江苏省五年制中学試用課本

数学分析

SHUXUEFENXI

第二册

江苏人民出版社

目　录

习　題

第十章　中値定理和泰劳公式

§1　积分中値定理

若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續，則在該区間上有最大値 M 和最小値 m（图1）．而且有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

成立.

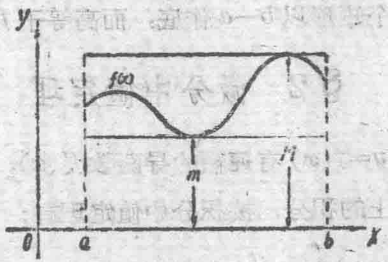

图 1

即　$m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leqslant M.$

根据閉区間上連續函数的性質Ⅱ、Ⅲ可以推得：在 a、b 之間必有一点 c，使　$f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$，

于是得：　$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)\quad (a < c < b).$　（1）

这样便得积分中值定理，它可以叙述如下：

如果函数$f(x)$在区間$[a,b]$上連續，那末，必有一点 c 存在$(a<c<b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

成立.

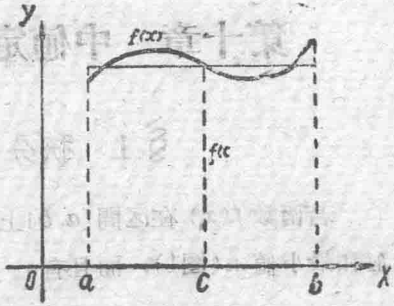

图 2

这个定理的几何意义是：总可以求得一个矩形，使其面积与曲綫$f(x)$在区間$[a,b]$上所构成的曲边梯形的面积相等，这个矩形以 $b-a$ 作底，而高等于 $f(c)$（图 2）.

§2 微分中值定理

假定函数 $y=f(x)$ 有連續的导函数 $f'(x)$，我們考慮 $f'(x)$ 在区間$[a,b]$上的积分. 按积分中值定理有：

$$\int_a^b f'(x)dx=f'(c)(b-a) \quad (a<c<b).$$

另一方面，根据牛頓——萊布尼茲公式，又有：

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a).$$

所以 $$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad (a<c<b) \tag{2}$$

或 $$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

这就是拉格朗日公式. 它可以这样叙述：

若 $y=f(x)$ 在区間$[a,b]$上具有連續的导函数 $f'(x)$，則在

区間$[a, b]$**内必有一点**c，**使**$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$**成立**. (*)这就是**拉格朗日定理**，也称**微分中值定理**.

这条中值定理具有簡单的几何意义. 因为$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$是連結曲綫$y=f(x)$上两点$A[a,f(a)]$和$B[b,f(b)]$的弦的斜率，$f'(c)$是曲綫在点c的切綫的斜率，所以拉格朗日定理的几何意义是：在每一点都有切綫的曲綫上，任意一条弦的两端点之間总可以找到一点，在这点的切綫和弦平行(图3).

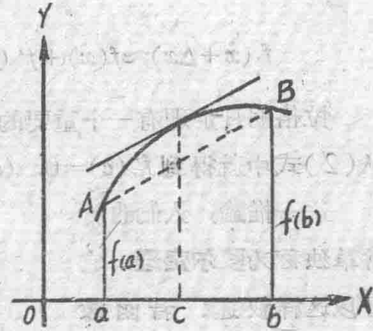

图 3

在公式(2)中，把$b-a$看做改变量Δx，$f(b)-f(a)$就是函数$f(x)$的对应改变量Δy，所以如果用x代替a，$x+\Delta x$代替b，ξ代替c，我們就得到：

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x \qquad (x<\xi<x+\Delta x).$$

即
$$\Delta y=f'(\xi)\Delta x.$$

因为 $x<\xi<x+\Delta x$，　所以 $0<\dfrac{\xi-x}{\Delta x}<1$，如果令 $\theta=\dfrac{\xi-x}{\Delta x}$，則$\xi=x+\theta\Delta x\ (0<\theta<1)$. 于是等式就成为：

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \qquad (0<\theta<1). \tag{3}$$

这里，虽然ξ是未知的，θ的数值也不确定，但有时却能

(*) 本定理可以在更弱的条件下成立，只要$f(x)$在(a, b)上連續，在(a, b)內可导，定理就能成立，这里我們不加証明.

把函数的改变量估計出来.

例如： $|\sin b-\sin a|=|\cos c|(b-a)\leqslant b-a$.

在近似計算中，有时用 $f(x)+f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ $(0<\theta<1)$ 来計算 $f(x+\Delta x)$，并常常取 $\theta=\frac{1}{2}$，这时：

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x.$$

拉格朗日定理有一个重要的推論：如果 $f(a)=f(b)$，那末，从（2）式中就得到 $f'(c)=0$ $(a<c<b)$.

这一推論，人們也常常单独称为**罗尔定理**. 它可以这样叙述：若函数 $y=f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上有連續的导数 $f'(x)$，且 $f(a)=f(b)$，那末，在区間 (a,b) 内必有一点 c 使得 $f'(c)=0$. 罗尔定理的几何意义是：在曲綫上两个同样高度的点之間，总可以找到一点，在这点的切綫平行于 X 軸(图 4).

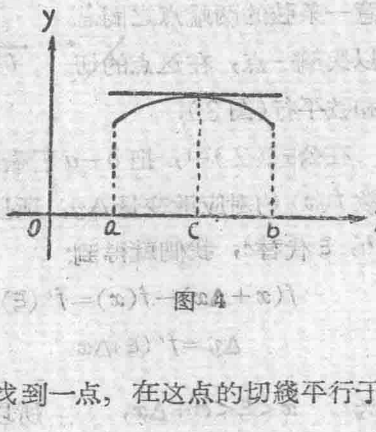

图 4

最后，我們将中値定理作一个推广：

如果函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上可导，并且 $\varphi'(x)\neq 0$，则有下式成立：

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\quad(a<\xi<b).\qquad(4)$$

这个定理称为哥西定理.

拉格朗日定理是哥西定理中 $\varphi(x)=\lambda$ 的特例.

例：　設 $f(x)=lg_{10}x$，导数是 $f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{ln10}$

$$=\frac{M}{x}\quad\left(M=\frac{1}{ln10}=0.43429\cdots\cdots\right).$$

于是由拉格朗日公式給出：

$$lg_{10}(a+h)-lg_{10}a=h\cdot\frac{M}{a+\theta h}\qquad(0<\theta<1)$$

或　$lg_{10}(a+h)=lg_{10}a+h\cdot\frac{M}{a+\theta h}$.

如果用微分代替改变量，得到近似公式：

$$lg_{10}(a+h)-lg_{10}a\approx h\cdot\frac{M}{a}$$

或　$lg_{10}(a+h)\approx lg_{10}a+h\cdot\frac{M'}{a}$.

比較由拉格朗日公式得到的准确等式与这个近似等式，可以看出誤差就是：$h\cdot\frac{M}{a}-h\cdot\frac{M}{a+\theta h}=\frac{\theta h^2M}{a(a+\theta h)}$.

設 $a=100$，　$h=1$，得近似等式：

$$lg_{10}101\approx lg_{10}100+\frac{M}{100}=2.00443\cdots\cdots$$

它具有誤差　$\frac{\theta M}{100(100+\theta)}$　$(0<\theta<1)$.

用 1 代替这分式分子中的 θ，用 0 代替分母中的 θ 之后，分式的值最大，因此可以說，这样算出的 $lg_{10}101$ 的值，誤差小于 $\frac{M}{100^2}=0.0000434\cdots\cdots$.

§3 洛必大法則

中值定理在求极限上也起了一定作用，我們有：

定理 如果函数$f(x)$、$\varphi(x)$在$x=a$时 $f(a)=0$、$\varphi(a)=0$;

并且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$. 那末，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=A$.

証：因为 $f(a)=\varphi(a)=0$，根据哥西定理得：

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\text{ (}\xi\text{在}x\text{和}a\text{中間)};$$

当 $x\longrightarrow a$ 时， $\xi\longrightarrow a$,

所以，
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=A.$$

这个定理也叫做**洛必大法則**.

例1： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

解： 令 $f(x)=\sin x$; $\varphi(x)=x$.

則 $f(o)=\varphi(o)=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

例2： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解： 令 $f(x)=e^x-1$. $\varphi(x)=x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1.$$

例3： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.（$b\neq 0$）

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

例4： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例5： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

有时必须連續应用洛必大法則，才能求出极限.

例6： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

§4 无穷小和它的阶

现在我們来介紹“无穷小”和“无穷小的阶”这两个概念.

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, 那末函数 $f(x)$ 在点 a 附近称为**无穷小.**

例如: $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\lg(1+x)$, $1-\cos x$, e^x-1 等都是在 $x=0$ 附近的无穷小.

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$, 那末, 函数 $F(x)=f(x)-c$ 在 $x=a$ 附近是一个无穷小.

如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处連續, 那末, 函数 $F(x)=f(x)-f(x_0)$ 在 $x=x_0$ 附近是个无穷小.

如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 那末函数 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ 在 $x=x_0$ 附近是一个无穷小.

因此, 无穷小总与极限同时出现. 不过, 极限是对原有的函数 $f(x)$ 說的, 而无穷小却是对另一个函数 $F(x)=f(x)-c$ 說的.

如果有若干个函数在 $x=a$ 附近都是无穷小:

$$\lim_{x\to a} f(x)=0, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x)=0, \quad \lim_{x\to a} \psi(x)=0.$$

那末, 它們的和、差、积都是无穷小, 但是它們的商却未必是无穷小.

例如: x, $\sin x$, x^2 在 $x=0$ 附近都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=0.$$

这就引出所謂无穷小的阶的問題.

設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$,

并且 $k\leqslant\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|\leqslant l\ (k\neq 0)$ 則我們說在点 a 附近,

$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是**同阶无穷小**,記做 $f(x)=O[\varphi(x)]$.

显然,当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=b\ (b\neq 0)$ 时,$f(x)=O[\varphi(x)]$.

例如:在 $x=0$ 附近 $\sin x$ 与 x; $1-\cos x$ 与 x^2; e^x-1 与 x 都是同阶无穷小.

特别地,如果 $b=1$,我們称 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是**等价无穷小**. 用下面符号表示:

$$f(x)\sim\varphi(x).$$

例如: 在 $x=0$ 附近,

$$\sin x\sim x, \qquad e^x-1\sim x.$$

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$,

并且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=0$,

則我們說在点 a 附近 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的**高阶无穷小**.

記作 $\varphi(x)=o[f(x)]$.

例如在等式 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\eta\,\Delta x$ 中,如果 $f'(x_0)\neq 0$,那末,由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x+\eta\,\Delta x}{\Delta x}=f'(x_0),$$

因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x+\eta\Delta x}{\Delta x}=f'(x_0)=0.$$

即 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\eta\Delta x}{\Delta x}=0.$$

所以我們說，$\eta\Delta x$ 是 Δx 的高阶无穷小.

§5 方程的近似解法

方程 $y=f(x)=0$ 的根 $x=c$，就是曲綫 $y=f(x)$ 与 X 軸的交点 C 的横坐标. 方程根的真值有时不能求出，因此就要研究方程的近似解法，求出根的近似值.

如果 $f(a)\cdot f(b)<0$，那末，曲綫 $y=f(x)$ 的两个端点 $A[a, f(a)]$ 及 $B[b, f(b)]$ 分别在 X 軸的两旁，从图 5 中可以看出通过点 A 的切綫 AT 与 X 軸的交点的横坐标 a' 是方程 $f(x)=0$ 的根的一个近似值.

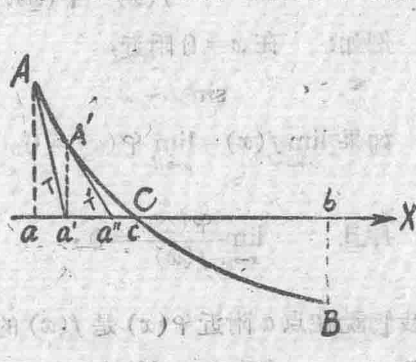

图 5

而切綫 AT 的方程是

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

令 $y=0$,

得

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}=a'.$$

在图 5 中还可以看出，从横坐标为 a' 的点作 X 軸的垂綫与曲綫 $f(x)$ 交于 A'，再从 A' 作曲綫 $f(x)$ 的切綫 $A'T'$，$A'T'$

与 X 軸的交点的横坐标

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}$$

也是方程 $f(x)=0$ 根的一个近似值，而且比 a' 更精确．用这种方法継續做下去，就得到一列数值 $a', a'', a''', \cdots\cdots$，它們越来越接近根的眞值 c．

从图 5 中我們还可以看到，如果从点 B 作切綫，则它与 X 軸的交点的横坐标就不能很好的表示方程 $f(x)=0$ 的根．因此用上面方法来求方程根的近似值的时候，要注意点 A 或点 B 的选择．

现在来看如何选择点 A 和点 B：

从图 6 和图 7 中，可以知道：

如果在弧 AB 上，$y' \cdot y'' < 0$ 則选取左端点 A．

比如：以图 6 而論，$y' > 0$ 說明 $f(x)$ 是遞增的，$y'' < 0$ 說明 $f(x)$ 的图象是向上凸的．另一方面，因为 $y'' < 0$，說明 y' 是遞減的．这样，从点 A 沿 X 的遞增方向，AC 上各点的斜率遞減，那末，切綫与 X 軸的交点就越来越靠近 C．故选择左

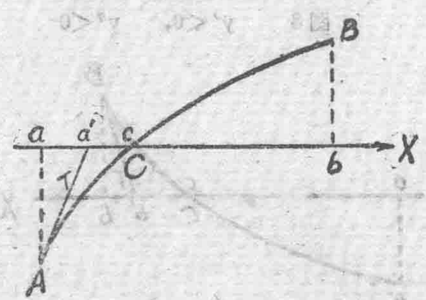

图6　$y' > 0$，　$y'' < 0$

端点A.

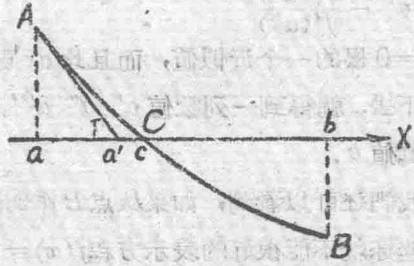

图 7　　$y'<0$,　　$y''>0$

从图 8 和图 9 中，可以知道：

如果　$y'\cdot y''>0$，則选取右端点B.

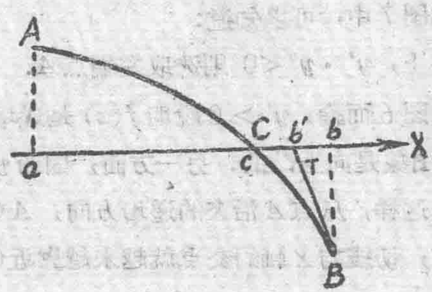

图 8　　$y'<0$,　　$y''<0$

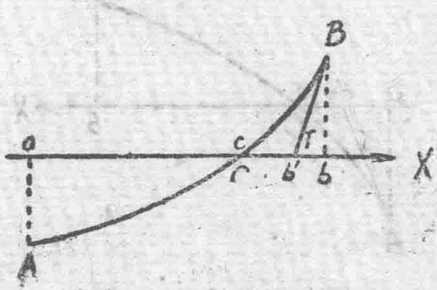

图 9　　$y'>0$,　　$y''>0$

如果 $y''=0$. 此法不适用.

例: 求方程

$f(x)=x+\ln x-2=0$ 在区間 $[1, e]$ 上的近似根.

解: 因为在区間 $[1, e]$ 上有:

$f(1)=-1<0$, $f(e)=e-1>0$.

故此方程必有一根介于 1 及 e 之間.

因为在 1 与 e 之間,

$$y'=f'(x)=1+\frac{1}{x}>0, \quad y''=f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0, y'.$$

$y''<0$. 所以取左端点 1 作为起点.

由于 $f(1)=-1$, $f'(1)=2$, 于是一次近似根:

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=1.5.$$

再用上面的方法可以求得二次近似根:

$$a''=a'-\frac{f(a')}{f'(a')}\approx 1.5-\left(\frac{-0.092}{1.667}\right)\approx 1.5+0.056=1.556.$$

§6 多項式的泰劳公式

如果要把多項式 $P(x)=5+11x-2x^2+x^3$ 展开成 $(x-1)$ 的多項式, 即写成下面形式:

$$P(x)=A_0+A_1(x-1)+A_2(x-1)^2+A_3(x-1)^3,$$

怎样来确定系数 A_0, A_1, A_2, A_3 呢? 为此,

求 $P(x)=A_0+A_1(x-1)+A_2(x-1)^2+A_3(x-1)^3$

在 $x=1$ 处的各阶导数: