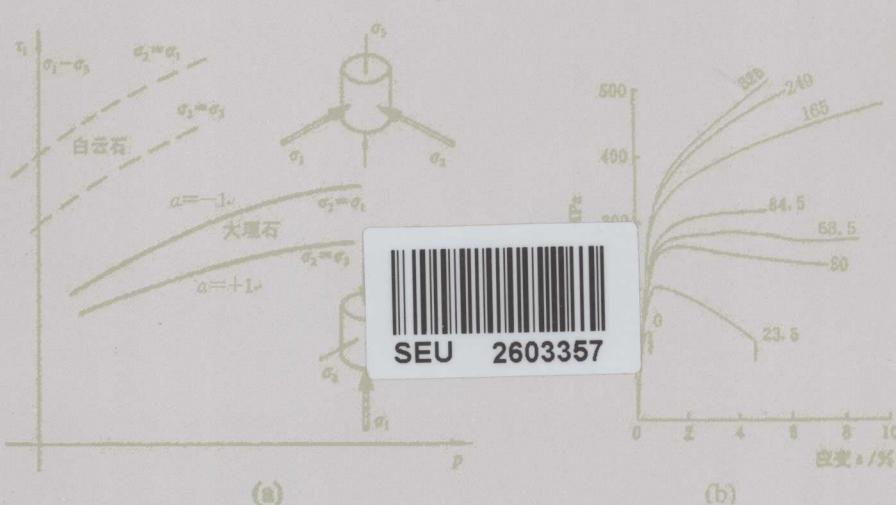


“十二五”国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学 精品 教材

岩石物理学基础

◎ 席道瑛 徐松林 编著



中国科学技术大学出版社

“十二五”国家重点

P584

5

中国科学技术大学 精品 教材

岩石物理学基础

Foundations of Rock Physics

席道瑛 徐松林 编著

中国科学技术大学出版社



内 容 简 介

本书共分为 9 章,较全面地叙述了岩石物理学的基本原理及其在实践中的应用。书中引进了近几年国内外的相关研究成果,具有较强的学科前沿性;在内容上面也比较注重与地球物理勘探和工程实际相结合,所以实用性较强。

本书是作者在中国科学技术大学地球与空间科学学院二十多年教学经验的总结,既具有较深的理论基础,又有较宽的岩石物理学知识面。相信本书能给从事岩石物理学研究的师生及科研人员一些启发,可供高等院校、研究所和工程单位等参考。

图书在版编目(CIP)数据

岩石物理学基础/席道琪,徐松林编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2012.3
(中国科学技术大学精品教材)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-312-02770-3

I. 岩… II. ①席…②徐… III. 岩石物理学 IV. P584

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 071544 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

安徽省瑞隆印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本:710 mm×960 mm 1/16 印张:22.25 插页:4 字数:432 千

2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷

定价:41.00 元



编审委员会

主任 侯建国

副主任 窦贤康 陈初升
张淑林 朱长飞

委员 (按姓氏笔画排序)

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 方兆本 | 史济怀 | 古继宝 | 伍小平 |
| 刘斌 | 刘万东 | 朱长飞 | 孙立广 |
| 汤书昆 | 向守平 | 李曙光 | 苏淳 |
| 陆夕云 | 杨金龙 | 张淑林 | 陈发来 |
| 陈华平 | 陈初升 | 陈国良 | 陈晓非 |
| 周学海 | 胡化凯 | 胡友秋 | 俞书勤 |
| 侯建国 | 施蕴渝 | 郭光灿 | 郭庆祥 |
| 奚宏生 | 钱逸泰 | 徐善驾 | 盛六四 |
| 龚兴龙 | 程福臻 | 蒋一 | 窦贤康 |
| 褚家如 | 滕脉坤 | 霍剑青 | |

总序

2008年,为庆祝中国科学技术大学建校五十周年,反映建校以来的办学理念和特色,集中展示教材建设的成果,学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列。在各方的共同努力下,共组织选题281种,经过多轮、严格的评审,最后确定50种入选精品教材系列。

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版,共出书50种,在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响,并整体进入国家新闻出版总署的“十一五”国家重点图书出版规划。为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设,结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材,学校决定,将精品教材出版作为常规工作,以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版,并设立专项基金给予支持。国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入“十二五”国家重点图书出版规划。

1958年学校成立之时,教员大部分来自中国科学院的各个研究所。作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统。同时,根据“全院办校,所系结合”的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中。虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变。正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才。

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一。当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献。建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养

了一届又一届优秀学生。入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材，其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响，因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初，学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习，他们在带回先进科学技术的同时，也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学，并以极大的热情进行教学实践，使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化，取得了非常好的效果，培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远，直到今天仍然受到学生的欢迎，并辐射到其他高校。在入选的精品教材中，这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材。进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术。

入选的这些精品教材，既是教学一线教师长期教学积累的成果，也是学校教学传统的体现，反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果。希望该精品教材系列的出版，能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才，进一步提高教育教学质量有所帮助，为高等教育事业作出我们的贡献。

侯建國

中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士

前　　言

岩石物理研究是伴随着对岩石物理力学性质认识的逐渐深化而不断得到发展的。岩石物性是地球物理理论的基础，它也是储层综合地球物理技术的基础，在地球物理勘探中得到了广泛的应用。随着物探技术的发展和近年来勘探难度的增大，地球物理学家越来越注重岩石物理学的研究。

岩石是极具复杂性和分散性的地球介质，岩石物理学就是要从实验和理论上研究岩石的物理力学特性，搞清弹性参数与岩石其他物性参数（如孔隙比、饱和度、渗透率、孔隙流体类型及流动性）和状态参数（裂隙、孔洞等岩石的非均匀性、组构和完整性以及应力状态等）之间的关系。搞清这些因素对岩石弹性波和电磁波传播的影响，以及它们在地球物理和岩石物理数据中的响应（这些响应对地球物理、岩石物理及工程资料的综合研究是至关重要的）不仅是地球物理资料的正反演计算和综合解释所必需的，而且对深部构造研究、区域性油气预测、储层预测和油藏描述也是必不可少的。在促进这种研究的过程中，岩石物理学的任务就是通过实验室岩石物理模拟，建立寻找地球物理参数（速度、振幅、衰减、频率等）和岩石物理性质（孔隙度、渗透率、饱和度）之间的关系。这有助于利用地震资料进行储层参数预测和解释，为实际地震响应分析和属性反演提供经验或理论的依据。岩石物理学架起了地震数据和储层性质之间的桥梁，并对一些技术的发展，如试图从地震数据导出储层岩石和流体特征及油藏参数的技术中都起到了基本准则的作用，而且在地震技术（4D 地震储层监测、地震岩性识别，以及“亮点”等油气直接检测技术的发展）中发挥了重要的作用。目前，岩石物理学发展很快，从实验分析和理论推导方面都提出了很多适用单一条件或综合考虑各种因素的复杂模型，但对地震解释而言，仍然存在许多悬而未决的问题，即它在地震数据的解释中还未能得到充分的利用。我们相信，随着越来越多的油气田进入成熟期，以及许多方法和技术的提高及发展，地震勘探的解释技术将会在推断储层三维图像快照中成为例行程序。在这样的处理过程中，岩石物理在地震数据的定量解释中将是一个必不可少的部分。

岩石物理学是认识地球的整体性质、理解各种地球内部和外部过程的基础。现今地球科学承担着认识地球、开发资源、保护环境和减轻自然灾害的任务，而它们的最终实现都与岩石物性密切相关。

随着油气勘探和开发的难度及费用的增加,对勘探资料解释准确度和精确度的要求越来越高,而它们又依赖于对岩石物性的精确而深刻的认识。因此,从某种意义上讲,岩石物性研究程度的高低直接关系到地球物理解释成果的正确程度。离开岩石物理学,这些目标就很难实现。

随着岩石物理学的飞速发展,借助材料科学的研究方法是岩石物理工作者所应持有的基本立场.同济大学已建成材料科学实验室——用于岩石物性测定研究的国家重点实验室.若将岩石作为材料来理解时,必须引入弹塑性、黏弹性理论及材料科学的研究方法等.从这方面看,本书又是一本不十分令人满意的巨著.但是我们认为这本书至少和以前研究过岩石物理的人们所考虑的有不同之处,它尝试性地迈出了把岩石当成材料来研究的第一步.

这本教科书着重于研究岩石材料所必须具备的基础知识,以及这些基础知识的应用。同时,我们也注意到将来想要专攻与岩石物理学有关的学科的学生以及关心岩石物理学的地球物理勘探和工程技术人员等的愿望(他们想要更好地在实际工作中应用岩石物理学),因此,在书中也较系统地讲述了一些不可缺少的基本概念、实验方法以及研究方法。

因为有关岩石物理的文献、信息数量非常巨大,故在本书中讲述所有的理论和实验是不可能的。这本书的目的不是对岩石物理学作一全面的回顾,而是试图讨论一些人们感兴趣和实用的理论,它仅涵盖了现有岩石物理知识的一部分。

由于作者知识水平有限,书中难免有不妥和错误之处,希望读者指出,我们将不胜感谢。希望本书对学生和从事地球物理勘探和工程勘察的技术人员以及岩石物理领域的研究人员将有所裨益。最后,我们要感谢杜贊博士在图件绘制和部分校稿方面给予的帮助,特别要感谢陈颙老师给予的指导和帮助。

目 次

| | |
|--------------------------------|---------------|
| 前言 | (i) |
| 第1章 固体力学基础 | (1) |
| 1.1 应力 | (1) |
| 1.1.1 应力矢量 | (1) |
| 1.1.2 一点的应力状态, 应力张量的引入 | (1) |
| 1.1.3 主应力, 应力张量不变量 | (4) |
| 1.1.4 Mohr 圆 | (6) |
| 1.1.5 地质应力 | (15) |
| 1.2 应变 | (21) |
| 1.2.1 位移, 变形, 应变和应变速率的概念 | (21) |
| 1.2.2 体积应变 | (25) |
| 1.3 屈服条件 | (25) |
| 1.3.1 屈服条件的概念 | (25) |
| 1.3.2 应力张量的分解及应力偏量 | (27) |
| 1.3.3 屈服准则 | (30) |
| 1.4 材料的本构关系 | (34) |
| 1.4.1 弹性应力-应变关系 | (35) |
| 1.4.2 塑性应力-应变关系 | (39) |
| 1.4.3 静水压实验 | (46) |
| 1.4.4 岩石典型的应力-应变曲线 | (48) |
| 1.4.5 考虑及应变速率影响的材料本构关系 | (51) |
| 第2章 岩石力学实验设备及实验方法 | (60) |
| 2.1 试验机 | (60) |

| | | |
|------------------|---------------------------|---------|
| 2.1.1 | 概论 | (60) |
| 2.1.2 | 试验机的刚度与岩样的可控破裂 | (63) |
| 2.1.3 | 影响试验机刚度的主要因素 | (67) |
| 2.1.4 | 伺服控制试验机 | (69) |
| 2.2 | 三轴压缩实验设备 | (69) |
| 2.2.1 | 围压容器 | (69) |
| 2.2.2 | 高压的产生 | (72) |
| 2.3 | 岩石静力学的实验方法和结果 | (72) |
| 2.4 | 应力路径 | (78) |
| 2.4.1 | 加载与卸载 | (78) |
| 2.4.2 | 加载方式及比例加载 | (81) |
| 2.4.3 | 加载面 | (82) |
| 2.5 | 岩石动态实验方法 | (84) |
| 2.5.1 | 岩石动力学性质 | (86) |
| 2.5.2 | 研究岩石动力学性质的方法 | (87) |
| 2.5.3 | 分段式霍普金森压杆 | (87) |
| 2.6 | 岩石动力学实验在地学中的应用 | (90) |
| 2.6.1 | 在油田中的应用 | (90) |
| 2.6.2 | 在煤田和冲击破岩中的应用 | (94) |
| 2.6.3 | 岩石动态力学性能的实验结果 | (94) |
| 2.6.4 | 岩体的动力强度指标 | (96) |
| 第3章 岩石的强度 | | (98) |
| 3.1 | Mohr - Coulomb(M - C)强度理论 | (98) |
| 3.1.1 | 岩石的破裂类型 | (98) |
| 3.1.2 | M - C 破裂准则 | (101) |
| 3.1.3 | 平面应力状态下的破裂问题 | (104) |
| 3.2 | 幂函数型岩石强度准则 | (107) |
| 3.2.1 | 幂函数型岩石强度准则的表达形式及特点 | (107) |
| 3.2.2 | 实验类型及方法 | (108) |
| 3.3 | Hoek - Brown 准则 | (109) |

| | |
|---|--------------|
| 3.3.1 Hoek - Brown 准则 | (109) |
| 3.3.2 满足广义 H - B 准则的岩体 M - C 强度参数 | (111) |
| 3.4 平面 Griffith 准则 | (119) |
| 3.4.1 有张力作用的情况 | (119) |
| 3.4.2 有推压力作用的情况 | (121) |
| 3.5 影响岩石强度和破坏的因素 | (125) |
| 3.5.1 应力状态指数 | (125) |
| 3.5.2 强度与围压的关系 | (130) |
| 3.5.3 强度与温度的关系 | (131) |
| 3.5.4 强度与应变率和样品大小的关系 | (133) |
| 3.5.5 影响岩体或岩石变形的因素 | (135) |
| 第 4 章 岩石的摩擦和黏滑 | (144) |
| 4.1 岩石的摩擦 | (144) |
| 4.1.1 岩石的摩擦实验 | (145) |
| 4.1.2 Byerlee 定律 | (149) |
| 4.1.3 Byerlee 定律与 Coulomb 准则的比较 | (151) |
| 4.1.4 Coulomb 准则和 Byerlee 定律的应用 | (154) |
| 4.2 岩石的黏滑 | (158) |
| 4.2.1 摩擦滑动的两种形式 | (158) |
| 4.2.2 黏滑 | (159) |
| 4.2.3 影响黏滑的因素 | (160) |
| 4.2.4 地震和弹簧滑块模型 | (163) |
| 4.3 地震和摩擦律 | (165) |
| 4.3.1 岩石摩擦的本构定律 | (166) |
| 4.3.2 地震耦合与地震类型 | (172) |
| 4.3.3 摩擦律的复杂性及地震机理研究中未解决的问题 | (176) |
| 4.4 动摩擦实验研究 | (179) |
| 4.4.1 地震局部剪切滑动带 | (179) |
| 4.4.2 动摩擦实验 | (180) |
| 4.4.3 地震滑动时断层的弱化和生热 | (185) |

| | |
|----------------------------------|-------|
| 4.4.4 地震断层熔化润滑的天然和实验证据 | (186) |
| 4.4.5 滑动速度接近地震速率时石英岩中的摩擦 | (191) |
| 第5章 岩石中的应力腐蚀 | (204) |
| 5.1 孔隙压力与有效应力定律 | (204) |
| 5.1.1 孔隙压力 P_p (Pore-Pressure) | (204) |
| 5.1.2 有效应力定律 | (206) |
| 5.1.3 孔隙压力对岩石强度的影响 | (208) |
| 5.2 达西(Darcy)定律 | (213) |
| 5.2.1 Darcy 定律 | (213) |
| 5.2.2 扩散方程 | (216) |
| 5.2.3 扩散方程的特征时间 | (219) |
| 5.3 影响岩石渗透率的因素 | (221) |
| 5.3.1 岩石的渗透率 | (221) |
| 5.3.2 渗透率随压力的变化 | (222) |
| 5.3.3 岩石的渗透系数随温度的变化 | (223) |
| 5.4 流体输运模型——等效管道模型 | (225) |
| 5.5 孔隙流体对断裂的影响 | (226) |
| 5.5.1 孔隙流体的力学作用——致稳作用 | (227) |
| 5.5.2 孔隙流体的表面化学作用 | (230) |
| 第6章 地壳及上地幔顶部的偏应力状态 | (243) |
| 6.1 岩石圈和软流圈 | (244) |
| 6.1.1 地球形状的观测 | (244) |
| 6.1.2 地壳均衡 | (244) |
| 6.2 实地应力测量 | (246) |
| 6.2.1 地质学方法 | (246) |
| 6.2.2 地震的震源机制 | (246) |
| 6.2.3 剪切生热与断层应力状态 | (248) |
| 6.2.4 应力测量结果 | (250) |
| 6.3 由岩体强度推断地壳应力状态的范围 | (253) |
| 6.3.1 岩石的脆性破裂强度 | (253) |

目 次

| | |
|---------------------------------|--------------|
| 6.3.2 岩石的摩擦强度 | (253) |
| 6.3.3 岩石的流动 | (256) |
| 第7章 声学方法在岩石力学中的应用 | (259) |
| 7.1 弹性波速的测量 | (259) |
| 7.1.1 有界弹性介质中波的传播 | (259) |
| 7.1.2 波速的测量方法 | (260) |
| 7.2 岩石中弹性波衰减的测量 | (267) |
| 7.2.1 应力循环测 Q | (268) |
| 7.2.2 自由衰减测 Q | (271) |
| 7.2.3 共振法测 Q | (274) |
| 7.2.4 频谱振幅比法测 Q | (276) |
| 第8章 岩石依赖于时间的效应 | (282) |
| 8.1 时间效应的概述 | (282) |
| 8.2 岩石的蠕变 | (285) |
| 8.2.1 理想弹性元件——弹簧 | (286) |
| 8.2.2 黏性元件——牛顿流体或阻尼器 | (286) |
| 8.2.3 黏弹性体——Maxwell 模型 | (287) |
| 8.2.4 Voigt 模型——开尔文模型 | (290) |
| 8.2.5 普遍化 Voigt 模型 | (292) |
| 8.2.6 Burgers 模型 | (292) |
| 8.2.7 岩石的弯曲蠕变模型 | (293) |
| 8.3 时温对应原理及叠合曲线 | (294) |
| 8.3.1 材料的模量-时间曲线 | (294) |
| 8.3.2 WLF 方程 | (296) |
| 8.3.3 时温等效作图法 | (298) |
| 8.4 岩石时温对应关系 | (300) |
| 8.4.1 饱和多孔岩石弛豫衰减的时温等效性 | (300) |
| 8.4.2 花岗岩蠕变柔量(松弛模量)的时温等效性 | (304) |
| 8.4.3 岩石移位因子参数的确定 | (305) |

| | |
|-------------------------------|--------------|
| 8.4.4 时温等效原理应用范围的讨论及其拓展 | (307) |
| 第9章 岩石的其他特性 | (309) |
| 9.1 岩石的磁性 | (309) |
| 9.1.1 地磁要素 | (309) |
| 9.1.2 岩石的磁性 | (310) |
| 9.1.3 地磁场的历史和古地磁学 | (312) |
| 9.1.4 古地磁场和有关地磁参数的确定 | (313) |
| 9.1.5 古地磁学在地学中的应用实例 | (314) |
| 9.2 岩石的电学性质 | (331) |
| 9.2.1 岩石的电阻率、视电阻率和介电常数 | (331) |
| 9.2.2 岩石电学性质的应用 | (335) |
| 9.2.3 岩石电磁特性的应用 | (337) |
| 9.3 岩石的热学性质 | (339) |
| 9.3.1 热传导方程 | (339) |
| 9.3.2 岩石的比热、导热率和热膨胀系数 | (340) |

第1章 固体力学基础

1.1 应力

1.1.1 应力矢量

在空间坐标中有一点 A (过 A 点可以作无数个截面, 见图 1.1), 假设过 A 点作一个截面, 截面的法线方向为 N , 以 N 为法线方向的截面上的力为 F_N , 则称 F_N 为这个截面上的应力矢量, 应力矢量可以有三个分量 X_N, Y_N, Z_N .

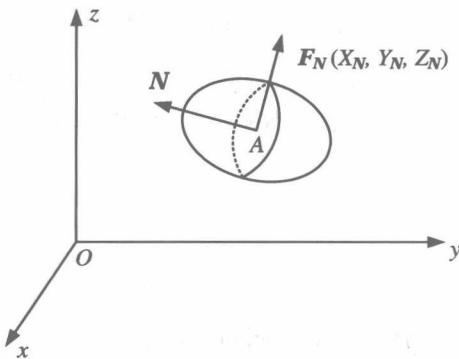


图 1.1 应力矢量

1.1.2 一点的应力状态, 应力张量的引入

所谓一点的应力状态, 是指过此点所作的各个截面上应力情况的总和.

下面, 我们来描述物体内部各点的应力. 先从介质中取一正方体微元出来. 在弹性力学中, 弹性体是被假定为连续的, 整个的弹性体便可看做是由无数个这样的

正方体微元组成的。当正方体很小时，在正方体的各平面上的应力矢量便相当于通过正方体内部一点，并作用在原来平面上的应力矢量。若选择的坐标轴和正方体的三条相邻棱边平行，如图 1.2 所示，则：

在 $ABCD$ 平面上的应力分量是 $(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ ；

在 CFED 平面上的应力分量是 $(\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz})$ ；

在 $ADEG$ 平面上的应力分量是 $(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)$.

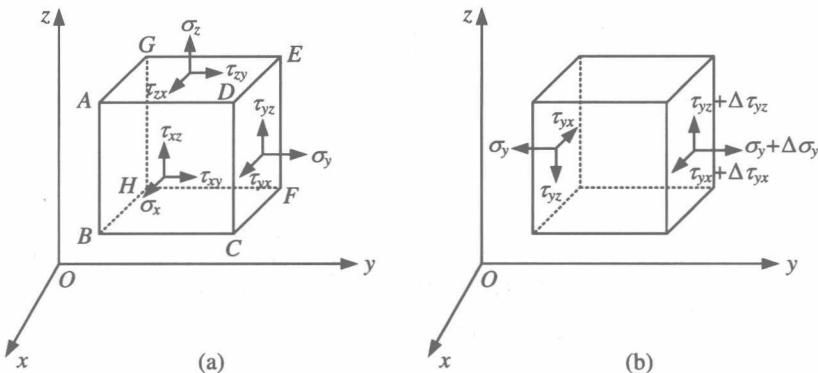


图 1.2 一点的应力状态

因为物体各点的力是互相平衡的,所以在上述三个相对的平面上的应力分量各与其所对平面上的应力分量大小相等,方向相反.这样我们一共引入了九个应力分量

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

这些应力分量的这种组合就叫做应力张量,和矢量不同,它有九个分量,而矢量只有三个分量.也就是说,在连续介质中给定一点的应力状态,可由上面对称的应力张量来表征.其中 σ 为法向应力分量, τ 为剪应力分量. σ 的下标表示作用的平面; τ 的第一个下标表示应力作用的平面,第二个下标表示应力分量的方向.这些量和两个方向有关,即应力矢量的方向和作用的平面的方向,因而它们构成一个张量.

可见,只要给定一个点的应力张量,则这一点的应力状态就被完全确定了.

假设介质中有一点 M ,求过 M 点任意平面(虚拟的面)上的应力矢量 $F_N(X_N, Y_N, Z_N)$, N 是这个平面的法线方向. 我们作 ABC 平面与过 M 点这个平面平行, 但不通过 M 点,如图 1.3 所示.

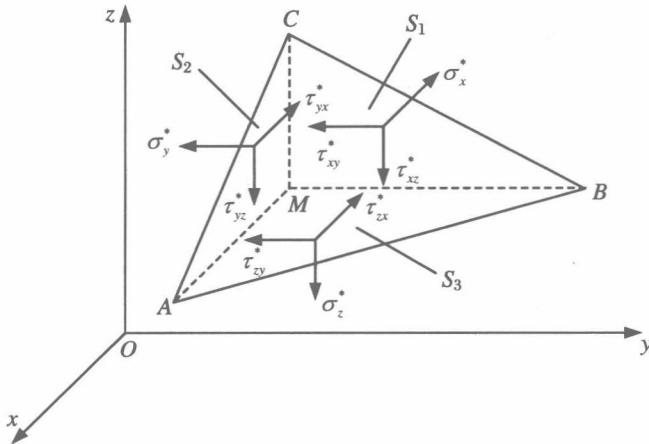


图 1.3 一点的应力分量

一般来说,过 M 点这个平面上所受的应力矢量和 ABC 面上所受的应力矢量是有差别的.但是当这两个平面无限接近时,这种应力矢量的差别就完全消失.设这两个平面的垂直距离是 h .在 ABC 面上所受的应力矢量是 $\mathbf{F}_N^*(X_N^*, Y_N^*, Z_N^*)$,则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{F}_N^*(X_N^*, Y_N^*, Z_N^*) = \mathbf{F}_N(X_N, Y_N, Z_N) \quad (1.1)$$

同样,设 M 点上的应力分量是 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$,而作用在 AMB 面的平均应力分量是 $(\tau_{zx}^*, \tau_{zy}^*, \sigma_z^*)$,作用在 AMC 面上的是 $(\tau_{yx}^*, \sigma_y^*, \tau_{yz}^*)$,作用在 MCB 面上的是 $(\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*)$.当 $h \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} & (\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*, \tau_{xy}^*, \tau_{yz}^*, \tau_{zx}^*, \tau_{yx}^*, \tau_{zy}^*, \tau_{xz}^*) \\ & = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

设 ABC 的面积是 S ,则 $MABC$ 的体积是

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} hS \quad (1.3)$$

而平面 MBC, MCA, MAB 的面积分别是 S_1, S_2, S_3 ,且满足

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S \cdot \cos(x, N) = lS \\ S_2 &= S \cdot \cos(y, N) = mS \\ S_3 &= S \cdot \cos(z, N) = nS \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

这里的 l, m, n 是平面 ABC (也是过 M 点而平行于 ABC 的平面)的法线 N 的方向余弦.设在 $MABC$ 中的体力的三个分量平均是 f_x, f_y, f_z ,则考虑 x 方向的平衡,有