S H U X U E F E N X I X U A N J I A N G

普 通 高 等 教 育 “十 二 五” 规 划 教 材

数学分析选讲（上册）

臧子龙　李永军　魏晓娜　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析选讲

（上册）

臧子龙　李永军　魏晓娜　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

《数学分析选讲》分为上、下两册.本书为上册，是为报考硕士研究生的学生并兼顾正在学习"数学分析"课程的学生编写的复习指导书.目的是帮助他们从概念和方法两方面深化、开拓所学数学分析的内容.

本书按数学分析课的内容分为四章：极限理论、连续函数、一元函数微分学和一元函数积分学.每章由基本概念分析和解题方法分析两部分组成.前一部分，针对学生学习时易出现的错误，设计编写了各种形式的问题，以引导读者对基本概念、基本理论进行多侧面、多层次、由此及彼、由表及里的思索和辨析；后一部分则着重分析解题思路，探索解题规律，归纳、总结解题方法.

本书对读者掌握分析问题和处理问题的方法与技巧有较好的指导作用.所选例题、习题内容广泛，且具有与硕士研究生入学考试相当的水平.本书对从事数学分析和高等数学教学的教师也有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲.上册/臧子龙，李永军，魏晓娜编著.
—上海：同济大学出版社，2012.3
ISBN 978-7-5608-4785-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①臧… ②李… ③魏… Ⅲ.①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 020774 号

普通高等教育"十二五"规划教材
数学分析选讲(上册)
臧子龙 李永军 魏晓娜 编著
组稿 曹 建 张 莉 **责任编辑** 张 莉 **特约编辑** 杨家琪 **责任校对** 徐春莲
封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)
经　销 全国各地新华书店
印　刷 江苏句容排印厂
开　本 787 mm×1 092 mm 1/16
印　张 11.25
字　数 280 000
印　数 1—2 100
版　次 2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷
书　号 ISBN 978-7-5608-4785-6

定　价 27.00 元

前　　言

数学分析对于大学数学专业和其他许多专业的重要性是无需多言的. 同时，由于它在内容上的极度丰富性，要想仅通过一个教程就尽得其精华，往往又是难以实现的. 因此，学完这门课的许多人，特别是那些准备报考硕士研究生者，都还要进行一次乃至数次再学习. 这不仅为了温故而知新，更为了在理解和运用两方面不断有质的提高. 自然，在这样的过程中，除了对原有教材的充分发掘，他们还希望从各种合适的参考书中汲取营养.

作者在兰州城市学院数学学院连续数年讲授“数学分析”课程，同时为准备报考硕士研究生的高年级学生开设提高课. 在教学实践中感到很需要有一本从概念和方法两方面对学生有指导作用的参考书，从而便于指导报考硕士研究生的学生复习，也便于正在学习数学分析的学生提高数学素养，为此，我们编写了《数学分析选讲》，共八章内容，分上、下册.

本书每章均由基本概念分析和解题方法分析两部分组成. 在基本概念分析中，我们围绕一些重要的定义和定理编成各种形式的例题并加以分析研讨，借以引导读者对基本概念进行多侧面、多层次、由此及彼、由表及里的思索和辨析；在解题方法分析中，则通过对各类有代表性题目的分析、论证和评注，帮助读者掌握思考问题和处理问题的正确方法. 两部分之后均配有一定数量的练习题. 例题、习题和问题大部分都精选自国内外有关资料或由平时教学积累所得，具有与硕士研究生入学考试大致相当的难度.

近年来，国内数学分析参考书籍的编写相当活跃，其中颇多佳作. 因此，一本不具特色的书也就失去了问世的意义. 我们试图在以下两点上赋予本书以新意：一是应站在引导读者独立思考和演练的立场上，而不是系统的讲授知识，概括结论，提供答案，从而使之有独立于一般教科书而存在的价值. 二是应努力在“分析”二字上下功夫. 在解答问题时，不仅要答其然，而且要讲清其所以然；不仅要答其所问，而且要追根溯源，举一反三. 在讲解例题时，则把很大力量用于分析解题思路和探究解题规律上，至于解答过程，则往往叙述较略或阙而不述，以留给读者更多的用武之地. 从而又使之有别于一般的习题解答和复习资料. 然而，限于我们的水平，这一主观设想的特点可能并未得到充分的体现.

最后我们对如何使用本书提出建议. 我们在指导报考硕士研究生的学生学习时是

按如下程序进行的:复习本章内容、基本概念测试、测试讲评与概念分析、解题方法测试、测试讲评与方法分析、课外习题演练.

我们认为,只要把课堂测试改为自我测试,把讲评分析改为对照阅读本书的解答,则利用本书安排自我复习也是合适的.对于正在学习或刚刚学完数学分析的读者,建议他们按如下方式使用本书:思考本章基本概念分析中的问题、以问题为线索钻研有关教材和参考书、对问题进行判断并写出解答、对照阅读本书的答案和分析、完成本章练习Ⅰ、演练本章解题方法分析中的例题、对照阅读本书的例题分析和论证、解题方法总结、完成本章练习Ⅱ.

本书错误与疏漏之处肯定不少,我们以恳切的心情期待着广大读者的批评指正.

编　者

2012 年 1 月

目　　录

第 1 章　极限理论

Ⅰ　基本概念分析

1.1　数列极限和函数极限的定义　收敛原理

例 1.1.1　下列说法可否作为“数列 x_n 以 l 为极限”的定义？

(1) $\forall \varepsilon \in (0,\ 1)$, $\exists$ 实数 A，当 $n > A$ 时，$|x_n - l| \leqslant \varepsilon$；

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，$|x_n - l| < k \cdot \sqrt{\varepsilon}$，此处 k 为正常数；

(3) $\exists$ 正整数 N, $\forall \varepsilon > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，$|x_n - l| < \varepsilon$；

(4) $\forall$ 正整数 N, $\exists \varepsilon > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，$|x_n - l| < \varepsilon$；

(5) $\forall$ 正整数 m, $\exists$ 正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，$|x_n - l| < \dfrac{1}{2^m}$；

(6) $\exists$ 正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，$|x_n - l| < \dfrac{1}{2^n}$；

(7) $\forall \varepsilon > 0$，集 $\{n \mid x_n \notin (l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)\}$ 为有限集；

(8) $\forall \varepsilon > 0$，集 $\{n \mid x_n \in (l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)\}$ 为有限集.

答　(1),(2),(5),(7)可以.

首先，对比 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ 的原定义可以看出，这里的八种说法或是改变了 ε 的给定方式，或是改变了 N 的作用，或是改变了 ε 和 N 的相互关系. 所以，能否正确判断本题的关键在于对极限定义中 ε 和 N 的作用的理解.

ε 是用来衡量 x_n 与 l 的接近程度的. 为要刻画接近的任意性，ε 必须是可以任意小的正数. 这是 ε 的本质特征.

ε 是任意小的正数，$k \cdot \varepsilon (k > 0)$, $\sqrt{\varepsilon}$, ε^2, $\cdots$ 等自然也都是任意小的. 对任意(与 n 无关)的正整数 m，显然，$\dfrac{1}{m}$, $\dfrac{1}{2^m}$, $\cdots$ 等也是可以任意小的正数. 它们都可以看作是 ε 的等价形式，因此，在极限定义中，它们都可以代行 ε 的职能.

ε 是任意小的正数，因此，$|x_n - l| < \varepsilon$ 与 $|x_n - l| \leqslant \varepsilon$ 在描述 x_n 与 l 的无限可接近性上的作用是相同的.

对 ε 任意性的要求，实质上是要求 ε 能够任意变小. 因此，预先把 ε 限制在与 0 充分接近

的正数范围内,例如,令 $\varepsilon \in (0, \alpha)$,同样不会改变定义的本质.

N 的作用则是指出在 n 无限变大过程中有一个"时刻",使其后的所有正整数 n 都满足 $|x_n - l| < \varepsilon$. 这使得 N 有如下两个主要特征:其一,N 只须存在而不在大小. 实际上,只要有了一个符合定义要求的 N,则比 N 大的任意正整数或实数都可以充任这一角色. N 的这种任意大性使得 $n > N$ 或是 $n \geqslant N$, $n > A$,在实质上是没有区别的. 其二,N 只管其后而不问其前,对其后的 n. 要求无一例外地使 $|x_n - l| < \varepsilon$,而不能用有无穷多个来代替,对其前的 n,则全然不作要求.

此外,从 ε 和 N 的关系看,ε 给出在先,具有与 N(也即与 n)无关的独立性. N 存在于后,一般视 ε 而定,具有对 ε 的依赖性. 对于同一 ε,总是有无穷多个 N,却不能要求存在一个 N,适用于所有的 ε.

上面的分析可以帮助我们作出判断,并且进而写出严格的证明. 仅以(5)为例:

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$,则 $\forall$ 正整数 m,令 $\varepsilon = \dfrac{1}{2^m}$,$\exists N$,当 $n > N$ 时,$|x_n - l| < \varepsilon$,即(5)成立. 反之,设(5)成立,则 $\forall \varepsilon > 0$,可取正整数 m,使 $\dfrac{1}{2^m} < \varepsilon$,根据(5),$\exists N$,当 $n > N$ 时,$|x_n - l| < \dfrac{1}{2^m} < \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

现在再来说明(3),(4),(6),(8)不能作为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ 的定义.

(3) 是"x_n 以 l 为极限"的充分而非必要条件. 实际上,当数列 $\{x_n\}$ 满足(3)时,必有 $x_n = l$, $n = N, N+1, \cdots$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. 反之,以 l 为极限的数列自然不必从某项起恒为 l. 例如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

(4) 是 x_n 以 l 为极限的必要而非充分条件. 不难看出,(4)是数列 $\{x_n\}$ 有界的等价说法(例 1.3.1).

(6) 是"x_n 以 l 为极限"的充分而非必要条件. 例如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 以 0 为极限,但 $|x_n - 0| = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \cdots$.

(8) 是"x_n 以 l 为极限"的必要而非充分条件. 实际上,(8)是 x_n 以 l 为聚点的等价说法(例 1.2.3).

数列 $x_n = \dfrac{l}{2}[(-1)^n + 1]$ 可以作为(4)和(8)的反例.

例 1.1.2 下列说法中,哪些可作为"x_n 不以 l 为极限"的定义?

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N,当 $n > N$ 时,$|x_n - l| \geqslant \varepsilon$;

(2) $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall$ 正整数 N,有 $n > N$,使 $|x_n - l| \geqslant \varepsilon_0$;

(3) $\exists \varepsilon_0 > 0$,使集合 $\{n \mid |x_n - l| \geqslant \varepsilon_0\}$ 为无限集;

(4) $\exists \varepsilon_0 > 0$,使集合 $\{n \mid x_n \in (l - \varepsilon_0, l + \varepsilon_0)\}$ 为有限集.

答 (2),(3).

这只要分析其与极限定义的关系. 对比(2)与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ 的定义,"$\exists \varepsilon_0 > 0$"和"$\forall \varepsilon >$

0"，"$\forall N$"和"$\exists N$"，"$\exists n > N$"和"$\forall n > N$"，"$|x_n - l| \geqslant \varepsilon_0$"和"$|x_n - l| < \varepsilon$"都是相反意义的，因此，二者互为否定判断.

(3) $\Leftrightarrow$ (2)是显然的.

现在证明，说法(1)实际上是 $\{x_n\}$ 为无穷大的定义：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$，则 $\forall \varepsilon > 0$，令 $M = |l| + \varepsilon$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$|x_n| \geqslant M$. 此时，$|x_n - l| \geqslant |x_n| - |l| \geqslant \varepsilon$. 反之，若(1)成立，则 $\forall M > 0$，取 $\varepsilon = M + |l|$，$\exists N$，$n > N$ 时，$|x_n| \geqslant |x_n - l| - |l| \geqslant M$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 于是，任何非无穷大的发散数列都可以作为(2)$\not\Rightarrow$(1)的例. 例如，取 $x_n = (-1)^n$，$l = 1$.

(4) $\Rightarrow$(2)，但(2)$\not\Rightarrow$(4). 任何不以 l 为极限但以 l 为聚点的数列可作为这里的例. 例如，$x_n = (-1)^n$，$l = 1$.

例 1.1.3　下列作法是否改变数列的敛散性?

(1) 任意改变有限项；

(2) 任意重排；

(3) 各项同取绝对值；

(4) 各项乘以同一常数 k.

答　(1)，(2)均不改变数列的收敛性.

利用例 1.1.1 (7)的结果说明这一事实较为方便.

设 $\{x_n\}$ 改变有限项后的数列是 $\{x'_n\}$，$\{x_n\}$ 的某一重排数列为 $\{x''_n\}$. 那么，当 $\{x_n\}$ 收敛于 l 时，$\forall \varepsilon > 0$，只有 $\{x_n\}$ 的有限项在 $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ 之外. 由于 $\{x'_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 仅相差有限项，$\{x''_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 的项仅次序不同. 所以，它们都只有有限项在 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 之外. 反之，当 $\{x_n\}$ 发散时，若 $\{x'_n\}$ 或 $\{x''_n\}$ 收敛，因 $\{x_n\}$ 与 $\{x'_n\}$ 仅相差有限项，$\{x_n\}$ 也是 $\{x''_n\}$ 的重排，故分别都能推出 $\{x_n\}$ 收敛. 矛盾.

(3) 当 $\{x_n\}$ 收敛于 l 时，由 $\big||x_n| - |l|\big| \leqslant |x_n - l|$ 及极限定义即知 $|x_n|$ 收敛于 $|l|$. 逆则不真. 例如，$x_n = (-1)^n$ 发散，但 $\{|x_n|\}$ 收敛.

(4) 决定于 k 是否为 0. 当 $k \neq 0$ 时，

$x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \Leftrightarrow kx_n \in (kl - |k| \cdot \varepsilon, kl + |k| \cdot \varepsilon)$. $|k| \cdot \varepsilon$ 和 ε 均为可任意小的正数. 故此时 $\{x_n\}$ 与 $\{k \cdot x_n\}$ 同敛散. 当 $k = 0$ 时，易知 $\{x_n\}$ 发散时 $\{k \cdot x_n\}$ 却是收敛的.

例 1.1.4　下列说法可否作为"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$"的定义?

(1) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < k \cdot \delta$ 时，$|f(x) - l| < k \cdot \varepsilon$，此处 k 为正常数；

(2) $\forall$ 正整数 m，$\exists$ 正整数 n，当 $0 < |x - x_0| < \dfrac{1}{n}$ 时，$|f(x) - l| < \dfrac{1}{m}$；

(3) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \varepsilon \cdot \delta$ 时，$|f(x) - l| < \varepsilon$；

(4) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - l| < \varepsilon \cdot \delta$.

答　(1)，(2)，(3)均可作为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ 的定义. 其分析和证明与例 1.1.1 是类似的. 故从略.

(4) 对于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ 既非必要也非充分条件. 例如 $f(x) = x$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$ 存在. 但

任取 $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，则 $\forall \delta > 0$，当 $\frac{1}{2}\delta < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - x_0| > \varepsilon_0 \delta$，即(4)不成立. 反之，Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任一点 x_0 无极限. 但取 $l = 1$，则 $\forall \varepsilon > 0$，只要取 $\delta > \frac{1}{\varepsilon}$，则 $|f(x) - l| < \varepsilon \cdot \delta$ 总是成立的. 不难看出，用任一有界函数代替 $D(x)$，结果都是一样的.

例 1.1.5 下列等式是否成立？这里等式成立的含义是：由其中一个极限的存在可推出另一个也存在，且二者相等(假定 $\exists \eta > 0, \forall x \in (-\eta, \eta), x \neq 0, f(x)$ 有定义).

(1) $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} f(-x)$；

(2) $\lim\limits_{x \to 0} f(|x|) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$；

(4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$.

答 等式(1)，(2)，(3)皆成立．以(3)为例证明之.

(3) “$\Rightarrow$”设 $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2) = l$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $0 < |x| < \delta$ 时，$|f(x^2) - l| < \varepsilon$. 取 $\delta' = \delta^2$，则当 $0 < x < \delta'$ 时，$0 < \sqrt{x} < \delta$，于是，$|f(\sqrt{x}^2) - l| < \varepsilon$，即 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 此即 $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = l$.

“$\Leftarrow$”设 $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = l$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < x < \delta$ 时，$|f(x) - l| < \varepsilon$. 取 $\delta' = \sqrt{\delta}$，当 $0 < |x| < \delta'$ 时，$0 < x^2 < \delta$，于是，$|f(x^2) - l| < \varepsilon$.

(4) 不难看出，由等式左端可推出右端，反之则不行. 实际上，根据函数极限(包括单侧极限)的定义及其几何描述，等式(1)，(2)，(3)两端所描述的都是相同的极限过程. (4)则不同，$x \to 0$ 包含了 $x \to +0$ 和 $x \to -0$. 从而 $x^3 \to +0$，$x^3 \to -0$. 所以，

$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to +0} f(x^3) = l \not\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x^3) = l$.

例如，$f(x) = \operatorname{sgn} x$，$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$，但是 $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3)$ 不存在.

例 1.1.6 设 $\lim\limits_{n \to \infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. 若还分别满足以下条件之一，能否断定 $\{x_n\}$ 收敛？

(1) $\{x_n\}$ 是单调的；

(2) $\{x_n\}$ 是有界的；

(3) $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 分别是单调的；

(4) $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 分别是递增和递减的；

(5) $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 之一是收敛的.

答 (1)，(2)，(3)均不能推出 $\{x_n\}$ 收敛. 分别举例如下：

(1)，(3)：$x_n = \sqrt{n}$，则 $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$，$x_n$ 单调(从而 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 也单调)，但 $x_n \to \infty$.

(2) $x_n = \sin\sqrt{n}$.

(4)，(5)可保证 $\{x_n\}$ 收敛，我们先证明(4)$\Rightarrow$(5).

不妨设 $x_{2n} \uparrow$，$x_{2n+1} \downarrow$. 则有 $x_{2n} \leqslant x_{2n+1} (n = 1, 2, \cdots)$. 因为假若有 k，使 $x_{2k} > x_{2k+1}$，则对一切 $n > k$，必有

$$x_{2n} \geqslant x_{2k} > x_{2k+1} \geqslant x_{2n+1},\ x_{2n} - x_{2n+1} \geqslant x_{2k} - x_{2k+1} > 0,$$

这与 $x_{2n} - x_{2n+1} \to 0$ 矛盾. 于是，$x_2 \leqslant x_{2n} \leqslant x_{2n+1} \leqslant x_1$，即 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 均是单调有界数列，都收敛.

再证明(5) $\Rightarrow \{x_n\}$ 是收敛.

若 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 之一收敛. 比如 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = l$，则 $x_{2n+1} = (x_{2n+1} - x_{2n}) + x_{2n} \to l\ (n \to \infty)$. 于是，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = l$，由此即得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$（参看例 1.2.1）.

例 1.1.7　由下列每一条件能否断定 $\{x_n\}$ 收敛？

(1) $\forall$ 正整数 p，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$；

(2) 对 $\{x_n\}$ 的任意两个子列 $\{x_{n_k'}\}$ 和 $\{x_{n_k''}\}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k'} - x_{n_k''}) = 0$；

(3) $\exists C > 0$，$\forall N$，$\sum\limits_{n=1}^{N} |x_n - x_{n+1}| < C$；

(4) $\exists C > 0$ 和 $r \in (0, 1)$，$\forall n$，$|x_{n+1} - x_n| \leqslant Cr^n$.

答　(2),(3),(4)可以.

(1) 这里的说法与 Cauchy 准则有本质的不同. 这里要求的是对每一固定的 p，可找到与任给正数 ε 有关的 N（一般还与 p 有关），使当 $n > N$ 时，$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Cauchy 准则所要求的则是 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$（仅与 ε 有关，对一切 p 适用），使当 $n > N$ 时，不论 p 是何正整数，都有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. 形式上都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$，这里是对取定的每个 p 的普通收敛，Cauchy 准则要求的是对 p 一致收敛. 所以，(1) $\not\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛. 例如 $x_n = \sqrt{n}$ 发散，而

$$x_{n+p} - x_n = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty),\ p = 1, 2, \cdots.$$

(2) $\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛. 用反证法. 若 $\{x_n\}$ 发散，则不满足 Cauchy 准则. 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall N$，有 $n, m > N$，使 $|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon_0$. 特别是，当 $N = 1$ 时，有 $n_1 > m_1 > 1$，$|x_{n_1} - x_{m_1}| \geqslant \varepsilon_0$. 对 $N = n_1$，有 $n_2 > m_2 > n_1$，使 $|x_{n_2} - x_{m_2}| \geqslant \varepsilon_0$. 如此继续下去，可得 $m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots < m_k < n_k < \cdots$，使 $|x_{n_k} - x_{m_k}| \geqslant \varepsilon_0$. 于是，对子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{m_k}\}$，不能有

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x_{m_k}) = 0.$$

(3) 根据所给条件，数列 $y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$ 单调有界，故收敛. 从而满足 Cauchy 准则. 于是可推知 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 准则.

(4) 显然(4)$\Rightarrow$(3).

例 1.1.8　下列说法中，哪些是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件？

(1) $\forall \{x_n\}$：$x_n \to x_0$，$x_n \neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在；

(2) $\forall$ 严格单调的 $\{x_n\}$：$x_n \to x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在；

(3) 在(2)中还假定所有的 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都相等；

(4) $\forall \{x_n\}$：$x_n \to x_0$，$x_n \neq x_0$，都有 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ 存在；

(5) $\forall \{x_n\}$：$x_n \to x_0$，$x_n \neq x_0$，$\{f(x_n)\}$ 满足 Cauchy 准则.

答 (1),(3),(5)为充要条件.

(1) 只要证明:所有的 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都相同,即满足 Heine 定理的条件. 假若不然,有 $x_n\to x_0$, $x_n\neq x_0$, $y_n\to x_0$, $y_n\neq x_0$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$, 则对 z_n, 其中 $z_{2n}=x_n$, $z_{2n+1}=y_n$, 仍有 $z_n\to x_0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$ 不再存在(参看例 1.2.1),这与(1)矛盾. 所以,(1)与 Heine 定理等价.

(3) 显然,(1)⇒(3). 反之,若(3)成立,且设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. 我们来证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$. 假若不然, $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, 有 x', $0<|x'-x_0|<\delta$, 使 $|f(x')-l|\geqslant\varepsilon_0$. 特别是当 $\delta=1$ 时, $\exists x_1$, $0<|x_1-x_0|<1$, $|f(x_1)-l|\geqslant\varepsilon_0$; 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\ |x_1-x_0|\right\}$ 时, $\exists x_2$, $0<|x_2-x_0|<\dfrac{1}{2}$ 且 $0<|x_2-x_0|<|x_1-x_0|$, 使 $|f(x_2)-l|\geqslant\varepsilon_0$;…… 如此继续下去,可得到 $\{x_n\}$, 适合 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$, 且 $|x_1-x_0|>|x_2-x_0|>\cdots>|x_n-x_0|>\cdots$, 使 $|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon_0$. 所有这些 $\{x_n\}$ 中,一定有无穷多个落在 x_0 的一侧,取它们作为新的数列,仍记作 $\{x_n\}$. 则 $\{x_n\}$ 为严格单调数列, $x_n\to x_0$, 但 $|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon_0$, 矛盾.

(5) $\{f(x_n)\}$ 满足 Cauchy 准则,必收敛,故(5) $\Leftrightarrow$ (1).

现在说明(2),(4)均为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的必要而非充分条件.

(2) 这时,对于合乎条件的不同的 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 可以不相等. 例如,选一 $f(x)$, 使 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$. 任取 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 为满足所给条件的递增和递减数列,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0-0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=f(x_0+0)$.

但不难证明: $f(x_0-0)$ 存在的充要条件是对任意严格递增数列 $\{x_n\}$: $x_n\to x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在.

(4) 仅由所给条件尚不足以保证 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 实际上,只要 $f(x)$ 在 x_0 某邻域有界,就总是满足(4)的.

1.2 子列、聚点和上(下)极限

例 1.2.1 下列说法中,哪些是 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件?

(1) $\{x_n\}$ 的任一子列都收敛于同一个实数;

(2) $\{x_n\}$ 的任一子列都收敛;

(3) $\{x_n\}$ 的任一子列都有收敛子列;

(4) $\{x_n\}$ 的任一子列都有收敛子列,并且它们有相同的极限;

(5) $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 皆收敛且极限相同.

答 (1),(2),(4),(5)皆为充要条件,(3)为仅必要但不充分条件.

为叙述方便,把 $\{x_n\}$ 收敛叫做(0). 则显然(1)—(5)皆可由(0)推出. 下面分析由(1)—(5)可否推出(0).

(1) 因为 $\{x_n\}$ 也是自己的子列，故(1)⇒(0). 所以(1) ⇔ (0).

(2) 显然(1)⇒(2). 若(2)成立，会不会有两个子列收敛于不同的实数呢？不会. 因为那样的话，这两个子列合成的新子列(即将两子列按在原数列中的顺序排列且重复的项看作一项)将不会收敛.

(3) 根据致密性定理："任何有界数列都有收敛子列"以及有界数列的子列仍有界，可知" $\{x_n\}$ 有界"⇒(3). 所以，(0)⇒(3). 但(3)⇏(0)，否则得出 $\{x_n\}$ 有界必收敛.

(4) 由(3)⇏(0)的原因是有界数列可以有极限不同的子列. 当(3)被加强为(4)时，就不存在这个问题了.

(5) 利用极限定义容易证明(5)⇒(0). 不仅如此，我们还可以写出更一般的结果：如果数列的项分属于有限个子列，且这些子列有相同的极限(有穷或无穷)，则数列本身也有同一极限.

例 1.2.2　下列说法是否正确？(此处把仅有有限项取自原数列不同位置的子列看作是相同的)

(1) 有界数列必有无穷多个收敛子列；

(2) 任何数列必有无穷多个单调子列；

(3) 任何发散数列都包含无穷多个发散子列；

(4) 若 $\{x_n\}$ 是一单调数列且有子列 $x_{n_k} \to l$ (或 $+\infty$, $-\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ (或 $+\infty$, $-\infty$).

答　四种说法均正确.

对于(1)—(3)，只要注意到这样一个基本事实：子列的任一子列仍是原数列的子列，这种选子列的过程是无穷尽的. 因此，如果所要求的子列有了"一个"，当然就有了"无穷多个".

于是，(1)可由致密性定理得出，(2)是例 1.5.1(见后)的直接结果，(3)是例 1.2.1(2)的逆否命题.

最后，(4)可直接由极限定义证明. 这一结果表明，单调数列的极限状况完全由其任一子列决定.

例 1.2.3　下列说法可否作为 l 是 $\{x_n\}$ 的聚点的定义？此处 l 为有限数.

(1) $\forall \varepsilon > 0$，在 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多项；

(2) $\forall \varepsilon > 0$，在 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 中有 $\{x_n\}$ 的至少一项；

(3) $\forall \varepsilon > 0$，在 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 中至少有一项 $x_n \neq l$.

答　(1)，(3)可以.

先分析一下三种说法的异同：显然，(1)⇒(2)，(1)⇒(3). 反之，由 ε 的任意性，当(3)成立时，这样的 x_n 不能只有有限项. 若不然，对某一 $\varepsilon_0 > 0$，在 $(l-\varepsilon_0, l+\varepsilon_0)$ 中只有 x_{n_1}, x_{n_2}, …, x_{n_k} 这 k 项，且 $x_{n_i} \neq l$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 令 $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{|x_{n_i} - l|\}$，则 $\varepsilon > 0$，而在 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 中再没有异于 l 的 $\{x_n\}$ 的项. 这与(3)矛盾. 所以(3)⇒(1).

(2) 与(3)的区别在于，当 l 为 $\{x_n\}$ 中的一项，比如 $l = x_k$，且 x_k 仅在 $\{x_n\}$ 中出现有限次时，尽管(2)总是对的，却不能保证(3)对. 例如 $x_n = n$, $l = 1$.

现在只要证明(1)可作为 l 是 $\{x_n\}$ 聚点的定义.

设 l 是 $\{x_n\}$ 的聚点,则有子列 $x_{n_k}\to l$. 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K$, $k>K$ 时, $x_{n_k}\in(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$. 即(1)成立.

反之,设(1)成立,则 $\forall\varepsilon>0$, 在 $(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 于是,可选 $x_{n_1}\in(l-1,\ l+1)$, 然后在 $\left(l-\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2}\right)$ 所含的 $\{x_n\}$ 的无穷多项中,选一项 $x_{n_2}\in\left(l-\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2}\right)$, $n_2>n_1$, … 如此继续下去,即可选得 $\{x_{n_k}\}$, $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 满足 $|x_{n_k}-l|<\frac{1}{k}$. 显然, $x_{n_k}\to l\ (k\to\infty)$, 此即 l 为 $\{x_n\}$ 的聚点.

例 1.2.4 是否存在数列,其全体有穷聚点所成集 A

(1)为空集;(2)为无限集;(3)无界;(4)为一区间;(5)为一有界开区间.

答 (1)—(4)均是存在的.

无穷大数列显然没有有穷聚点,即 $A=\varnothing$. 对(2)—(4),我们只具体写出 $A=(-\infty,+\infty)$ 的数列如下: $x_0=0$, $x_n=\frac{P}{Q}$, $|P|+Q=1,\ 2,\ \cdots$; P 为非零整数, Q 为正整数. 此数列可按如下方式排列:

$$
\begin{array}{cl}
0 & \\
1,\ -1 & (|P|+Q=2), \\
\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{1} & (|P|+Q=3), \\
\frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{2},\ -\frac{3}{1} & (|P|+Q=4), \\
\frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{4}{1} & (|P|+Q=5), \\
\cdots & (\cdots)
\end{array}
$$

(5) 我们证明:若 $(a,\ b)\subset A$, a, b 为有穷数,则 $a\in A$, $b\in A$. 即 A 不可能是有界开区间.

$\forall\varepsilon>0$, $\varepsilon<b-a$, 令 $a'=a+\frac{\varepsilon}{2}$, 则 $a'\in A$. 即 a' 为 $\{x_n\}$ 的聚点. 故对 $\frac{\varepsilon}{2}$ 和任意正整数 N, $\exists n>N$, 使 $x_n\in\left(a'-\frac{\varepsilon}{2},\ a'+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 从而 $x_n\in(a,\ a+\varepsilon)$, 这正表明 $a\in A$. 同理, $b\in A$.

例 1.2.5 设 $\{x_n\}$ 有界. 下列说法可否作为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=L$ 的定义?

(1) $\forall\varepsilon>0$, 有无穷多个 n 使 $x_n>L-\varepsilon$, 同时至多有有限个 n 使 $x_n\geqslant L+\varepsilon$;

(2) $L=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$;

(3) $L=\inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$;

(4) 在 L 右方只有 $\{x_n\}$ 的有限项而同时有 $\{x_n\}$ 的一个子列 $x_{n_k}\leqslant L$, 使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=L$.

答 (1),(2),(3)可以.

为叙述方便,把 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=L$ 记作说法(0). 则

(1) $\Leftrightarrow$ (0). 设(1)成立，则 $\forall \varepsilon > 0$，有无穷多个 $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. 从而 $L \in A$. 此处，A 为 $\{x_n\}$ 的聚点集又任意的 $L' > L$ 不能是 $\{x_n\}$ 的聚点. 否则，取 $2\varepsilon < L'-L$，则有无穷多个 $x_n > L'-\varepsilon > L+\varepsilon$，矛盾. 所以 $L = \max A$. 反之，当(0)成立时，L 为 $\{x_n\}$ 的聚点. 于是，$\forall \varepsilon > 0$，$\{n \mid x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)\}$ 为无限集，只要再证 $\{n \mid x_n \in (L+\varepsilon, +\infty)\}$ 为有限集. 若不然，与这个集合对应的 x_n 可排成 $\{x_n\}$ 的有界子列，从而必有聚点 $L' \geqslant L+\varepsilon$，$L'$ 也是 x_n 的聚点. 这与 $L = \max A$ 矛盾.

(2) $\Leftrightarrow$ (0). 证明略(也可由下一结果推出).

(3) $\Leftrightarrow$ (1). 设(1)成立，则 $\forall \varepsilon > 0$，有无穷多个 $x_n > L-\varepsilon$，从而对任意 k，一定有 $n \geqslant k$，使 $x_n > L-\varepsilon$. 于是

$$\sup_{n\geqslant k}\{x_n\} > L-\varepsilon, \quad \inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}\{x_n\} \geqslant L-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，$\inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} \geqslant L$. 另一方面，$\exists k$，$n \geqslant k$ 时，$x_n < L+\varepsilon$，$\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} \leqslant L+\varepsilon$. 因此，$\inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} \leqslant L+\varepsilon$. 仍由 ε 的任意性得 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} \leqslant L$. 这样，

$$L = \inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}\{x_n\},$$

即(3)成立. 反之，设 $L = \inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$，则由下确界定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\forall k$，$\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} > L-\varepsilon$. 故 $\forall k$，$\exists$（与 k 相应的）n，使 $n \geqslant k$ 且 $x_n > L-\varepsilon$. 因此满足 $x_n > L-\varepsilon$ 的 x_n 有无穷多个. 另一方面，$\exists k_0$，使 $\sup\limits_{n\geqslant k_0}\{x_n\} < L+\varepsilon$. 于是，$n \geqslant k_0$ 时，$x_n < L+\varepsilon$，即在 $L+\varepsilon$ 右边只有 $\{x_n\}$ 的有限项. 这就是说，(3)$\Rightarrow$(1).

(4) $\Rightarrow$(1). 但(1)$\nRightarrow$(4)，例如 $x_n = \dfrac{1}{n}$，$L = 0$.

例 1.2.6　下列说法是否正确？（设 $\{x_n\}$ 为有界的）

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n < \sup\limits_n\{x_n\}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在的充要条件是 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n - \dfrac{1}{n}$，$n = 1, 2, \cdots$；

(3) 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > 0$，必有 $\{x_n\}$ 的无穷多项为正；

(4) 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n > l$，必有 $\{x_n\}$ 的无穷多项大于 l.

答　(2)，(3)，(4)正确. (1)可能成为等式.

(1) 显然有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup\limits_n\{x_n\}$. 另一方面，由定义易知，当 $\{x_n\}$ 为单调递增数列时，$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n\{x_n\}$.

(2) 注意对有界数列而言，$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 是两个固定数，而 $\dfrac{1}{n}$ 可任意小. 所以，这里的说法等价于 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$，也就是说，$\{x_n\}$ 的聚点为有穷数且是唯一的. 这正是有界数列收敛的充要条件.

(3) 这时有 x_n 的子列 $x_{n_k} \to l > 0$. 由极限保号性质即得.

(4) 与(3)类似.

例 1.2.7　设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有界，试比较下列每一对极限的大小：

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 和 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$;

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$ 和 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n(x_n\geqslant 0,\ y_n\geqslant 0)$;

(3) 设 $x_n\geqslant y_n$, $n=1,2,\cdots$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$;

(4) 设 $x_n\geqslant y_n$, $n=1,2,\cdots$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$.

答 (1) $\geqslant$, (2) $\geqslant$, (3) $\geqslant$, (4) $\geqslant$.

仅对(1),(3)作出说明.(2)与(1),(4)与(3)是类似的.

(1) 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n=b$. 若 c 为 $\{x_n+y_n\}$ 的任一聚点,则存在子列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}\to c$. $\{x_{n_k}\}$ 为有界子列,故有聚点 $a'\geqslant a$ 以及子列 $x_{n_{k_i}}\to a'(i\to\infty)$. $\{y_{n_{k_i}}\}$ 有聚点 $b'\geqslant b$ 及子列(不妨认为就是它自己) $y_{n_{k_i}}\to b'(i\to\infty)$. 于是, $x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to a'+b'=c\geqslant a+b$. 由此即知 $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$. 另一方面,可举例说明,等号及严格的不等号都是可能的.

(3) 由 $x_n\geqslant y_n$, $\inf\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}\geqslant\inf\limits_{n\geqslant k}\{y_n\}$. 取极限即知 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$.

例 1.2.8 下列等式是否成立?

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$;

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}$ (假定 $x_n\neq 0$, $n=1,2,\cdots$);

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在时, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$;

(4) $\varliminf\limits_{n\to\infty}|x_n|=|\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n|$.

答 (1),(3)成立.(2),(4)则未必.

(1) 设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=L$, 则有子列 $x_{n_k}\to L$, 从而 $-x_{n_k}\to -L$, 即 $-L$ 是 $\{-x_n\}$ 的聚点. 再证 $-L$ 是最小的聚点. 若 K 是 $\{-x_n\}$ 的另一聚点,则 $-K$ 是 $\{x_n\}$ 的聚点. 于是, $-K\leqslant L$, $K\geqslant -L$. 这表明 $-L$ 是 $\{-x_n\}$ 的最小聚点,所以 $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-L$.

(2) 不一定. 例如 $x_n=(-1)^n$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-1$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=1$.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=K$. 则当 L 是 $\{y_n\}$ 的任一聚点时,有 $y_{n_k}\to L$. 从而 $x_{n_k}+y_{n_k}\to K+L$. 即 $K+L$ 是 $\{y_n+x_n\}$ 的聚点. 反之,当 L' 是 $\{y_n+x_n\}$ 的任一聚点时, $L'-K$ 一定是 $\{y_n\}$ 的聚点. 由此可知, $\{x_n+y_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的聚点集合是数轴上的相互平移. 当 $L=\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$ 时,

$$L+K=\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n).$$

(4) 不一定. 例如数列 $-1,0,-1,0,\cdots$. 则

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n=-1,\ \varliminf_{n\to\infty}|x_n|=0.\ \varliminf_{n\to\infty}|x_n|<\left|\varliminf_{n\to\infty}x_n\right|.$$

注 1° 如果规定一个有穷的聚点总是比 $-\infty$ 大,比 $+\infty$ 小,则无论是有界数列还是无界数列,上(下)极限可统一定义为最大(小)聚点. 于是,数列的上(下)极限总是存在的,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$ (有限数或 $+\infty$, $-\infty$) 的充要条件是 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=l$. 这正是在有些情况