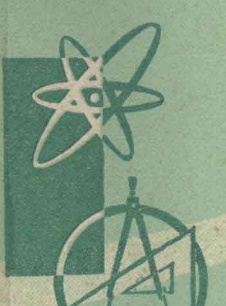
数学题解

SHUXUETIJIE



无锡市教育局教研室

目　录

北 京 市

一、解方程 $\sqrt{x-1}=3-x$，

解：方程两边平方得 $x-1=(3-x)^2$，

$x^2-7x+10=0$，$x_1=5$，$x_2=2$。

经检验后知 $x=2$是原方程的根，而 $x=5$是增根。

二、计算$2^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{2^{\circ}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$，

解：原式$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}+1)$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1=-1$。

三、已知$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，求$\lg\sqrt{45}$

解：$\lg\sqrt{45}=\dfrac{1}{2}(\lg 5+2\lg 3)=\dfrac{1}{2}(\lg\dfrac{10}{2}+2\lg 3)$

$=\dfrac{1}{2}(1-\lg 2+2\lg 3)=0.8266$

四、证明 $(1+\mathrm{tg}\alpha)^2=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$

证：$(1+\mathrm{tg}\alpha)^2=(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^2=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$。

五、求过两直线$x+y-7=0$和$3x-y-1=0$的交点，并且过点(1，1)的直线方程。

解(一)由$\begin{cases}x+y-7=0\\3x-y-1=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$ ∴交点坐标为(2，5)

因所求直线过（2，5）和（1，1）两点，它的方程为$\frac{y-5}{5-1}=\frac{x-2}{2-1}$，即$4x-y-3=0$

解（二）设所求直线方程为$x+y-7+k(3x-y-1)=0$（过两直线交点的直线束方程），它又过（1，1）点，满足$1+1-7+k(3-1-1)=0$，得$k=5$，代入直线束方程，得所求直线方程为$4x-y-3=0$。

六、某工厂今年七月份的产值为100万元，以后每月产值比上个月增加20%，问今年七月份到十月份的总产值是多少？

解：七、八、九、十这四个月中，每个月的产值组成一个首项为100，公比为1·2的等比数列。

$$S_4=\frac{100(1\cdot2^4-1)}{1\cdot2-1}=536.8(\text{万元})$$

答：七月份到十月份的总产值是536.8万元。

七、已知二次函数 $y=x^2-6x+5$

（1）求出它的图象的顶点坐标和对称轴方程

（2）画出它的图象

（3）分别求出它的图象和x轴、y轴的交点坐标。

解：$y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$

（1）顶点坐标$(3,-4)$；对称轴方程$x-3=0$；

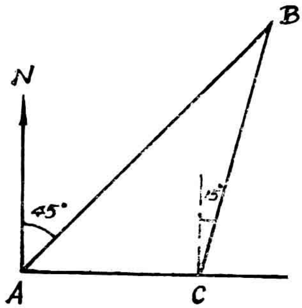
（2）图象（略）；

（3）图象与x轴交于$(5,0)$和$(1,0)$两点；

图象与y轴交于点$(0,5)$。

八、一只船以每小时20浬的速度向正东航行。起初船在A处看见一灯塔B在船的北45°东（即北偏东45°），1小时后，船在C处看见这个灯塔在船的北15°东（即北偏东15°），求这时船和灯塔的距离CB

解：如图



在△ABC中，∠BAC = 45°，

∠ACB = 90° + 15° = 105°，

AC = 20浬，

∠ABC = 180° - 45° - 105° = 30°，

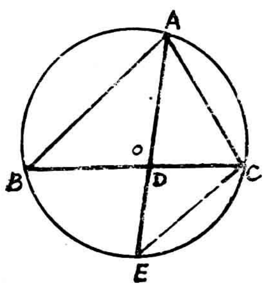
由正弦定理 $\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ}$

$\therefore\ BC = \frac{20\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 20\sqrt{2}$

$= 28.28$（浬）

答：船和灯塔的距离CB约28.28浬。

九、有一个圆内接三角形ABC，∠A的平分线交BC于D，交外接圆于E。求证AD·AE = AC·AB。



已知：△ABC内接于⊙O，∠A平分线AD延长交⊙O于E，

求证：AD·AE = AC·AB

证：连结CE，

∵ ∠BAD = ∠EAC，

∠ABD = ∠AEC，

∴ △ABD∽△AEC，

得 $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$，

∴ AD·AE = AC·AB。

十、当m取哪些值时，直线 $y = x + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 有一个交点？有两个交点？没有交点？当它们有一个交点时，画出它们的图形。

解： 以$y=x+m$代入椭圆方程得$\frac{x^2}{16}+\frac{(x+m)^2}{9}=1$，

即$25x^2+32mx+16(m^2-9)=0$

$\triangle=b^2-4ac=(32m)^2-4\times25\times16(m^2-9)$

$=576(25-m^2)$

（1）当$576(25-m^2)>0$。

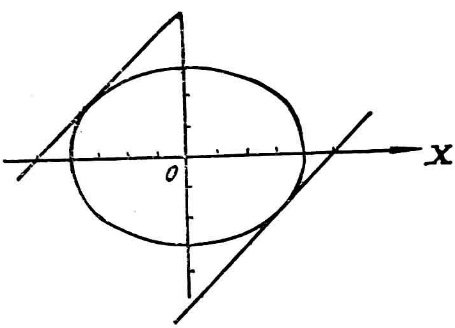
即$-5<m<5$时，有两个交点；

（2）当$576(25-m^2)=0$，

即$m=\pm5$时，有一个交点；

（3）当$576(25-m^2)<0$，

即$m<-5$时或$m>5$时，没有交点。



参 考 题

一、（1）求函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{\pi}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$的导数

解： 当$x\neq0$，$f'(x)=(x^2\sin\frac{\pi}{x})'=2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x}$。

当$x=0$，$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{\pi}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{\pi}{\Delta x}=0$$

(2) 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕$x$轴旋转而成的旋转体体积。

解：由椭圆方程变形得$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

该椭圆绕x轴旋转而成的旋转体的体积

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

二、(1) 试用$\varepsilon-\delta$语言叙述“函数$f(x)$在点$x=x_0$处连续”的定义。

答：函数$f(x)$在点$x=x_0$处连续，是指对于任意给定的正数ε，能够找到一个正数δ，当$|x-x_0|<\delta$时，使得不等式$|f(x)-f(x_0|<\varepsilon$成立。

(2) 试证明若$f(x)$在点$x=x_0$处连续，且$f(x)>0$，则存在一个x_0的邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，在这个邻域内，处处有$f(x)>0$。

证：任取一个正数ε，使$0<\varepsilon<f(x_0)$，因为$f(x)$在点$x=x_0$处连续，所以能够找到一个正数δ，当$|x-x_0|<\delta$时，使得不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立。

由 $|x-x_0|<\delta$，即得$x_0-\delta<x<x_0+\delta$，

使 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 即使得

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\text{ 成立，}$$

但由$0<\varepsilon<f(x_0)$得$f(x_0)-\varepsilon>0$，

所以存在一个x_0的邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，在这个邻域内，处处有$f(x)>0$。

上　海　市

一、(1) 化简$\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$

解： 原式$=\left[\frac{a(a+b)}{(a+b)^2}-\frac{a^2}{(a+b)^2}\right]\div\left[\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}\right.$

$\left.-\frac{a^2}{(a+b)(a-b)}\right]=\frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{-ab}$

$=\frac{b-a}{a+b}$。

(2) 计算：$\frac{1}{2}\lg25+\lg2-\lg\sqrt{0.1}-\log_2 9\cdot\log_3 2$

解： 原式$=\lg5+\lg2-\frac{1}{2}\lg0.1-2\log_2 3\cdot\log_3 2$

$=\lg(5\times2)-\frac{1}{2}(-1)-2\times1=-\frac{1}{2}$。

(3) $\sqrt{-1}$记作i。验算i是不是方程

$2x^4+3x^3-3x^2+3x-5=0$的根。

解： 将$x=i$代入方程左边：

$2i^4+3i^3-3i^2+3i-5=2-3i+3+3i-5=0$

$\therefore i$是原方程的根。

(4) 求证：$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}=\frac{2}{\cos2\theta}$

证： 左边$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$$=\frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]}{\frac{1}{2}\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]}$$

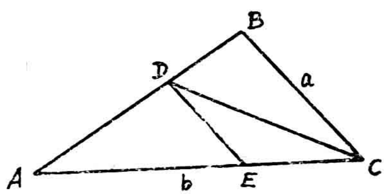
$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}=\frac{2}{\cos 2\theta}=\text{右边。}$$

二、在△ABC中∠C的平分线交AB于D。过D作BC的平行线交AC于E，已知BC $=a$，AC $=b$，求DE的长。

解(一) $\because \frac{AD}{BD}=\frac{CA}{CB}=\frac{b}{a}$。

（三角形内角平分线分对边两线段与两邻边成比例）

又 DE ∥ BC，∴ △ADE∽△ABC，得 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$，



$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AD+DB}=\frac{b}{b+a},$$

$$DE=BC\cdot\frac{b}{b+a}=\frac{ab}{a+b}。$$

解(二) 设DE $=x$，∵ DE ∥ BC，

∴ ∠BCD = ∠CDE，

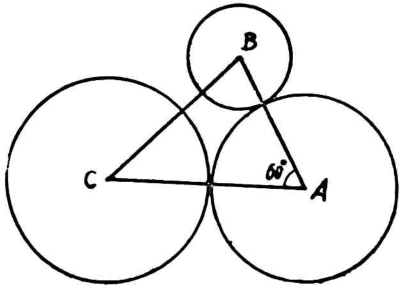
已知∠BCD = ∠DCE，从而∠DCE = ∠CDE，

得EC = DE $=x$，　　由△ADE∽△ABC，

得 $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$，即 $\frac{x}{a}=\frac{b-x}{b}$，　解得 $x=\frac{ab}{a+b}$。

三、已知圆A的直径为 $2\sqrt{3}$，圆B的直径为 $4-2\sqrt{3}$，

圆C的直径为2，圆A与圆B外切，圆A又与圆C外切，$\angle A=60°$，①求BC的长；②求$\angle C$度数的。



解(一) $AB=\dfrac{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2}=2$，

$AC=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$，

由余弦定理得：

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos60°$

$=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\times2\times(1+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}=6$，

$BC=\sqrt{6}$；

又由$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$，即$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin60°}=\dfrac{2}{\sin C}$，

得$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$\because AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，　$\therefore AB<BC$，

从而知$\angle C$是锐角，得$\angle C=45°$。

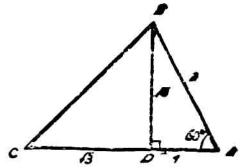
解(二)作$BD\perp AC$，如图。则$\angle ABD=30°$，$AD=1$，

$\therefore CD=1+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$，　$BD=\sqrt{2^2-1^2}$

$=\sqrt{3}$，

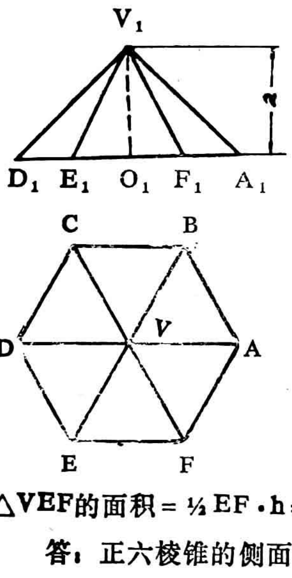
$\therefore \triangle CDB$是等腰直角三角形，得$\angle C = \angle DBC = 45^\circ$，

$BC = \sqrt{2}\,BD = \sqrt{6}$。



四、正六棱锥 V－ABCDEF 的高为 2 cm，底面边长为 2cm。①按1：1画出它的二视图；②求出它的侧面积；③求出它的侧棱和底面的夹角。

解：（下图是按 3 ：4 画出的二视图）。



侧棱长

$$V_1A_1 = \sqrt{A_1O_1{}^2 + V_1O_1{}^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\ (cm)；$$

斜高 $h = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2}$

$$= \sqrt{7}\ (cm)；$$

或 $h = \sqrt{V_1A_1{}^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2}$$
$$= \sqrt{7}\ (cm)；$$

$\triangle VEF$的面积 $= \frac{1}{2} EF \cdot h = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} = \sqrt{7}\ (cm^2)$

答：正六棱锥的侧面积$S = 6\sqrt{7}\ cm^2$。

$$\sin V_1A_1O_1 = \frac{V_1O_1}{V_1A_1} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\angle V_1A_1O_1 = 45^\circ$;

答：正六棱锥的侧棱和底面的夹角是45°。

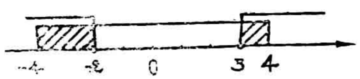
五、解不等式组$\begin{cases}16 - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 - x - 6 > 0,\end{cases}$并在数轴上把它的解表示出来。

解：$\begin{cases}16 - x^2 \geqslant 0, & -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ x^2 - x - 6 > 0, & x < -2 \text{或} x > 3;\end{cases}$

解为 $-4 \leqslant x < -2$;

$3 < x \leqslant 4$

（见右图）



六、已知两定点A（－4,0）B(4,0)，一动点P(x,y)与两定点A、B的连线PA、PB斜率的积为$-\frac{1}{4}$，求P点的轨迹方程，并把它化成标准形式，指出这是什么曲线。

解：$K_{PA} \cdot K_{PB} = -\frac{1}{4}$,

即 $\dfrac{y-0}{x+4} \cdot \dfrac{y-0}{x-4} = -\dfrac{1}{4}$,

化简得 $x^2 + 4y^2 = 4^2$，P点的轨迹方程为：

$\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$，这是椭圆。它的长轴在$x$轴上，短轴在$y$轴上，中心在原点。

七、等腰梯形的周长为60，底角为60°，问这梯形各边长为多少时，面积为最大？

解：设梯形的上下底和腰长分别为a、b和c，于是

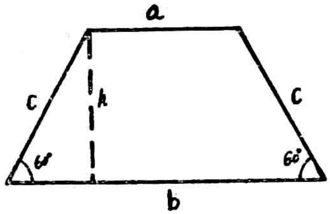
$a + b + 2c = 60$,

面积 $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot c \cdot \sin 60^\circ$

$= \dfrac{60 - 2c}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(c^2 - 30c)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(c-15)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 15^2$$



∴ 当$c=15$时，面积最大；

$S_{最大} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 15^2 = \frac{225\sqrt{3}}{2}$；

这时$a+b=60-2\cdot 15=30$，

而　$b=a+2\cdot\frac{c}{2}=a+c=a+15$，

解得：$a=7.5$，　$b=22.5$。

答：当上底为7.5，下底为22.5，两腰均为15时，梯形面积最大；最大面积为$\frac{225\sqrt{3}}{2}$。

八、当k为何值时，方程组$\begin{cases} x-\sqrt{y-2}=0 \\ kx-y-2k-10=0 \end{cases}$的两组解才相同，求出这组解。

解 $\begin{cases} x-\sqrt{y-2}=0 & (1) \\ kx-y-2k-10=0 & (2) \end{cases}$

由(1)　$x^2=y-2$，　得　$y=x^2+2$　(3)

(3)代入(2)　$kx-(x^2+2)-2k-10=0$，

即　　　$x^2-kx+2k+12=0$　　(4)

要使原方程组的两组解相同，这关于未知数 x 的二次方程必须有等根，所以它的判别式必为零。

$\triangle = k^2 - 4\times1\times(2k+12) = 0$,

$\therefore k_1 = 12$, $k_2 = -4$,

$k_1 = 12$ 代入（4）得 $x^2 - 12x + 36 = 0$,

$x_1 = x_2 = = 6$, 代入(1)

得 $y = 38$。

$k_2 = -4$代入（4）得 $x^2 + 4x + 4 = 0$,

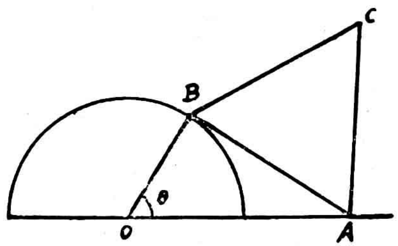
$x_1 = x_2 = -2$ 代入(1)不适合，

$\therefore$当$k = 12$时，原方程组的两组解相同，这组解为

$$\begin{cases} x = 6, \\ y = 38。\end{cases}$$

加 试 题

九、如图所示：一半圆O的直径为2，A为直径延长线上的一点，而且OA = 2，B 为半圆上任意一点，以 AB 为一边作等边三角形ABC。问 B在什么位置时，四边形OACB的面积为最大；并求出这个面积的最大值。



解：设$\angle BOA = \theta$,

$S_{\triangle BOA} = \frac{1}{2}\cdot OB\cdot OA\cdot\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin\theta = \sin\theta$,

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OA \cdot \cos\theta$$

$$= 1^2 + 2^2 - 2\times1\times2\cos\theta$$

$$= 5 - 4\cos\theta$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(5 - 4\cos\theta)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}\cos\theta$$

$$S_{OACB} = S_{\triangle BOA} + S_{\triangle ABC}$$

$$= \sin\theta + \frac{5\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}\cos\theta$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2\sin(\theta - \frac{\pi}{3})$$

当$\sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = 1$时，四边形面积最大。

此时 $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$，

$$S_{最大} = \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2.$$

十、已知曲线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = x + 3$ 相交于 P(0，3)、Q(3，6)两点，

① 分别求出曲线在各交点的切线的斜率；

② 求曲线与直线围成的图形的面积。

解： $y = x^2 - 2x + 3$，

$y' = 2x - 2$

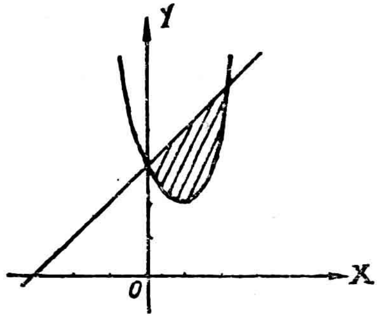
① $k_1 = y'(0) = -2$，（抛物线过P点的切线的斜率）

$k_2 = y'(3) = 4$，　（抛物线过Q点的切线的斜率）

② 面积 $S = \int_0^3 \left[(x+3) - (x^2 - 2x + 3) \right] dx$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3$$

$$=-9+\frac{27}{2}=4.5$$



天 津

一、1. 在什么条件下：$\frac{y}{2x}$：(1)是正数(2)是负数(3)等于零(4)没有意义。

解：(1) $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$时，$\frac{y}{2x}$是正数；

(2) $\begin{cases}x<0\\y>0\end{cases}$或$\begin{cases}x>0\\y<0\end{cases}$时，$\frac{y}{2x}$是负数；

(3) $\begin{cases}x\neq0\\y=0\end{cases}$时，$\frac{y}{2x}=0$；

(4) $x=0$时，$\frac{y}{2x}$没有意义。

2. 比较下列各组数的大小，并说明理由，

(1) $\cos 31°$与$\cos 30°$

解：∵余弦函数在第Ⅰ、Ⅱ象限中是减函数，而$31°>30°$，

∴ $\cos 31°<\cos 30°$。

(2) $\log_2 1$ 与 $\log_2 \frac{1}{4}$

解：∵对数函数当底数大于1时，是增函数，而$1>\frac{1}{4}$，

∴ $\log_2 1>\log_2 \frac{1}{4}$。

3. 求值：(1) $\mathrm{tg}(5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$

解：$\mathrm{tg}(5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})=\mathrm{tg}(5\times\frac{\pi}{3})=\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3}$

$=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$