqrt{|a|} \left( \cos \frac{\arg a + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\arg a + 2k\pi}{2} \right), k=0, 1;$$

即  $w_0 = \sqrt{|a|} \left( \cos \frac{\arg a}{2} + i \sin \frac{\arg a}{2} \right),$

$$w_1 = \sqrt{|a|} \left( \cos \frac{\arg a + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\arg a + 2\pi}{2} \right)$$

$$= -\sqrt{|a|} \left( \cos \frac{\arg a}{2} + i \sin \frac{\arg a}{2} \right).$$

例 2. 求  $\sqrt[4]{1+i}$  的所有值。

解  $1+i = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right],$

得  $w_k = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right),$

$$k=0, 1, 2, 3;$$

即

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right),$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = iw_0,$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{16} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{16} + \pi \right) \right] = -w_0,$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) \right] = -iw_0,$$

$w_0, w_1, w_2, w_3$  在圆周  $|w| = \sqrt[4]{2}$  的内接正方形的頂上。

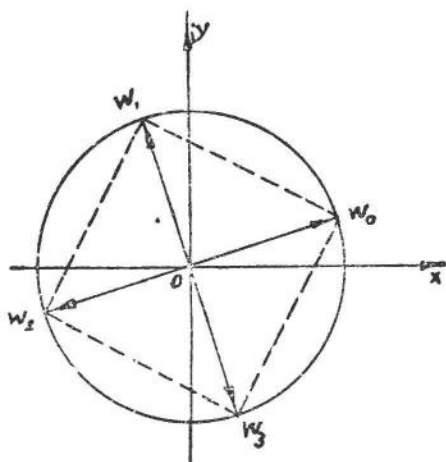


图 11.6

### III. 复数的绝对值及其性质

复数  $z$  的绝对值就是复数的模  $|z| = r$ , 它的几何意义就是由原点  $O$  到点  $z$  的距离  $|Oz| = r$ , 同理模  $|z_1 - z_2|$  表示点  $z_2$  到点  $z_1$  的距离。

从乘法与除法的运算法则及绝对值的定义知

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

从绝对值的几何意义知

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

当  $z_1$  与  $z_2$  为实数时, 就是实数的绝对值不等式, 因此, 凡由实数绝对值及其性质而得出之结果, 对于复数仍然成立。

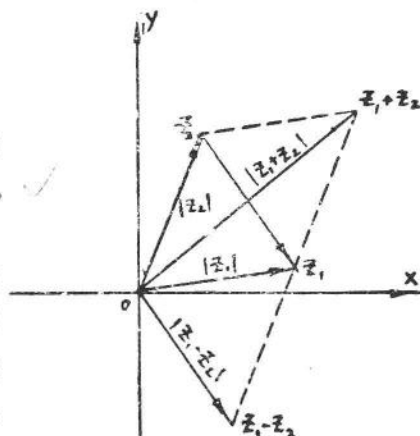


图 11.7

## § 11.2 复变函数及其导数

### I. 复变函数概念

复变函数在科学技术上,如流体力学、弹性力学、理论物理、电工学、天体力学等方面都得到了广泛的应用。

(i) 复变函数 我們已經知道平面上的点可与复数  $z=x+iy$  一一对应。当平面上一动点在某一范围变动时,对应的  $x, y$  表示变量,因此  $z=x+iy$  也表示变量,变动范围对应于动点变动范围。常常考虑动点在一区域中变动,则  $x$  与  $y$  可以在一范围内相互独立的变动,例如考虑动点可以在以原点为中心,以  $R$  为半径的圆内变动,则对应的变量  $z$  的变动范围是  $|z| < R$ ; 考虑动点沿一曲綫变动,则对应于点的  $x$  与  $y$  在一范围内变动,但相互有依赖关系:  $x=X(t), y=Y(t), t_1 \leq t \leq t_2$ , 这里  $t_1, t_2$  也可为  $-\infty$  与  $+\infty$ , 对应的变量是  $z(t)=X(t)+iY(t), t_1 \leq t \leq t_2$ , 例如动点沿以原点为中心,以  $R$  为半径的圆周上变动,则对应的变量变动范围是  $|z|=R$  或  $z(t)=R \cos t + i R \sin t$ 。

在多元函数中,我們曾經看到过函数組

$$\begin{cases} u=u(x, y), \\ v=v(x, y), \end{cases}$$

它把  $XOY$  平面的点  $(x_0, y_0)$  映到  $UOV$  平面上的对应点

$$\begin{cases} u_0=u(x_0, y_0), \\ v_0=v(x_0, y_0), \end{cases}$$

把曲綫

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

一般映射为曲綫

$$\begin{cases} u=u[x(t), y(t)], \\ v=v[x(t), y(t)]. \end{cases}$$

把区域  $D$  一般映射为区域  $D^*$ 。我們利用复数表达,则得对应关系

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)。$$

根据对应法则  $f$  把  $z$  平面上点映到  $w$  平面上对应的点, 这种对应关系  $w=f(z)$  称为  $z$  的复变函数, 或简称为复函数。若复函数  $w=f(z)$  把  $z$  平面的点映射到  $w$  平面上对应的点并且一一对应, 则复函数  $w=f(z)$  称为单叶的。

设已给函数  $w=f(z)$  把区域  $D$  映射到区域  $D^*$ 。而函数  $z=\varphi(w)$  把区域  $D^*$  映射到区域  $D$ , 则称  $z=\varphi(w)$  为函数  $w=f(z)$  的反函数。设函数  $w=f(z)$  把区域  $D$  映射到区域  $D^*$ , 而  $\omega=g(w)$  又把区域  $D^*$  映射到区域  $D^{**}$ , 则函数  $\omega=g[f(z)]=h(z)$  它把区域  $D$  映射到区域  $D^{**}$ , 称为由  $f$  与  $g$  所合成的复合函数, 对应的映射  $h$  称为映射  $f$  与  $g$  的乘积。今后如不另外说明, 则认为复函数  $w=f(z)$  是单值的。例如

$$w=z+b=(x+b_1)+i(y+b_2)$$

相当于函数组

$$\begin{cases} u=x+b_1, \\ v=y+b_2. \end{cases}$$

此为平移公式, 把点  $(x, y)$  沿矢量  $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$  移到点  $(u, v)$ 。

又如  $w=az=|a|r[\cos(\alpha+\varphi)+i\sin(\alpha+\varphi)]$  相当于把  $z$  平面上点绕原点旋转  $\alpha$  角并沿此方向延长(或缩短)  $|a|$  倍。

当  $|a|=1$ , 就是旋转公式

$$\begin{cases} u=r\cos(\alpha+\varphi), \\ v=r\sin(\alpha+\varphi). \end{cases}$$

(ii) 极限与連續 在研究映射时要进一步考虑点邻近的映射情况, 就是考虑当点  $(x_0, y_0)$  的邻近的点  $(x, y)$  向这点接近时, 对应的点  $(u, v)$  是否向一点接近, 若接近于一点, 则这一点是否就是  $(x_0, y_0)$  的对应点的问题。若对应的点  $(u, v)$  向一点接近, 则这映射称为在点  $(x_0, y_0)$  有极限, 若就是接近于对应于  $(x_0, y_0)$  的点, 则这映射称为在点  $(x_0, y_0)$  連續。现用复数表达, 则得

定义 設复函数  $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$  在点  $z_0=x_0+iy_0$

的邻近有定义。

$$\text{若 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = l_1,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = l_2$$

存在, 則函数  $w = f(z)$  称为在点  $z_0 = x_0 + iy_0$  有极限, 极限为  $l_1 + il_2$ , 記作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l_1 + il_2.$$

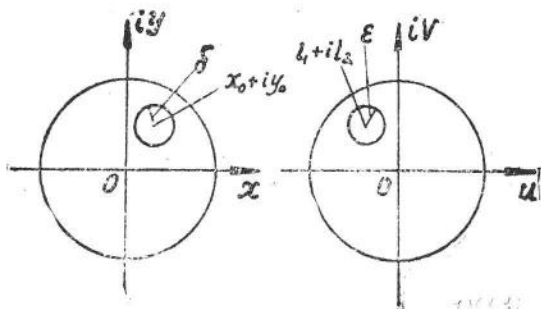


图 11.8

这里  $f(z)$  在  $z_0$  不必考虑有无定义。若

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

則函数  $w = f(z)$  称为在  $z_0 = x_0 + iy_0$  連續, 記作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0).$$

这里必須考虑  $f(z)$  在  $z_0$  有定义。

根据定义, 可知

$$\sqrt{[u(x, y) - l_1]^2 + [v(x, y) - l_2]^2} \leq |u - l_1| + |v - l_2| < \varepsilon,$$

$\varepsilon$  为任意小正数, 只要  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ 。用复函数表示就是  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ , 只要  $|z - z_0| < \delta$ 。

反之,  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ,  $|z - z_0| < \delta$ , 可得

$$|u - l_1| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

$$|v - l_2| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \text{ 只要 } |z - z_0| < \delta_0.$$

根据定义, 可知极限运算定理成立, 即

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}, \text{ 若 } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0.$$

若函数  $w = f(z)$  在一闭区域  $\bar{D}$  的每一点上連續, 則函数  $w = f(z)$  称为在闭区域  $\bar{D}$  連續, 在边界上理解为当  $z$  由  $D$  内向边界接近时函数的极限值等于在该点的函数值。

在这里对于在闭区域上連續的复函数  $w = f(z)$  也有如实函数同样的性質:

(1) 在闭区域函数有界, 即  $|f(z)| \leq M$ ,  $M$  为与  $z$  无关的正实数。

(2) 在  $\bar{D}$  存在点  $z_1$  使  $|f(z_1)| \geq |f(z)|$ , 存在点  $z_2$  使  $|f(z_2)| \leq |f(z)|$ 。

并有定理, 若函数  $w = f(z)$  在区域  $D$  連續, 而且作出一个把区域映到  $w$  平面内某一范围  $\Delta$  上去的单叶映射, 則  $\Delta$  也必定是一个区域, 而且反函数  $z = \varphi(w)$  在  $\Delta$  内連續。

这些性質与定理不詳細說明。

## II. 初等函数

我們在这里介紹几个常用的初等函数, 这些初等函数是在实变函数的初等函数的基础上推得的。并从定义可知这些初等函数在定义范围内連續。

(i) 指数函数  $w = e^z$

定义 指数函数  $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ 。