

大學用書

微分幾何學

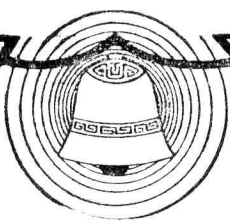
蘇步青著

正中書局印行

大學用書
微分幾何學
蘇步青著



正中書局印行



版權所有
翻印必究

中華民國三十七年五月初版

微分幾何學

全一冊 定價國幣壹拾陸元肆角

(精裝本定價另加五元)

(外埠酌加運費滙費)

著	者	蘇	步	青
發	行	人	蔣	澄
印	刷	所	正	中
發	行	所	正	中

書局

(2223)

校整
：自謙

序

本書係集著者民國二十年至三十六年在國立浙江大學所授之講義而成，其間曾屢改增補五六次之多，記號務求簡易，行文務求淺近。參考英、美、德、法、意、日、諸國幾何學者名著不下十冊，所收習題較難者加以星號，並附原著者姓名及年份，俾讀者可獲查考之徑路。

微分幾何學一門佔數學之一重要地位，尤以近年相對論電機學等方面需要絕對微分學殊殷，該學之運算與夫空間概念之推廣殆有不可分離之勢。故本書內特添一節 (§25)，作為導引。茲當國內高等數學參考書缺乏之際，本書如能有助於教學研究，亦著者之榮也。自愧學識謏陋，雖經十六年間之刪補，而錯誤之處仍應不免，尚祈海內學者教而正之。

吳俊傳、金福臨、楊忠道三學士協助本書校對，且楊君為繪插圖，對於三君特申謝意。正中書局總編輯吳士選先生多方協理本書出版，尤深感激。

民國三十六年六月蘇步青誌於杭州浙大。

目 次

緒 論

第一章 曲線論

§1. 撓曲線之解析表示	3
1. 切線 2. 曲線弧 3. 曲率 4. 密切平面	
習 題	
§2. Frenet 公式	12
習 題	
§3. 自然方程式	19
1. 基本定理 2. 存在定理	
習 題	
§4. 歸範展開, 活動三脚形	27
1. Bouquet 公式 2. Cesàro 恆等條件	
習 題	
§5. 密切圓, 密切球	36
習 題	
§6. 曲線弧長之第一變分	40

§7. 平面曲線, 等周問題... .. 43

1. 平曲線

習 題

2. 卵形線 3. 等周問題

[i] Crone 及 Frobenius 定理

[ii] Hurwitz 之證明

§8. 特殊撓曲線 57

1. 一般螺線 2. Bertrand 曲線 3. Mannheim 曲線

§9. 極小曲線 66

1. 自然參數 2. 基本定理 3. 極小曲線之方程式

習 題

§10. 包括性之微分幾何學 74

1. 四頂點定理 2. Fenchel 定理

習 題

§11. 可展曲面... .. 81

1. 直紋面 2. Cesàro 曲線 3. 縮閉線及伸開線

習 題

§12. Darboux 方法... .. 88

總 習 題

第二章 曲面論

§13. 基本形式... .. 96

1. 第一基本形式, 曲面線素 2. 曲面法線及切平面 3. 第二基本形式

習 題

§14. 極小曲線, 主切曲線 ... 105

1. 極小曲線 2. 主切曲線 3. 共軛曲線網

§15. 曲面上一曲線之曲率 ... 111

1. 法曲率 2. Meusnier 定理 3. 總曲率, 平均曲率 4. Euler 定理,
Dupin 標形

習 題

§16. 曲率線 ... 118

1. 曲率線之新定義 2. Darboux 定理 3. 曲率線之又一定義

習 題

§17. 測地撓率 ... 130

習 題

§18. 二曲面間之保角表示 ... 135

1. 保角表示 2. 地圖製法 3. Liouville 定理

習 題

§19. Gauss 之球面表示 ... 150

1. 第三基本形式 2. Gauss 定理 3. Beltrami-Enneper 定理

習 題

§20. Beltrami 之微分參數 ... 155

1. 代數學之一定理 2. Beltrami 之第一階微分參數 3. Beltrami
之第二階微分參數

§21. 測地線 ... 165

1. 測地線之定義 2. 測地曲率 3. 測地線座標 4. O. Bonnet 公式

5. Liouville 公式 6. 求測地線之 Darboux 方法

習 題

§22. 二曲面間之測地線表示... .. 182

1. Beltrami 定理 2. Dini 定理

習 題

§23. 曲面上之幾何學 193

1. Gauss 曲率 K 2. 測地線 3. 關於測地線三角形之 Gauss 定理
4. 測地線離差 5. Gauss-Bonnet 公式 6. Levi-Civita 之平行移動概念

習 題

§24. 定總曲率之曲面及非歐幾何學 217

1. Poincaré 上半平面之表示 2. 非歐幾何學

習 題

§25. 絕對微分學 230

1. 小史 2. 張量 3. 測地線之微分方程式 4. Levi-Civita 之平行移動
5. Christoffel 之共變微分 6. Riemann 之曲率張量 7. 沿一
微小平行四邊形之循環移動

習 題

§26. 曲面論基本方程式... .. 257

1. 關於曲面線素之 Christoffel 記號 2. 基本微分方程式 3. 積分可能條件

習 題

§27. 基本定理... .. 269

習 題

§28. 曲面變形論 ... 275

1. 定義 2. 變形論第一問題 3. 變形論第二問題

習 題

§29. 極小曲面... 294

1. 小史 2. Weierstrass 公式 3. Schwarz 公式 4. 附屬極小曲面
5. 單面極小曲面 6. Plateau 問題 7. 曲率線皆為平曲線之極小曲面

習 題

§30. W 曲面 ... 326

1. 定義及基本量 2. W 曲面之一特徵

習 題

§31. 從運動學討論曲面之方法 ... 335

1. 運動學初步公式 2. 應用 3. 曲率線, 法曲率, 測地曲率及 Laguerre
定理 4. 曲面之基本方程式 5. Beltrami 定理及 Bonnet 定理

總 習 題

第三章 線彙論

§32. 直紋面 ... 359

1. 諸重要原素 2. 諸定理 3. 關於直紋面變形之 Minding 研究 4.
關於直紋面變形之 Beltrami 研究 5. Bonnet 定理

習 題

§33. 直線彙之 Kummer 表示法 ... 373

1. 小史 2. Kummer 之基本形式 3. Malus 及 Dupin 定理

§34. 直線彙之附屬原素... 378

1. 可展曲面 2. 二葉焦曲面及中點曲面 3. 極限點

§35. Sannia 之理論 387

1. Sannia 之基本形式 2. 基本定理

習 題

§36. Study 之推移原理 396

1. 對偶數與直線座標 2. 對偶點與 Sannia 基本形式

習 題

§37. 導來直線彙 402

1. 定義 2. 解析表示

習 題

§38. 主要曲面及可展曲面之球面表示 407

1. 主要曲面 2. 可展曲面

§39. 極小線彙 410

1. 定義 2. 極小直線彙之性質

§40. Guichard 直線彙 415

1. 定義 2. Guichard 彙與 Voss 曲面

§41. W 直線彙 419

1. 定義 2. Lelievre 公式 3. W 直線彙之決定

§42. 圓彙及曲線彙 425

1. Ribaucour 定理 2. 法圓彙 3. 擬球及法圓彙

總 習 題

緒 論

依 F. Klein (1872) 之定義，可用幾何學變換羣而作幾何學分類。詳言之，已知一幾何學變換羣 G 時，在此羣下研究圖形不變性質，稱為屬於 G 之幾何學。

幾何學之研究對象當為圖形。然依所論之圖形性質，可分作二種論之。第一種乃關於圖形所具之有限性質。例如，決定一直線與一圓錐曲線之交點問題屬於此種，以所求之交點係依曲線與直線整個所決定故也。第二種乃關於圖形之微小性質。例如，在一曲線之一點引曲線之切線問題，此切線僅係依曲線在切點之第一階近傍所決定，而與曲線其他部分之更改毫無關係。此種研究應屬於微分幾何學。

因微分幾何學為研究圖形在其原素近傍之性質時所發展之一科，故必須應用函數及其微分，於是亦應用積分。此即古來 Euler (1744), Monge (1807), Lagrange (1813), Cauchy (1826) 等應用微積分於曲線、曲面研究之濫觴，亦為微分幾何學之發端。然斯學之具系統方式，端賴 C. F. Gauss (1826) 之努力。十九世紀幾何學大家如 Ossian Bonnet, Sophus Lie, E. Beltrami, E. Cesàro, J. Weingarten, G. Darboux 等對於微分幾何學皆有相當貢獻。委細參看 Knoblauch 著 *Grundlagen der Differentialgeometrie* (Leipzig, 1913)。

然從 Klein 之分類法觀之，此古典分科當屬於運動羣，故有運動幾何學或初等微分幾何學之稱。倘以別一基本羣替換之，則當可獲得別種微分幾何學。此乃二十世紀以來之一新發展。例如，G. Fubini (1916) 之射影微分幾何學、W. Blaschke (1916) 之遠交微分幾何學、G. Thomsen 及 W. Blaschke (1923) 之保角微分幾何學等皆係遵沿 Klein 之遠大計畫所生成。

就上所述，所論基本羣雖有不同，然圖形所在之空間為普通空間，或更推廣之 n 元歐氏空間。至 1854 年 B. Riemann 出而擴充歐氏空間為更普遍空間，即現代通稱為黎曼流幾何學者是也。繼之，G. Ricci-Curbastro (1900) 有絕對微分學之發見，A. Einstein (1916) 首先應用於相對論，翌年 (1917) 遂有 T. Levi-Civita 之平行概念，微分幾何學至此，竟獲長足之發展。J. A. Schouten (1924) 最初發見數十年來 Klein 分類法之缺點，而有所改善。現代所行之聯絡論乃黎曼流幾何學之更推廣。委細參考 D. J. Struik 著 *Theory of linear connections* (1934)。

由是觀之，初等微分幾何學乃一陳舊分科，自不待言，然其為現代微分幾何學之基礎無可容疑。其間所用於研究之工具大部分為微積分學，但吾人須知研究目標為幾何學而非解析學，故務必省略無謂演算而重視幾何學意義。

尤堪注意者，近年來實函數論異常發達，將此方面思想應用於微分幾何學，冀其改進而至於推廣，大有其人，殊未容忽視之舉也。

第一章 曲線論

§1. 撓曲線之解析表示

設 x, y, z 為一點之直交座標. 對於座標軸之正方向有下列規定. 即當吾人頭朝 z 軸正向且面向 x 軸正向時, y 軸正向在右邊 (參照圖 1).

若一點 P 之座標 x, y, z 皆為同一參數 t 之函數, 即

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad (1)$$

則因 t 之變動, 點 P 所畫之軌跡稱為一空間曲線或撓曲線. 其逆, 已知一撓曲線時, 可表示其上任何一點之座標為形式 (1) 之方程式. 因之, (1) 稱為此

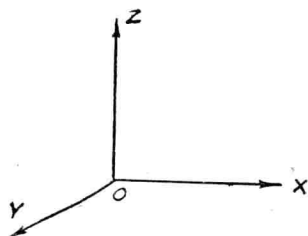


圖 1.

曲線之解析表示. 以後假設三函數 $x(t), y(t), z(t)$ 之第一、第二、第三階導數存在而為 t 之連續函數. 簡言之, 所論之曲線屬於級 C''' .

例 1. 設一直角三角形紙片之一銳角為 θ . 今將此紙捲於一圓柱上使角 θ 之一邊合於圓柱之一法截圓, 求其他一邊所捲成之曲線.

以圓柱軸為 z 軸且取 x, y 二軸如圖 2, 則易知所求曲線之解析表示

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = at \tan \theta,$$

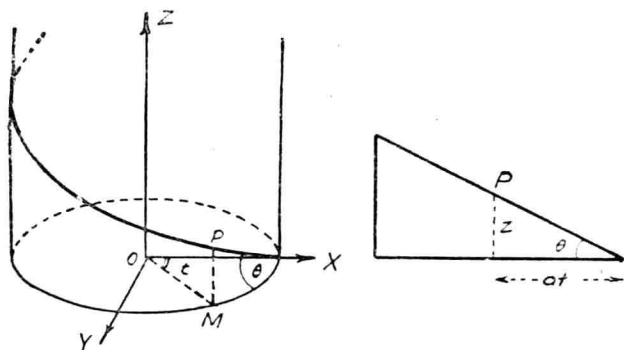


圖 2.

式中 a 乃圓柱之半徑. 此曲線稱為螺線.

例 2. 設一曲線(1)在一定平面上, 證明其充要條件乃

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

但 $'$, $''$, $'''$ 表示一階二階三階導數.

證明. 設曲線(1)在一平面上, 則

$$ax + by + cz + d = 0,$$

式中 a, b, c, d 皆常數且 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. 關於 t 微分之,

$$\begin{aligned} ax' + by' + cz' &= 0, \\ ax'' + by'' + cz'' &= 0, \\ ax''' + by''' + cz''' &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

而 a, b, c 中至少有一不等於 0 者, 故知方程式(2)成立之必要性.

其逆, 若(2)成立, 則必有三函數 a, b, c 使(3)成立. 今微分(3)之

第一及第二方程式且依次化簡之，

$$a'x' + b'y' + c'z' = 0,$$

$$a'x'' + b'y'' + c'z'' = 0,$$

於是知 a', b', c' 必與行列式(2)關於第三列之三餘因子成比例，又從(3)亦知 a, b, c 有同一性質，故

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

今以 $\varphi'(t)$ 示其公值，且積分之，

$$a = a_0 e^{\varphi}, \quad b = b_0 e^{\varphi}, \quad c = c_0 e^{\varphi},$$

但 a_0, b_0, c_0 皆為常數。代入(3)之第一方程式，刪其非零因子 e^{φ} 且積分之，即知曲線(1)為一平曲線。

1. 切線 從一曲線(1)上取二點，設其參數值為 t 及 $t + \Delta t$ ，則二點連線之方向餘弦必與三數

$$x(t + \Delta t) - x(t), \quad y(t + \Delta t) - y(t), \quad z(t + \Delta t) - z(t)$$

成比例。然依平均值定理，

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta t \cdot x'(t + \theta_1 \Delta t),$$

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \Delta t \cdot y'(t + \theta_2 \Delta t),$$

$$z(t + \Delta t) - z(t) = \Delta t \cdot z'(t + \theta_3 \Delta t),$$

但 $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$ ，故方向餘弦之比又等於

$$x'(t + \theta_1 \Delta t) : y'(t + \theta_2 \Delta t) : z'(t + \theta_3 \Delta t),$$

於是連線之方程式為

$$\frac{\xi - x(t)}{x'(t + \theta_1 \Delta t)} = \frac{\eta - y(t)}{y'(t + \theta_2 \Delta t)} = \frac{\zeta - z(t)}{z'(t + \theta_3 \Delta t)}.$$

當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時, 若此直線有一極限位置, 則其方程式如次,

$$\frac{\xi - x(t)}{x'(t)} = \frac{\eta - y(t)}{y'(t)} = \frac{\zeta - z(t)}{z'(t)}, \quad (4)$$

式中 ξ, η, ζ 表示直線上一動點之座標. 如是所獲之直線稱為曲線在點 (t) 之切線.

倘在點 (t) 三導數 x', y', z' 皆取零值, 則在此點之切線無定. 此種點稱為曲線之奇異點, 須由討論範圍除外之.

2. 曲線弧 已知一曲線 C 之解析表示或方程式為(1)時, 須知此表示非僅因所參考之座標系統不同而更改, 且與參數之選擇亦有關聯之處. 換言之, 變更座標系統時, 點之直交座標當受直交變換, 即

$$\begin{aligned} x^* &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a, \\ y^* &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b, \\ z^* &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $a_{ik} (i, k=1, 2, 3)$; a, b, c 皆為常數且

$$\sum_{k=1}^3 a_{ki}^2 = 1 \quad (i=1, 2, 3); \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{ki} a_{kj} = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j=1, 2, 3).$$

此時方程式(1)當化為

$$x^* = x^*(t), \quad y^* = y^*(t), \quad z^* = z^*(t). \quad (1^*)$$

又對於一定座標系統更可變更參數 t 為 τ , 即

$$t=f(\tau), \quad (7)$$

於是 x, y, z 皆為 τ 之函數。故對於同一曲線，其表示方法則有無數。

然則應如何表示一撓曲線使與直交座標系統及參數之變換皆無關係。凡對於(5)不改之圖形性質稱為不變性質，而對於(7)不改者稱為本有性質。是則吾人所求於一撓曲線研究者乃不變而本有性質而已。

茲為決定曲線之一本有參數起見，取曲線 C 上之二點 (t) 及 $(t+\Delta t)$ ，且設其間距離為 Δs ，則

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 \{x'^2(t+\theta_1\Delta t) + y'^2(t+\theta_2\Delta t) + z'^2(t+\theta_3\Delta t)\}.$$

於是當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時， $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 之極限值當為

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}. \quad (8)$$

因之，曲線在其二點 (t_0) 及 (t) 間之弧長 s 等於

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (9)$$

對於參數變換(7)弧長 s 並不受影響，以

$$\sqrt{S\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{S\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2} d\tau \quad (10)$$

故也。式中記號 S 表示所含一項及更改 x 為 y, z 時所得之二項之和，即

$$S\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

其餘依此類推。例如