高級中学二年級

代数教材研究函授講义

（初稿）

一九五九年秋季用（第一分册）

無錫市教育局編

无錫人民出版社

目　　录

第五章　数　列

第六章　指　数

第五章 數 列

第一单元 数列的概念（§73—§74）

教 学 目 的

（一）通过具体实例給学生建立数列的概念，并使学生学会一些“已知簡单数列的前若干項求通項”及“給了通項公式写出数列来”等問題，为学习級数、极限与指数打下基础。

（二）通过数列的学习，启发学生注意发現事物的內在規律，以培养学生的認識能力。

教 材 研 究

（一）教材內容与重点：

本单元的教材分下列两个部分：

1.数列的概念（§73）。

2.数列的通項公式（§74）。

这些內容，都是通过一些具体的例子加以說明的，配合着这些內容，在习題中还要求学生从数軸或平面上的点来表示数列，区别已知数列的类型，并举各种类型数列的例子，探求数列的通項公式。

其中数列的定义与已知数列的通項公式求数列的前若干項，为本单元教材的重点。

（二）教材系統：

本单元是在学生已有了数列的观念与初步理解了变量概念的基础上，进一步来形成对数列的完整概念；并掌握它的变化規律，为学习級数、极限与指数打下基础。

（三）教材說明：

1. 数列的定义：

通常用两种不同的方式来定义的。第一种方式是以一个元素跟随着另一个元素的概念为基础，也就是以序数概念为基础的。例如数列：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，……，$\frac{1}{n}$，……；及质数組成的数列 2，3，5，7，11，……；对于这样的集合的任何两个元素，可以指出哪一个元素在前，哪一个元素在后。例如在上一数列中我們取 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$ 在 $\frac{1}{3}$ 之后，而 $\frac{1}{3}$ 在 $\frac{1}{5}$ 之前。而且直接地跟随着每一个元素的有一个，且仅有一个元素。除了第一个元素之外，直接地在每一个元素之前的元素仅有一个。数列的第一个元素是这样的元素：对于它沒有更前面的元素。根据这样的方式所下的数列定义是“**数列就是数的集合 a_1，a_2，a_3，a_4，……，a_n，……；通常以 $\{a_n\}$ 来表示，它的元素可用自然数編号，并依照号碼上升的順序来排列**”。

数列的元素通常称为数列的項。

另一种方式是以整标函数来定义的。例如数列：2，4，6，8，10，……，$2n$，……里，第一个位置上的数是 2，第二个位置上的数是 4，第三个位置上的数是 6，……；在这个数列里，每一个确定的位置都有一个确定的数与它对应。因此

我們可以把数列里的数看做是它所在位置的号数的函数；自变量是位置的号数，它所取的値是自然数：1，2，3，……等，而对应的函数値就是数列里的各个数。

根据这样的方式所下的数列定义是“**数列是自变量为自然数的函数値集合**”。

从表面上看来，前一个定义是比較易于使学生接受的。但如果在学生已經掌握函数概念的基础上，用第二种定义来进行教学并不比第一种定义感到困难。而且由于利用整标函数来定义数列，就可以有力地指出，一个数列可以看做一个变量在它变化过程中所取的一系列的値。換句話說，就是每一个数列都对应着一个变量。实际上，以上二种定义所揭露概念的本质屬性是一样的，第一种定义淺显易懂，易于为学生接受；第二种定义重点突出，可以为以后学习变量的极限打下良好的基础。而教本上对数列所下的定义是：“依照某种法則排列着的一列数叫做数列”。其中所謂“某种法則”包含了某种对应規律；所謂“排列着”是指一定的顺序。由此可見这个定义是兼收并蓄了上面所講的两种定义方式的精神，是比較概括全面的。

2.数列的分类：

数列的分类方法，常見的有下列几种：

（1）**按照有沒有最后一項来分有两种**：即数列有最后一項的叫做有穷数列；沒有最后一項的叫做无穷数列。本单元主要研究无穷数列。有穷数列可以看做与它相应的无穷数列的一部分。

（2）**按照每一項的値的大小来分有四种**：即数列$\{a_n\}$中，从第2項起，每一項都大于它的前面的一項（即$a_{n+1}>a_n$恆成立），就是遞增数列；如数列1，3，5，7，9，……；及

$\sqrt{2}$ 的精确到 1，0.1，0.01，0.001，……的不足近似值組成的数列：1，1.4，1.41，1.414，……；是递增数列；如果从第 2 項起每一項都小于它的前面的一項（即 $a_{n+1}<a_n$ 恆成立），就是递減数列；如数列 6，3，0，−3，−6，−9，……；及 $\sqrt{2}$ 的精确到 1，0.1，0.01，0.001，……的过剩近似值組成的数列：2，1.5，1.42，1.415，……；是递減数列；如果从第二項起，有些項大于它的前面一項而另一些項又小于它的前面的一項；（特殊的：$a_n>a_{n+1}$ 及 $a_{n+1}<a_{n+2}$，或 $a_n<a_{n+1}$ 及 $a_{n+1}>a_{n+2}$，两个不等式都同时成立），就是摆动数列；例如数列：$1，-\frac{1}{2}，\frac{1}{3}，-\frac{1}{4}，\frac{1}{5}，-\frac{1}{6}$，……；及数列：1，−1，1，−1，−1，1，−1，−1，−1，……；是摆动数列。如果各項都相等（即 $a_n=a_{n+1}$ 恆成立），就是常数数列；如数列：4，4，4，4，……；是常数数列。常数与常数数列是有区别的，常数是指的一个数，常数数列是指的各項都相等的一个数列。例如 4 与 $\{4\}$ 是两个不同的概念，不能混淆起来。

判定一个数列是递增的、递減的、还是摆动的，一般是使用通項公式証明它是否符合上述关系来确定的。（当然不是所有数列都可以用通項公式来这样做）。

例 1． 数列：$\frac{1}{2}，\frac{2}{3}，\frac{3}{4}，\frac{4}{5}，\frac{5}{6}，……，\frac{n}{n+1}，……$；

由于 $a_n=\frac{n}{n+1}$，$a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$，

$$a_n-a_{n+1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{-1}{n^2+3n+2}$$；因为 n 是自然数所以

$\frac{-1}{n^2+3n+2}<0$ 即 $a_n<a_{n+1}$ 恆成立，可知这个数

列是无穷递增数列。

例2．数列：$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots$；

由于 $a_n=\frac{1}{n}$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$，

$a_n-a_{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>0$，即 $a_n>a_{n+1}$

恆成立，可知这个数列是无穷递减数列。

例3．数列：$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots\cdots,$

$(-1)^n\frac{1}{2^n}, \cdots\cdots$；

由于 $a_n=(-1)^n\frac{1}{2^n}=(-\frac{1}{2})^n$，当 n 是奇数时，

它是負的，当 n 是偶数时，它是正的，即

$a_n>a_{n+1}$ 及 $a_{n+1}<a_{n+2}$ 或 $a_n<a_{n+1}$ 及

$a_{n+1}>a_{n+2}$ 都成立，可知这个数列是无穷摆动数列。

例4．数列：2，2，3，3，3，2，2，3，3，3，……；

这个数列就不能用上面的方法判定，而它是符合摆动数列定义的，因此它是一个无穷摆动数列。

（3）**按照数列发展的趨勢来分有两种**：数列$\{a_n\}$，如果存在一个正数A，使 $|a_n|<A$ 恆成立，叫做有界数列；不存在这样的正数 A，就叫做无界数列。

因为一切有穷数列都有界，所以数列有界性的研究，主要是对无穷数列而言。判断一个无穷数列的有界或无界，只要証明它是否存在象上述这样的正数A即可。

例如数列：$-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \cdots\cdots, \frac{2n-3}{2n+1}\cdots\cdots$；

因 $a_n=\frac{2n-3}{2n+1}=1-\frac{4}{2n+1}$，当 n 为任何自然数时 $\left|1-\frac{4}{2n+1}\right|<1$，当然也小于比1大的任何数，可知这个数列是有界的，1就是这个数列的界。（但1不是唯一的界，大于1的一切数都可以作为这个数列的界）。

我們也可以用几何方法来判断一个数列是否有界，可以把数列表示在数軸上，如果有漸近点，它是有界的，否則无界。

3.数列的通項与通項公式：

在一个数列中，与任意自然数所对应的一項 a_n 的値，叫做数列的通項。一个数列的第 n 項（卽 a_n）与項数 n 間的函数关系，可用解析式子表达的，这个表达式叫做数列的通項公式。通項公式所表示的函数，一般情况是单値函数，所以一个通項公式，仅对应于唯一的数列，它是有相对确定性的。因此就有可能确定已知一数是否是这个已知数列中的一項。例如：已知一个数列的通項公式是 n^2-2，求这个数列的前5項。

当 $n=1$，$a_1=-1$；$n=2$，$a_2=2$；$n=3$，$a_3=7$；$n=4$，$a_4=14$；$n=5$，$a_5=23$；由此可知，这个通項公式 n^2-2 对应着唯一的数列：-1，2，7，14，23，……，n^2-2，……；

如果問327是否是这一个数列中的一項？由于对应的唯一性，可令 $n^2-2=327$，求对应的 n，$n=\sqrt{327}\approx18.1$ 不是自然数，这說明327不能对应某一自然数，所以327不是这一个数列中的一項。

另一方面，再来研究，由已知数列的前若干項，求它的通

項公式。因为仅由前若干項而沒有指出它的变化規律，这个函数的对应关系就不能确定，从而反映函数对应規律的項通公式，就沒有确定性。因此如果仅已知数列的前若干項，与它对应的通項公式可能有无穷多个。

例如数列：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，……；的通項公式可以

写为：

$$a_n=\frac{n\pm q(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\cdots\cdots}{n\pm p(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\cdots\cdots+1}$$

当 q，p 取不同的常数即得不同的数列，这些数列仅前面若干項有相同的数值而已。

又如求数列：2，4，8，……的通項公式，得 $a_n=2^n$，但如取 $a_n=n^2-n+2$；

$a_n=n^3-5n^2+10n-4$；

$a_n=\frac{1}{60}n^4+\frac{7}{12}n^2+\frac{7}{5}$；也是可以的。

如果指明要根据在这个数列中，从第二項起，每一項都是它前一項的两倍的規律求它的通項公式，那末一定求出 $a_n=2^n$，而且是唯一的。

因为函数的表达式有时不是可以用一个表达式来表示的，例如 $|x|$ 必須表示为：

$$|x|=\begin{cases} x & （当\ x\geqslant 0）; \\ -x & （当\ x<0）。\end{cases}$$

因此有些数列的通項公式也不是可以用一个表达式来表示的；并且必須注意不是所有数列都可以用通項公式来表示的。有些数列就沒有通項公式，如質数組成的数列及任何不尽根数精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似値或过剩近似値所組成的数列，都沒有

通項公式，只能根据某种运算法則求出它的各項的值。

如果数列有通項公式的，而要求出这个通項公式来，也是一件不簡单的工作，它是沒有一定法則可循的。根据一些經驗介紹，可以用与一些已知通項公式的数列作比較的方法来找寻关系。現举例如下，以作参考。

例1．求数列3，9，19，33，51，……的通項公式。

可以先考虑数列中各項都是奇数，經过变形写成:

$$(2+1),(8+1),(18+1),(32+1),(50+1),\ \cdots\cdots;$$

而 $\begin{array}{cccccl} 2, & 8, & 18, & 32, & 50, & \cdots\cdots; \text{对应于} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2\cdot 1, & 2\cdot 4, & 2\cdot 9, & 2\cdot 16, & 2\cdot 25, & \cdots\cdots; \end{array}$

其中各項是数列1，4，9，16，25，……的对应項的两倍，因此由2，8，18，32，50，……所构成的数列的通項公式是$2n^2$；由此很容易得出数列：3，9，19，33，51，……的通項公式是$2n^2+1$。

例2．求数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{17}{16}$，$\frac{31}{32}$，$\frac{65}{64}$，…… 的通項公式。

可以先考虑数列的分子分母都相差1，有些是分子比分母大1，有些相反，于是可以把原数列改写成: $\left(1-\frac{1}{2}\right)$，$\left(1+\frac{1}{4}\right)$，$\left(1-\frac{1}{8}\right)$，$\left(1+\frac{1}{16}\right)$，$\left(1-\frac{1}{32}\right)$，$\left(1+\frac{1}{64}\right)$，……；

再与数列 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$-\frac{1}{32}$，$\frac{1}{64}$，……比較，就容易得出这个数列的通項公式是$1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$。用同样方法就很容易得出数列$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$1\frac{7}{8}$，$2\frac{1}{16}$，$1\frac{31}{32}$，$2\frac{1}{64}$，

……的通项公式是 $2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$。

例 3．求数列 $\frac{1\cdot3}{2\cdot4}$，$\frac{3\cdot5}{4\cdot6}$，$\frac{5\cdot7}{6\cdot8}$；$\frac{7\cdot9}{8\cdot10}$，……的通项公式。

可以先考虑各项分子第一个因数所构成的数列是一个奇数数列，它的通項公式是 $2n-1$；而第二个因数都比第一个因数多2，所以它的通項公式是 $2n+1$。再考虑各項的分母，第一个因数构成偶数数列，它的通項公式是 $2n$；而分母各項第二个因数都比第一个因数多2，所以它的通項公式是 $2(n+1)$。于是 $\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot2(n+1)}$是所求的通項公式。

例 4．求数列：$\frac{2}{27}$，$\frac{5}{81}$，$\frac{10}{243}$，$\frac{17}{729}$，……的通項公式。

可以先考虑各项分子所构成的数列：2，5，10，17，……中的各項較数列：1，4，9，16……中的对应項都多1；而各項分母所构成的数列：27，81，243，729，……可以写成3^3，3^4，3^5，3^6，……；而这些同底冪数的指数：3，4，5，6，……分别較数列：1，2，3，4，……的对应項多2，于是 $\frac{n^2+1}{3^{n+2}}$就是所求的通項公式。

例 5．求数列 1，1，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{6}$……的通項公式。

这个数列很容易用二个表达式来表示它的通項公式，即

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (\text{当 } n \text{ 是奇数时})；\\[2ex] \dfrac{2}{n} & (\text{当 } n \text{ 是偶数时})。\end{cases}$$

但这个数列經过变形可以写成：$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{5}$，

$\frac{2}{6}$，……；各項分子所构成的数列：1，2，1，2，1，2，……；它的通項公式是 $[3+(-1)^n]\frac{1}{2}$；而各項分母所构成的数列；1，2，3，4，5，6，……的通項公式是 n，于是 $[3+(-1)^n]\frac{1}{2n}$ 就是所求的通項公式。

必須注意，例如数列1，－1，1，－1，1，……；它的通項公式有的写成 $(-1)^{n-1}$，有的写成 $(-1)^{n+1}$，前面一种写法，在邏輯上是有缺点的。因为当 $n=1$ 时，$n-1=0$，在指数概念还沒有扩張之前，$(-1)^0$ 的意义学生还沒有領会，所以这种写法应該摒棄不用而用第二种写法。等到指数概念扩張之后就不受此限制了。

教 学 建 議

（一）本单元授課三課时：

第一課时　数列的定义，已知数列的通項求它的前若干項。

第二課时　数列的分类。

第三課时　数列的通項公式。

（二）本单元所引入的一些概念，首先要通过联系实际的例子来启发学生求知的要求，再通过課本上所举的12个例子来說明。在教学时应描繪数軸上或平面上的点来表示数列中的項，以加强直观性。关于数列定义可根据課本上的定义講解。

（三）关于数列里各个数，就是它所在位置号数的函数，必須加以强調。这一点首先通过課本第（10）（11）（12）三个例子归納出来然后引伸到其余各个例子上去。

（四）給出数列通項公式以后，求它的前若干項，是一个很重要的練习，应指导学生在求出某些数列的前几項之后，要初步地观察出与这个数列的相应变量是怎样地变化着的。如再把所求出的几項描繪在数軸上或平面上，将更可以直观地看出它的变化情况。

（五）由已知数列的前若干項，要归納出这个数列的通項公式是一件困难工作。（在以后学习了等差数列、等比数列的通項公式以后可以减少一些困难）。尽管如此，对这部分教材布置适当深度而适量的习题是必要的。通过这样的練习，可以培养学生熟練地运用通項公式，而且能使学生对数列发展的趋势，作出一定程度上的正确估計，是具有教育意义的。

第二单元　等差数列（§75－§77）

教　学　目　的

（一）在学习数列的基础上，使学生明确等差数列的定义，掌握它的通項公式及前 n 項和的公式，并能应用公式，列方程解决实际問題，把列方程解方程的技能再提高一步。

（二）培养学生观察、分析、发現事物发展規律和解决問題的能力。

（三）介紹我国古算家在等差数列上的成就，进行爱国主义教育。

教 材 研 究

（一）教材內容及重点：

本单元的主要內容是等差数列的定义、公式及应用。等差数列与下一单元学习的等比数列，是数列中比較特殊的二种，它在生产上和日常生活中，应用也較普遍，因此在学生掌握等差数列的概念后，必須联系实际，重点研究它的通項与前 n 項和的公式的导出与应用，尤其要注意培养学生求首項、公差的熟练技巧。

（二）教材系統：

1. 在学生掌握数列概念的基础上，引入等差数列的定义，导出公式，以加深学生对数列的理解。

2. 应用公式，列方程，解决实际問題。

（三）教材說明：

1. 等差数列的定义：（§75）

观察数列：

（1）11，13，15，17，19，……；

（2）8，4，0，-4，-8，……；

（3）1，$1+\sqrt{2}$，$1+2\sqrt{2}$，$1+3\sqrt{2}$，$1+4\sqrt{2}$，……；

可以看出，它們具有共同的組成規律，即从第二項起，每一項与它的前面一項的差都相等，都等于某一个常量。如：

$$13-11=15-13=17-15=19-17=\cdots\cdots=2;$$
$$4-8=0-4=-4-0=-8-(-4)=\cdots\cdots=-4;$$
$$(1+\sqrt{2})-1=(1+2\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})$$
$$=(1+3\sqrt{2})-(1+2\sqrt{2})$$
$$=(1+4\sqrt{2})-(1+3\sqrt{2})=\cdots\cdots=\sqrt{2};$$

具有这种特性的数列，叫做等差数列，就是一个数列，從第二項起，每一項減去它的前面一項所得的差都相等（都等于某一个常量），那末这个数列叫做等差数列。这个常量，叫做等差数列的公差，通常用 d 表示。它是后項減去前項的差，不是前項減去后項的差。如（1）中 $d=2$，（不是 -2）；（2）中 $d=-4$，（不是 4）；（3）中 $d=\sqrt{2}$，（不是 $-\sqrt{2}$）。

如果 $d>0$，这个数列叫做**递增等差数列**；如例(1)，(3)；

$d<0$，这个数列叫做**递减等差数列**；如例(2)；

$d=0$，这个数列叫做**常数数列**；如 3，3，3，3，……。

因此一个等差数列是递增或递减完全由公差 d 的值是正負决定，从而我們还可以得到，等差数列各項的符号，沒有正負相間的，这說明在摆动数列中不会有等差数列存在。

2.等差数列的通項公式：（§76）

一个等差数列 a_1，a_2，a_3，a_4，……；的公差是 d，根据等差数列的定义，得到：

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_1+2d,$$
$$a_4=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

推出 $a_n=a_1+(n-1)d$，这就是**等差数列的通項公式**，根据这个公式，只要知道等差数列的首項 a_1 与公差 d，就可以写出这个数列的各項来。因此在应用时，往往要先求出 a_1 与 d。

但要注意，如果 a_1 与 d 在問題中都沒有給出，就要根据題意列出方程組来解决，例如：

已知等差数列的第 3 項是 -4，第 6 項是 2，求它的第10項，依題意列出方程組：

$$\begin{cases} a_1+2d=-4; \\ a_1+5d=2。\end{cases}$$

首先求出它的 a_1 和 d，再求 a_{10}，同时要注意：公式中 a_n 是第 n 項，n 是次序数，又是項数，因此 n 必須是正整数。

3.等差数列前 n 項和的公式：（§77）

从实际問題入手，引出求等差数列有限項的和的公式：

問題：要掘一口井，計划掘第一米深給工資 3 元，第二米給 5 元，这样継續，每米增加 2 元，如果掘一口十米深的井，要付出工資多少？

为了解决这个問題，就要求下面一个等差数列前10項的和 S_{10}；

即求：3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，的和

$$S_{10}=3+5+7+9+11+13+15+17+19+21 \qquad (1)$$

显然 $S_{10}=21+19+17+15+13+11+9+7+5+3 \qquad (2)$

(1)，(2)二列数中的各数完全相同，仅顺序相反。

3，5，7，9，……，21，是公差等于 2 的等差数列；

21，19，17，15，……，3，是公差等于-2的等差数列。

$$2S_{10}=24+24+24+\cdots\cdots 24=24\times 10。$$

所以 $S_{10}=\dfrac{24\times 10}{2}=120$。故知全工程要付出工資120元。

从这一例中，可以看出，与等差数列两端等距的二項的和等于首項加末項。

如果項数是奇数，它的中間一項本身与两端等距，因此，要把中間一項本身相加，它的和也等于首項加末項。

例如：等差数列：8，6，4，2，0－2，－4，中：

$8+(-4)=4$；$6+(-2)=4$；$4+0=4$；$2+2=4$。

用研究上一实例同样的方法，来研究等差数列：

a_1，a_2，a_3，……，a_n，……的前 n 項的和S_n。

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$；

即 $S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots\cdots$
$+[a_1+(n-1)d]$ (1)

显然$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots\cdots+a_1$；因为

a_n，a_{n-1}，a_{n-2}，……，a_1；是公差等于 $-d$ 的等差数列。所以 S_n也可以写成：

$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots\cdots$
$+[a_n-(n-1)d]$ (2)

(1)＋(2)得：

$2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots\cdots$
$+(a_1+a_n)=n(a_1+a_n)$；

得 $$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}。$$

因为$a_n=a_1+(n-1)d$，代入上式得：

$$S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}。$$

注意：（1）以上公式，（包括通項公式）只适用于項数有限的等差数列。

（2）解决問題时，往往是同时应用通項公式与求和公式；

同时要防止类似 $a_m+a_n=a_{m+n}$，$S_m+S_n=S_{m+n}$ 的錯誤。