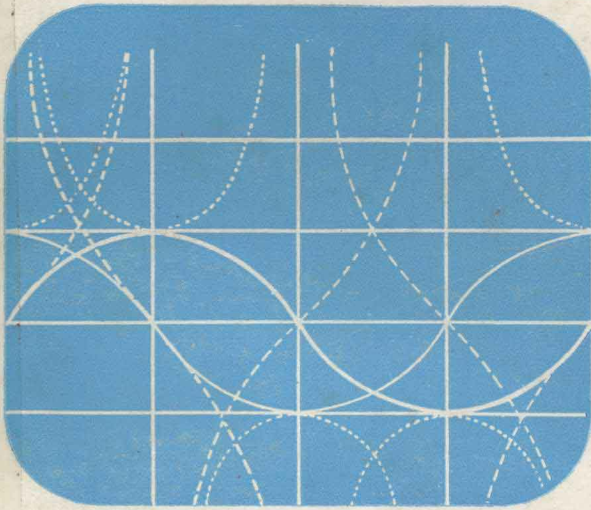

南 山

柯西不等式与排序不等式

上海教育出版社

柯西不等式与排序不等式

南　　山

上 海 教 育 出 版 社

柯西不等式与排序不等式

南　山　编著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号)

各地新华书店经销　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 10.25　字数 226,000

1996年3月第1版　1996年3月第1次印刷

印数 1—2,600本

ISBN 7-5320 3943-9/G·3853　定价：9.50元

前　言

不等式是中学数学中的重要内容之一，也是解题的一种十分重要的思想方法，它的应用十分广泛．而柯西不等式又是不等式的理论基础和基石，从近几年的国内外各级数学竞赛试题可以看出，许多有关不等式的试题，若能适当地利用柯西不等式来求解，可以使问题获得相当简便的解法．在这本小册子里，我们通过大量的典型的各级数学竞赛题，介绍了应用柯西不等式解题的几种常用技巧以及在解等式、不等式、极值、几何问题等方面的应用，并对部分试题作了一般性的推广．在第十、十一两节里介绍了柯西不等式的几种重要变形和推广形式，并通过具体例子，说明了它们的重要应用．

排序不等式是许多重要不等式的来源，如算术-几何平均不等式、算术-调和平均不等式、柯西不等式、切比雪夫不等式等都是它的直接推论，可以说它是一个“母不等式”，而且它本身也是解许多高难竞赛题的一个有力工具，因此，在本书第十二节里着重阐述了这方面的内容，并结合例子介绍了排序思想的应用．在第十三节中，我们还介绍了解竞赛题的另一个著名不等式——切比雪夫不等式的应用．

本书中的例题，大都选自国内外数学竞赛中的典型试题，特别是 IMO 试题、IMO 备选题、CMO 试题、中国国家集训队选拔试题和美国、加拿大的竞赛试题，同时参阅了大量的书刊，在此向他们表示诚挚的谢意．

通过阅读本书，可以发现在一个问题的众多解法中，利用

柯西不等式来解，其方法往往是最简捷的．因此，正确地理解和掌握柯西不等式的应用技巧，掌握它的结构特征是每一位参赛选手应必备的知识．

由于本人水平有限，加上时间仓促，书中定会存在许多不当之处，诚请广大读者指正．

编　者

一九九三年十二月

目　　录

一、柯西-许瓦尔兹不等式

六年制重点中学高中《代数》第二册“不等式”一章的习题中，有这样一道题(P.94 练习第 2 题)：

求证：$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$. (1.1)

这道题用比较法是很容易证明的.

事实上，当 $ac+bd<0$ 时，结论显然成立.

当 $ac+bd\geqslant 0$ 时，由于

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2\\&\quad=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2-(a^2c^2+b^2d^2+2abcd)\\&\quad=(ad)^2+(bc)^2-2abcd=(ad-bc)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$. 由不等式的性质，两边开平方即得所证.

(1.1)式还可以用求比值法来证明.

当 $a=b=0$(或 $c=d=0$)时，显然成立；

假设 $a^2+b^2\neq 0$ 且 $c^2+d^2\neq 0$，则

$$\begin{aligned}&\frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\\&\quad\leqslant\frac{|ac|+|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\\&\quad=\frac{|ac|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\\&\quad=\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{c^2}{c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{d^2}{c^2+d^2}}\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{d^2}{c^2+d^2}\right)$$

$$=1.$$

故 $ac+bd\leqslant|ac+bd|$

$$\leqslant|ac|+|bd|\leqslant\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}.$$

(1.1)式就是著名的柯西-许瓦尔兹(Cauchy-Schwarz)不等式的一个简单特例.

柯西-许瓦尔兹不等式的一般形式为

对任意的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right), \tag{1.2}$$

或

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}, \tag{1.3}$$

其中等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立(当 $b_k=0$ 时, 认为 $a_k=0$, $1\leqslant k<n$).

下面介绍柯西-许瓦尔兹不等式的几种证法.

证法1(求差——配方法) 因不等式(1.2)的右边

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 b_i^2+\sum_{i\neq j}^{n}(a_i^2 b_j^2+a_j^2 b_i^2),$$

不等式(1.2)的左边

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 b_i^2+2\sum_{i\neq j}^{n}a_i b_i a_j b_j.$$

所以, 右边-左边$=\sum_{i\neq j}^{n}(a_i b_j-a_j b_i)^2\geqslant0.$

故 右边$\geqslant$左边,

其中等号仅当 $a_i b_j=a_j b_i$(i、$j=1, 2, \cdots, n$, $i\neq j$)时成立.

$$\because\quad b_i\neq0\quad(i=1, 2, \cdots, n),$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

证法 2(比值法) 当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ (或 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$) 时显然成立; 当 $\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\neq 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\neq 0$ 时, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i\right|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}}\\
&\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^n |a_k b_k|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}}=\sum_{k=1}^n\frac{|a_k b_k|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}}\\
&=\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{a_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}\cdot\frac{b_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}+\frac{b_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^n a_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}+\frac{\sum\limits_{k=1}^n b_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}\right)=1.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

其中等号成立的充分必要条件是

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|=\sum_{i=1}^n |a_i b_i|, \tag{1.4}$$

$$\frac{a_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}=\frac{b_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{1.5}$$

(1.4)式成立的充分必要条件是 $a_i b_i\geqslant 0$($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$), 即 a_i 与 b_i 同号. (1.5)式成立的充分必要条件是

$$a_k^2/b_k^2=\sum_{i=1}^n a_i^2\Big/\sum_{i=1}^n b_i^2\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

注意到 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 与 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2$ 均为常数，故(1.3)式成立的充分必要条件是

$$\frac{|a_k|}{|b_k|}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}=\text{常数}.$$

又因 a_k 与 b_k 同号($k=1, 2, \cdots, n$)，故

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

证法3(判别式法) i) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都等于0，不等式显然成立(并成立等号).

ii) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有一个不为0，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2>0.$$

又二次三项式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot x^2+2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\cdot x+\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_i x+b_i)^2\geqslant 0.$$

$\therefore$ 二次三项式的判别式

$$\Delta=4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2-4\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2\leqslant 0,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

等号当且仅当 $a_i x+b_i=0$($i=1, 2, \cdots, n$)时成立.

$$\because\quad b_i^2\neq 0,$$

$$\therefore\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

证法4$\left(\text{利用不等式 } xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}\text{ 证明}\right)$.

如果 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=0$ 或 $\sum_{i=1}^{n}b_i^2=0$，由于 a_i，b_i 全为实数，由此得出 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，或者 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$. 这时(1.2)式等号成立. 所以，我们只须讨论 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2>0$ 并且 $\sum_{i=1}^{n}b_i^2>0$.

在这种情况下，取正数 λ，使

$$\lambda^2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

对每个 i，$a_ib_i=(\lambda a_i)\left(\frac{1}{\lambda}b_i\right)\leqslant\left(\lambda^2a_i^2+\frac{1}{\lambda^2}b_i^2\right)\Big/2$，式中等号当且仅当 $\lambda^2=b_i/a_i$ 时成立. 对 $i=1, 2, \cdots, n$ 求和，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left[\lambda^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right]\Big/2.$$

由于 λ 的取法将使上式的右边变为 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$，即有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2},$$

等号成立的条件显然是 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

证法5(数学归纳法) 我们可以证明更强的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}. \tag{1.6}$$

当 $n=1$ 时，(1.6)式显然成立；当 $n=2$ 时，(1.6)即为(仿照(1.1)式可证)

$$|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}. \tag{1.7}$$

假设 $n=k$ 时，(1.6)式成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}b_i^2}$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2+a_{k+1}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2+b_{k+1}^2}$$

$$\geqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}+|a_{k+1}b_{k+1}|$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{k}|a_i b_i|+|a_{k+1}b_{k+1}|=\sum_{i=1}^{k+1}|a_i b_i|.$$

所以，(1.6) 式对一切自然数 n 成立. 当然更有 (1.3) 式成立.

证法 6(数学归纳法)

(i) 当 $n=1, 2$ 时不等式(1.2)显然成立;

(ii) 假设 $n=k$ 时,不等式成立. 即

$$\left(\sum_{i=1}^{k}a_i b_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}b_i^2\right).$$

当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_k}{b_k}$ 时等号成立.

那么,当 $n=k+1$ 时,

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i b_i\right)^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i b_i\right)^2+2a_{k+1}b_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i b_i\right)+a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sum_{i=1}^{k}b_i^2+2a_{k+1}b_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i b_i\right)+a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sum_{i=1}^{k}b_i^2+a_1^2 b_{k+1}^2+b_1^2 a_{k+1}^2+\cdots+a_k^2 b_{k+1}^2$$

$$+b_k^2 a_{k+1}^2+a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}a_i^2\sum_{i=1}^{k+1}b_i^2.$$

当且仅当 $a_1 b_{k+1}=b_1 a_{k+1}$, $a_2 b_{k+1}=b_2 a_{k+1}$, $\cdots$, $a_k b_{k+1}=b_k a_{k+1}$, 即 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ 时等号成立. 于是 $n=k+1$ 时,不等式成立.

由(i)、(ii)知,对所有自然数 n,不等式都成立.

证法 7(行列式法)

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2$$

$$=\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & a_ib_i \\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & b_i^2 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_j^2 & a_ib_i \\ a_jb_j & b_i^2 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_j b_i\begin{vmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{vmatrix},$$

又

$$D=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_i b_j\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_i b_j(-1)\begin{vmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i b_j(-1)\begin{vmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{vmatrix}.$$

$$\therefore\quad 2D=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j b_i-a_i b_j)\begin{vmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_jb_i-a_ib_j)^2\geqslant 0.$$

$\therefore\quad D\geqslant 0$, 即原不等式成立.

证法 8 根据问题结构特点,可构造如下的数列 $\{T_n\}$: $(a_1 b_1)^2-a_1^2 b_1^2$, $(a_1 b_1+a_2 b_2)^2-(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$, $(a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3)^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$, $\cdots$, $(a_1 b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$, $\cdots$

从而可得:

$$
\begin{aligned}
T_{n+1}-T_n=&\,[(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1})^2\\
&-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2)\\
&\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2+b_{n+1}^2)]\\
&-[(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\\
&-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)]\\
=&\,2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)a_{n+1}b_{n+1}\\
&+a_{n+1}^2b_{n+1}^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)b_{n+1}^2\\
&-a_{n+1}^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-a_{n+1}^2b_{n+1}^2\\
=&-[(a_1b_{n+1}-b_1a_{n+1})^2\\
&+(a_2b_{n+1}-b_2a_{n+1})^2+\cdots\\
&+(a_nb_{n+1}-b_na_{n+1})^2]\leqslant 0,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$\therefore\quad T_{n+1}\leqslant T_n.$$

所以数列$\{T_n\}$单调递减，而$T_1=(a_1b_1)^2-a_1^2b_1^2=0$,

$$\therefore\quad T_n\leqslant 0.$$

即
$$
\begin{aligned}
&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\\
&\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).
\end{aligned}
$$

从(1.8)式中看出当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$时，等号成立.

柯西-许瓦尔兹不等式也叫做**柯西-布'尼雅可夫斯基(Cauchy-Буняковский)不等式**(在本书中，后面简称为**柯西不等式**).

在复数域中，柯西不等式也是成立的. 即：设a_i, b_i($i=1, 2, \cdots, n$)是任意复数，则

$$\sum_{i=1}^n|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^n|b_i|^2\geqslant\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|^2. \tag{1.9}$$

(1.9)式的证明，也只是涉及到复数的基本知识，下面给

出几种证法.

证法1 用数学归纳法.

首先,证明当 $n=2$($n=1$ 时显然成立)时,(1.9)式成立,即有

$$|a_1 b_1+a_2 b_2|^2\leqslant(|a_1|^2+|a_2|^2)(|b_1|^2+|b_2|^2). \tag{1.10}$$

由复数的模与共轭复数的关系可知

$$|a_1 b_1+a_2 b_2|^2=(a_1 b_1+a_2 b_2)(\bar{a}_1\bar{b}_1+\bar{a}_2\bar{b}_2),$$

$$|a_1\bar{b}_2-a_2\bar{b}_1|^2=(a_1\bar{b}_2-a_2\bar{b}_1)(\bar{a}_1 b_2-\bar{a}_2 b_1).$$

将上面两式右端按复数乘法法则展开,并将左右两端分别相加,得

$$|a_1 b_1+a_2 b_2|^2=(|a_1|^2+|a_2|^2)(|b_1|^2+|b_2|^2)-|a_1\bar{b}_2-a_2\bar{b}_1|^2, \tag{1.11}$$

由此知(1.10)式成立.

假设 $n=k$ 时,(1.9)式成立,即有

$$\left|\sum_{i=1}^{k}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2,$$

现证 $n=k+1$ 时,(1.9)式也成立.

$$\because\quad \left|\sum_{i=1}^{k+1}a_i b_i\right|^2=\left|\sum_{i=1}^{k}a_i b_i+a_{k+1}b_{k+1}\right|$$

$$\leqslant\left(\left|\sum_{i=1}^{k}a_i b_i\right|+|a_{k+1}b_{k+1}|\right)^2,$$

由归纳假定,知

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2+|a_{k+1}|^2\cdot|b_{k+1}|^2+2|a_{k+1}b_{k+1}|\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2}. \tag{1.12}$$

因为对任意两个非负实数 x, y,有 $2xy\leqslant x^2+y^2$,故

$$2|a_{k+1}b_{k+1}|\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2}$$

$$=2|a_{k+1}|\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2}\cdot|b_{k+1}|\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2}$$

$$\leqslant|a_{k+1}|^2\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2+|b_{k+1}|^2\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2.$$

再由(1.12)得

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2+\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2+|a_{k+1}|^2\cdot|b_{k+1}|^2$$

$$+|a_{k+1}|^2\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2+|b_{k+1}|^2\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2,$$

即
$$\left|\sum_{i=1}^{k}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{k+1}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{k+1}|b_i|^2.$$

可见 $n=k+1$ 时，(1.9)式也成立.

由数学归纳法，对任何自然数 n，均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2.$$

证法2 利用拉格朗日(Lagrange)恒等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2. \tag{1.13}$$

事实上，有
$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i\bar{b}_i,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2$$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i)(\bar{a}_i b_j-\bar{a}_j b_i),$$

将上面两式两端分别相加，移项即得(1.13)式.

由(1.13)式立即推出(1.9)式成立，即有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2.$$

证法3 $\because$ $\sum_{i=1}^{n}|a_i-t\bar{\beta}_i|^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_i-t\,\bar{\beta}_i)(\bar{a}_i-\bar{t}\,\beta_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\,|a_i|^2-2\mathrm{Re}(\bar{t}\,a_i\,b_i)+|t|^2|\beta_i|^2]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2-2\mathrm{Re}\left(\bar{t}\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i\right)$$

$$+|t|^2\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^2\geqslant 0. \qquad (1.14)$$

首先，当 $\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2=0$ 时，$\beta_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$全为 0，所以(1.9)式自然成立.

现在考虑 $\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^2\neq 0$ 时的情形，因为 t 可取任意复数，(1.14)式均成立，所以在该式中令

$$t=\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i\Big/\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2,$$

则(1.14)式右端化成

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2-2\mathrm{Re}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{a_i\,b_i}}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2}\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i\right)$$

$$+\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i\right|^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\geqslant 0.$$

因为某一复数变成实数时，它的实部即为此复数本身，所以上述不等式变成

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2-2\,\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i\right|^2}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2}+\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i\right|^2}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2}\geqslant 0,$$

即 $$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2-\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i\right|^2\Big/\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\geqslant 0.$$