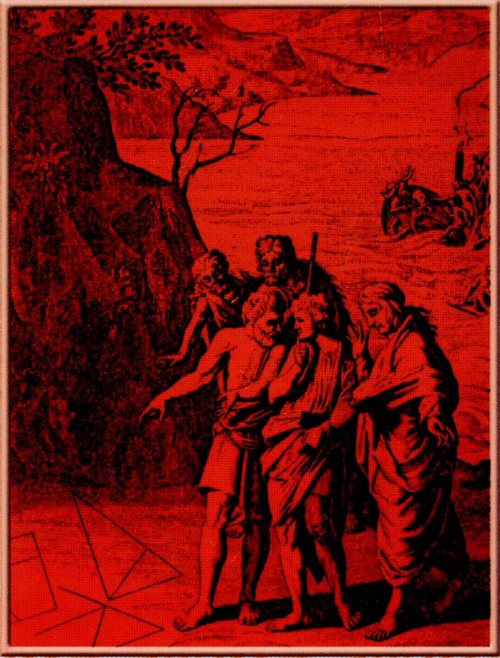
《数学中的小问题大定理》丛书（第三辑）

椭圆函数与模函数

——从一道美国加州大学洛杉矶分校（UCLA）博士资格考题谈起

刘培杰 宋明辉 编著



◎椭圆函数之应用

◎线性代换

◎模函数

◎阿贝尔的复形乘法

◎高斯求和与θ—函数

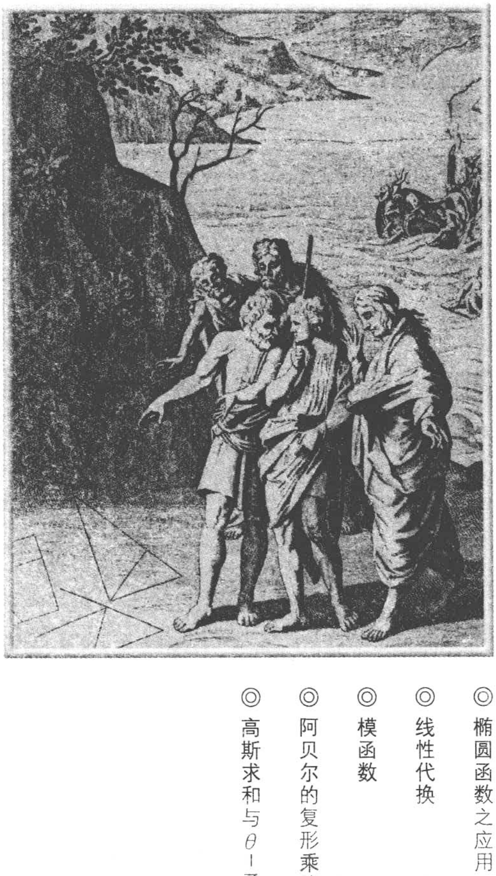
HITP
出版社

《数学中的小问题大定理》丛书（第三辑）

椭圆函数与模函数

——从一道美国加州大学洛杉矶分校（UCLA）博士资格考题谈起

刘培杰　宋明辉　编著



◎椭圆函数之应用

◎线性代换

◎模函数

◎阿贝尔的复形乘法

◎高斯求和与θ-函数

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考题谈起，详细介绍了椭圆函数以及模函数的相关知识. 全书共分为三章，分别为：椭圆函数、模函数、椭圆函数与算术学.

本书可供从事这一数学分支或相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

椭圆函数与模函数/刘培杰，宋明辉编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012. 10

ISBN 978-7-5603-3812-5

Ⅰ. ①椭… Ⅱ. ①刘…②宋… Ⅲ. ①椭圆函数②模函数 Ⅳ. ①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 234589 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张 佳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 13.5 字数 138 千字
版 次 2012 年 10 月第 1 版 2012 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3812-5
定 价 28.00 元

目录

椭圆函数

第1章

1.1 引　言

随着中国博士培养工程的突飞猛进，中国的博士毕业人数已居世界第二，仅次于美国，而且在可预见的时间内一定会稳居世界第一. 但随之而来的是质量开始下滑，这时大洋彼岸美国的博士培养模式开始受到关注. 一份美国加州大学洛杉矶分校（UCLA）博士资格考题走进高校学子的视野，以数学题目而论它涵盖广、有深度，足以检验出一名候选人的学术潜质和理论功底.

它分成以下几大方面：

一、代数：其中包括群论、环论、域论、线性代数.

二、实分析.

三、复分析.

四、几何拓扑：其中包括流形拓扑、代数拓扑.

本书仅选其中一题详细介绍其背景. 此题是1986年的试题.

题目　设 f 为具有周期 w_1, w_2 的椭圆函数，设 L 为格 $Z_{w_1}+Z_{w_2}$. 若 $a_1,\cdots,a_m(b_1,\cdots,b_n)$ 是 f 在基本平行四边形中的零点(极点). 试证

$$a_1+\cdots+a_m \equiv b_1+\cdots+b_n (\mathrm{mol}\ L)$$

此题是关于椭圆函数性质的问题，椭圆函数在历史上有两个来源：一是椭圆积分；二是椭圆曲线. 椭圆积分作为古典数学早已沉寂，但椭圆曲线因费马(Fermat)大定理和密码学的兴起而重新唤起人们对它关注的热情，所以椭圆函数又老树发新芽了.

关于椭圆函数历史上有若干著名数学家研究过，雅可比的名著《椭圆函数论新基础》是其经典. 1829 年，德国数学家雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851)出版了他的名著《椭圆函数论新基础》(Fundamenda nova theoriae functionum ellipticarum). 由于此书的出版，雅可比与阿贝尔共享了发现椭圆函数的盛誉，该著作是雅可比研究工作的总结，是椭圆函数论的重要经典著作.

椭圆函数论是 19 世纪数学家兴趣的中心点. 在雅可比和阿贝尔之前，高斯、欧拉、拉格朗日、勒让德等人曾经取得椭圆函数论中的许多关键性结果，但他们只考虑椭圆积分，雅可比和阿贝尔差不多同时有了从椭圆积分的反函数入手进行研究这一重要思想，从而开辟了通往今天椭圆函数论的道路. 雅可比椭圆的思想的发展主要体现在该著作中. 该书由两部分组成，第一部分主要处理椭圆函数的变换. 雅可比以第一类一般椭圆积分为起点，通过结合两种变换，得到了第一类椭圆积分的乘积这一漂亮结果. 之后，雅可比将反函数

$$\varphi = amu$$

引入椭圆积分

$$u(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}$$

中，这样就有

$$x=\sin\varphi=\sin amu$$

进一步引入

$$\cos amu=am(k-u)\quad\left(k=u\left[\frac{\pi}{2},k\right]\right)$$

$$\Delta amu=\sqrt{1-k^2\sin^2 amu}$$

(这些在今天分别被表示为 sn u，cn u 和 dn u)．建立了这些函数间的关系．此外，雅可比将虚数引入椭圆函数论，利用代换

$$\sin\varphi=\mathrm{i}\tan\varphi$$

建立了关系

$$\sin am(\mathrm{i}u,k)=\mathrm{i}\tan am(u,k')$$

模 k,k' 满足

$$k^2+k'^2=1$$

这样，他得到了椭圆函数的双周期性、零值、无穷值及在半周期上值的变化等结果．在第一部分的最后，雅可比发展了被所有变换模满足的三阶微分方程．《椭圆函数论新基础》的第二部分处理椭圆函数的表示，致力于将椭圆函数展开成各种无穷乘积和级数．他给出的椭圆函数 $\sin amu$，$\cos amu$，Δamu 的第一个表示是以无穷乘积商的形式引入函数

$$Z(u)=\frac{F'E(\varphi)-E'F(\varphi)}{F'}\quad(\varphi=amu)$$

之后，他处理第二类积分，第三类积分被化为第一类和第二类积分．函数

$$H(u)=H(0)\exp(\int_0^u z(u)\mathrm{d}u)$$

在他的椭圆函数中起了重要作用.第二部分另外的内容是将 $H(u)$ 这样的函数表示为无穷乘积和傅里叶级数,从而得到一些卓越的公式.最后,雅可比以椭圆函数论在数论中的应用的讨论结束全书.

此书出版后的多年中,雅可比继续了他在椭圆函数论方面的工作.他讲授椭圆函数论多年,以致他对这一课题的探讨成为函数论本身发展所遵循的模式.

如果把椭圆函数理论视为一座宏伟的数学大厦的话,那么有一些数学家从事的是打地基的工作,有些数学家是在建立框架,而更多的数学家则是在添砖加瓦添补细节.打地基的工作需要大师级的人物,如高斯、欧拉、阿贝尔之流;建立理论框架则需要顶级数学家的参与,如拉格朗日、勒让德、雅可比、魏尔斯特拉斯等人;而大量添加细节的工作则是由许许多多还不那么知名的各国数学家去完成.在早期的数学大国,如英国、法国、德国的浩如烟海的典籍之中,可以发现大量我们现在早已遗忘的人,如德斯佩鲁(Despeyrous Thé-odore,1815—1883),法国数学家,生于博蒙一德洛马涅(Beaumont-de-Lomagne),卒于图卢兹(Toulouse),学于图卢兹和莱克图尔(Lectoure).曾任第戎(Dijon)学院教授,著有《椭圆函数》(Surles functions elliptiques).

本书限于篇幅只能择其要点略加介绍.

1.2　二重周期函数及椭圆函数之通性

1.2.1　周期函数及其级数展开

设 ω 为一个实数或复数. 如单值解析函数 $f(z)$ 无论对 z 之何值皆适合下式

$$f(z+\omega)=f(z)$$

则 $f(z)$ 称为周期函数，而 ω 称为此函数 $f(z)$ 的周期. 例如 $\sin z$，$\cos z$ 为以 2π 为周期的函数；$\tan z$，$\cot z$ 为以 π 为周期的函数；而 e^z 为以 $2\pi i$ 为周期的函数. 由这些函数的图象研究得知这些函数的周期将其存在区域划分为若干周期地带. 兹再就其一般情况研究之.

在 z 平面中标出代表 ω 之点，并在通过原点及 ω 点之无限直线的两端分别截取与 $|\omega|$ 等长的线段各若干次，得

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \cdots, n\omega, \cdots$$

诸点及

$$-\omega, -2\omega, -3\omega, \cdots, -n\omega, \cdots$$

诸点. 由此诸点及坐标原点在任一方向，作与 $O\omega$ 不平行的诸平行线，则此平面被划分为无限个等宽的带状区域(图 1).

若由一任意 z 点作与 $O\omega$ 平行之直线，则在 $z+\lambda\omega$ 式中令实数 λ 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 即得此直线的各点. 如此 z 点作第一带状区域 $AA'BB'$，则其在第二带状区域内之对应点 $z+2\omega$ 作第二带状区域 $BB'CC'$，其在第三带状区域内之对应点 $z+2\omega$ 作第三带状区域，……. 由于函数 $f(z)$ 有周期性，故其在各带状区域内之同位点上之值皆为相等.

设 LL' 与 MM' 为平行 $O\omega$ 之两条无限直线

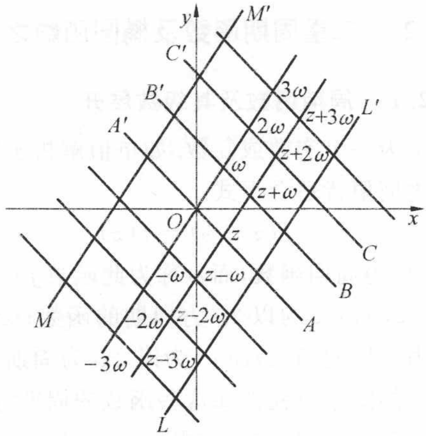


图 1

(图 1)，并设 $u=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i z}{\omega}}$. 当 z 作 LL' 与 MM' 两平行线间之无限带状区域时，u 在其平面中亦作一区域. 兹将此区域求之. 如 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 为 LL' 上的一点，则在 $\alpha+\mathrm{i}\beta+\lambda\omega$ 式中令实数 λ 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 即得此直线上的所有点. 因此

$$u=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega}(\alpha+\mathrm{i}\beta+\lambda\omega)}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{\omega}}$$

而当 λ 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时，u 作以原点为心之 C_1 圆. 同理，当 z 作 MM' 直线时，u 作另一以原点为心之 C_2 圆. 故若 z 作此两条直线间之无限带状区域，则 u 作此两圆间之环状区域(图 2). 但对此无限带状区域内任一点在此环状区域内则只有一 u 点与之相应；相反的，对此环状区域内任一点在此无限带状区域内则有无限个 z 点与之相应，而此无限个 z 值作成以 ω 为公差的等差数列.

在 LL'，MM' 两平行线间之无限带状区域内为正

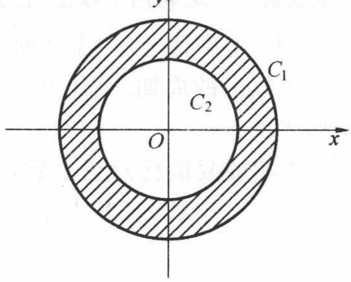


图 2

则，而以 ω 为周期之函数 $f(z)$ 可与 C_1，C_2 两圆间之环状区域内的正则函数 $\varphi(u)$ 相等. 因对 u 之一值虽有无限个 z 值与之相应，但 $f(z)$ 对此无限个 z 值则只有一值，而且若 u_0 与 z_0 为相应的两值，则当 u 趋于 u_0 时，趋于 z_0 的 z 在 u_0 邻近为 u 之正则函数，反之亦然. 因此，此函数 $\varphi(u)$ 在此环状区域内可用罗朗公式展为

$$\varphi(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m u^m$$

将 u 为 z 之式代入，即得此周期函数 $f(z)$ 在所设无限带状区域内之展开式

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \mathrm{e}^{\frac{2m\pi i z}{\omega}} \tag{1}$$

此即傅里叶之展开式.

如此函数 $f(z)$ 在全 z 平面中为正则，则可设此两直线 LL'，MM' 无限分离.

由此即得定理如下：

所有周期整函数都可展为 $\mathrm{e}^{\frac{2m\pi i z}{\omega}}$ 之正负幂级数，且对 z 之有限值为收敛.

1.2.2 单值解析函数有两个以上的周期之不可能

用雅可比定理[①]或黎曼定理[②]都可证明单值解析函数不可能有两个以上的周期. 兹将其不可能有三个周期的情况证明之.

设 a,b,c 为或实或复的任意三个数,并设 m,n,p 为或正或负的任意三个整数,且其中至少有一个整数不为零. 除

$$m=0, n=0, p=0$$

外,如令 m,n,p 有一切可能之值,则 $|ma+nb+pc|$ 的下限等于零.

设(E) 为表达 $ma+nb+pc$ 之点的集合. 如其与两组不同整数(m,n,p),(m_1,n_1,p_1) 相应的点重合,则

$$ma+nb+pc=m_1a+n_1b+p_1c$$

或

$$(m-m_1)a+(n-n_1)b+(p-p_1)c=0$$

其中 $m-m_1$, $n-n_1$, $p-p_1$ 至少有一个不为零. 在此特殊情形中,以上定理极为显明. 如(E) 之各点都是分立的,并令 2δ 为 $|ma+nb+pc|$ 的下限,则 2δ 亦为(E) 中任意两点距离的下限,因为此两点 $ma+nb+pc$ 与 $m_1a+n_1b+p_1c$ 的距离等于

$$|(m-m_1)a+(n-n_1)b+(p-p_1)c|$$

兹证明此数 δ 不能大于零.

设 N 为一正整数,并令 m,n,p 有以下各值

$$-N,-(N-1),\cdots,-1,0,1,\cdots,N-1,N$$

---

① Jacobi, Ges. Werke, Ⅱ. 1882:25－26.

② Riemann, Ges. Math. Werke, 1892:294.

将 m,n,p 的各值就可能情况组合之，则得(E)的$(2N+1)^3$ 个点，按假设此各点都是分立的. 设 $|a| \geqslant |b| \geqslant |c|$，则由原点至$(E)$的各点中之任一点的距离最大等于 $3N|a|$. 故各点位于以原点为心，以 $3N|a|$ 为半径的 C 圆内或位于 C 圆上. 如以各点中的每点为心作以 δ 为半径之圆，则此各圆皆位于以原点为心，以 $3N|a|+\delta$ 为半径的 C_1 圆内，而没有相重叠的，因为它们两圆心的距离都不能小于 2δ. 故此各小圆的面积之和小于 C_1 圆的面积(图3)，而得

$$(3N|a|+\delta)^2 > (2N+1)^3\delta^2$$

或

$$\delta < \frac{3N|a|}{(2N+1)^{\frac{3}{2}}-1}$$

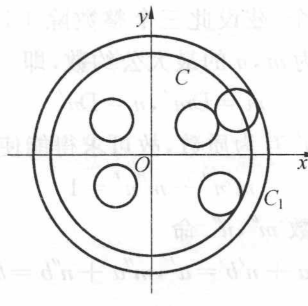


图3

当 N 变为无限时，此式的右端趋于零，故此不等式的存在对 N 的各值来说不能使任意正数 δ 适合. 换言之，即 $|ma+nb+pc|$ 的下限不能为正数，因而其下限等于零. 定理得证.

由此定理可知：如无适合 $ma+nb+pc=0$ 之整数 $m,n,p(m=n=p=0$ 除外)，则恒可求得能使 $|ma+$

$nb+pc|$ 小于任一正数 ε 之 m,n,p. 在此种情形中单值解析函数 $f(z)$ 不能有三个独立周期 a,b,c. 因若令 z_0 为 $f(z)$ 的正则点，并以 z_0 为心，以 ε 为半径作圆，则 ε 之小可使 $f(z)=f(z_0)$ 在此圆内除 $z=z_0$ 外不能有其他之根. 如 a,b,c 为 $f(z)$ 之周期，则 $ma+nb+pc$ 对于整数 m,n,p 之各值亦为 $f(z)$ 之周期，故得

$$f(z_0+ma+nb+pc)=f(z_0)$$

然若 m,n,p 的选择适合 $|ma+nb+pc|<\varepsilon$，则方程式 $f(z)=f(z_0)$ 于 z_0 以外将有适合 $|z_1-z_0|<\varepsilon$ 之根 z_1，此乃不可能之情形.

当 m,n,p 三个整数不同时为零而 a,b,c 适合

$$ma+nb+pc=0 \tag{2}$$

时，单值解析函数虽可以 a,b,c 为周期，但此周期化为两个或化为一个. 兹设此三个整数除 1 以外无其他公约数，并设 D 为 m,n 的最大公约数，即

$$m=Dm',n=Dn'$$

因此两数 m',n' 互为质数，故可求得能使其适合

$$m'n''-m''n'=1$$

之其他两个整数 m'',n''. 命

$$m'a+n'b=a',m''a+n''b=b'$$

即得

$$a=n''a'-n'b',b=m'b'-m''a'$$

如 a,b 为 $f(z)$ 之周期，则 a',b' 亦为 $f(z)$ 之周期. 故可以 a',b' 两个周期代 a,b 两个周期，因而式(2) 变为

$$Da'+pc=0$$

D 与 p 即互为质数，故可另求得适合

$$Dp'-D'p=1$$

之两个整数 D' 与 p'. 命

$$D'a' + p'c = C'$$

即得

$$a' = -pc',c = Dc'$$

由此可见,此三个周期 a,b,c 为此两个周期 b',c' 之线性组合.

注　茹利亚对雅可比的这个定理曾作更深之研究.他在“$ma+nb+pc$ 点在复平面中之分布”论文中得有两种可能情形:

(1) 此点可分布在全平面中,而且在此平面的各任意小部分内可有无限个;

(2) 此点可分布在无限条等距平行直线上,而且在此直线的任意一条之各线段上可有无限个.

1.2.3　单值解析函数的两个周期之比不能为实数

在前节中已证明单值解析函数不能有两个以上的周期,兹证明此两个周期之比不能为实数.

设 α,β 为两个实数,m,n 为任意两个整数,其中至少有一个整数不为零,则 $|m\alpha+n\beta|$ 之下限等于零.因若令

$$a=\alpha,b=\beta,c=\mathrm{i}$$

则 $ma+nb+p\mathrm{i}$ 之模只可当 $p=0$,$|m\alpha+n\beta|<\varepsilon$ 时小于一数 $s<1$.因此,单值解析函数 $f(z)$ 不能有两个独立实周期 α 与 β.

设 α,β 不皆为实数.如 $\frac{\beta}{\alpha}$ 之比为无理数,则可求得适合 $|m\alpha+n\beta|<\varepsilon$ 之两个整数 m,n 来适合以上的定理;如 $\frac{\beta}{\alpha}$ 之比为有理数,且等于不可化约的分数 $\frac{m}{n}$,则可求得适合

$$mn' - m'n = 1$$

之两整数 m', n'；令

$$m'\alpha - n'\beta = \gamma$$

则 γ 亦为一个周期. 由以下两式

$$m\alpha - n\beta = 0, m'\alpha - n'\beta = \gamma$$

可得

$$\alpha = -n\gamma, \beta = -m\gamma$$

即 α 与 β 都为此周期 γ 的乘数而不为独立周期.

由此可见，单值解析函数 $f(z)$ 不能有比值为实数的两个独立周期 a 与 b. 若然，则此函数 $f(az)$ 将要有两个实周期 1 与 $\frac{b}{a}$.

1.2.4 二重周期函数，周期平行四边形

有两个周期的单值解析函数称为二重周期函数. 由前节可知，此两个周期不能都为实数，而其比值亦不能为实数. 兹用魏尔斯特拉斯符号，以 u 表示自变复数，以 2ω 与 $2\omega'$ 表示此两个周期，并在 $\frac{\omega'}{\omega}$ 之虚数部中设 i 之系数为正数. 在 u 平面中标明 $2\omega, 4\omega, 6\omega, \cdots$ 各点及 $2\omega', 4\omega', 6\omega', \cdots$ 各点. 由 $2m\omega$ 各点作平行于 $O\omega'$ 方向之各平行线，并由 $2m'\omega'$ 各点作平行于 $O\omega$ 方向之各平行线，此平面即被划分为相同平行四边形之网(图 4). 设 $f(u)$ 为以 $2\omega, 2\omega'$ 为周期之单值解析函数，由以下两式

$$f(u+2\omega) = f(u), f(u+2\omega') = f(u)$$

可得

$$f(u+2m\omega+2m'\omega') = f(u)$$

因而，$2m\omega + 2m'\omega'$ 对此整数 m 与 m' 之各值亦为一个