精品最新版

世纪金榜

专项提高方案

丛书主编：张 泉

Tigao

Fang'an

数学之二

三角函数·不等式

延边大学出版社

精品最新版

世纪金榜

专项提高方案

Tigao

Fang'an

丛书主编：张泉

数学之二

三角函数·不等式

延边大学出版社

丛书主编 / 张　泉
本册主编 / 王兆田
副 主 编 / 李秀兰
编　　委 / 索国庆　张生明　王玉泉
刘景玉　杜夏夏　董玲玲

图书内容咨询:☏ 0531-7187013　李老师　朱老师

图书使用及反馈:☏ 0531-7965612　杨老师　曹老师

<书名>世纪金榜专项提高方案(一)

作　　者: 张 泉
责任编辑: 金昌海
装帧设计: 侯　青
出版发行: 延边大学出版社
社址: 吉林省延吉市公园路105号　邮编: 133002
网址: http: //www. eabook. com (网络书局)
印刷: 滨州市裕滨印刷有限公司
开本: 880 × 1230 毫米　1/16
印张: 133 印张　　字数: 2100 千字
印数: 1-10000 册
版次: 2004 年 7 月第 1 版
印次: 2004 年 7 月第 1 次
ISBN 7-5634-1933-0/G·470

总定价: 135.00 元

前言

ZHUANXIANG FANG'AN

为帮助广大学生牢固地掌握专题知识，突破知识运用中的薄弱环节，提高学科综合能力，世纪金榜力邀多名从事高三教学的专家，精心编写了《数学专项提高方案》系列丛书。共分为四个专项《函数·数列·极限·导数》、《三角函数·不等式》、《平面向量·平面解析几何》、《立体几何·概率统计》。本丛书在编写上严格遵循新考试大纲、教学大纲、新教材，突出新理念、展示新教材，训练定位在“低起点、高目标、小坡度、密台阶”循序渐进、重点突出、讲练到位，一定会使读者的专题知识与能力在有限的时间内获得最大限度的提高。

《三角函数·不等式》的突出特点：

1.实：即实用，无论是基础知识、基本法的复习还是例题的选配，练习的设计都力求做到实用高效，能给考生以实实在在的帮助。

2.新：适应新的高考形式，坚持以新的思想为指导，以新的变化为立足点，充分揭示数学思想和数学方法的本质，归纳、探索解题规律，使知识系统化、网络化；

3.全：注重学科间的渗透和理论联系实际，培养学生的整体水平及综合素质。

★具体栏目构成及特色如下：

【考纲展示】展示新高考对本节知识的考试要求，使学生复习时有的放矢。

【要点归纳】对本节知识进行提炼、归纳，列明重点，破解难点，突出要点。

【典例剖析】精选高考试题或高质量的经典试题作为例题。进行全方位阐释、思路点拨及归纳警示，不仅启迪学生的思维，而且总结了解题的规律和方法。

【能力训练】每一节都精心设计了一套练习题，使考生在学完题例后有针对性的进行强化训练，提高解题能力。

【热点规律方法】在分析总结近几年新高考的命题趋势后，每一章节后面都给出了专题讲解，主要精选本章的重要知识点及高考的热点，着重突出重要数学思想方法的归纳与应用，注重一题多解，变式训练、创新点拨。

【高考金题回放】较全面地列出每部分近几年的新课程高考试题，并附以详尽解析，使学生在触摸高考中有所感悟提升。

【综合过关检测】紧扣全章知识点设计试题，题目覆盖面广，选题新颖、务实、典型。

本书立足教材，侧重能力培养与考查，注重理论与社会生活的密切联系，关注社会热点，注重创新，定会成为广大师生的备考“智囊”和应试“锦囊”。

编　者

2004年夏

三角函数·不等式

目录

mu lu

一　三角函数　1

二　不等式　61

mu lu

一

三角函数

(一) 角的概念与任意角的三角函数

考纲展示

1. 理解任意角的概念、弧度的意义. 能正确地进行弧度与角度的换算.

2. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义. 了解余切、正割、余割的定义.

要点归纳

1. 角的概念

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形. 旋转开始时的射线 OA 叫做角的始边,终止时的射线 OB 叫做角的终边. 射线的端点 O 叫做角的顶点,按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角. 若一条射线没作任何旋转,称它形成了一个零角.

2. 象限角

使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,角的终边落在第几象限,就说这个角是第几象限角.

α 是第一象限角可表示为:

$\{\alpha|2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$;

α 是第二象限角可表示为:

$\{\alpha|2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

α 是第三象限角可表示为:

$\{\alpha|2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$;

α 是第四象限角可表示为:

$\{\alpha|2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

注意象限角与轴上角及区间角(如$[0,\frac{\pi}{2}]$)的区别与联系.

3. 象限界角(即轴上角)

终边落在 x 轴非负半轴上的角的集合可记作:

$\{\alpha|\alpha=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 x 轴非正半轴上的角的集合可记作:

$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 y 轴非负半轴上的角的集合可记作:

$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在 y 轴非正半轴上的角的集合可记作:

$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在坐标轴上的角可表示为:

$\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

4. 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合$\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$或$\{\beta|\beta=\alpha+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,前者 α 用角度制表示,后者 α 用弧度制表示.

注意:①$k\in\mathbf{Z}$;②α 为任意角;③$k\cdot360°$与 α 之间是"+"号,$k\cdot360°-\alpha$ 可理解为 $k\cdot360°+(-\alpha)$;④角的集合表示形式不是惟一的,终边相同的角有无数个,它们相差 360°的整数倍;⑤终边相同的角不一定相等. 但相等的角终边一定相同. ⑥注意角度与弧度在同一个式子中不能混用,如与$-30°$角终边相同的角的集合不能表示为$\{\alpha|\alpha=-30°+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,正确的表示方法是$\{\alpha|\alpha=-30°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

5. 弧度制

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫 1 弧度的角. 以弧度作为单位来度量角的单位制，叫做弧度制，它的单位符号是 rad，读作弧度，通常略去不写.

6. 度与弧度的换算关系

∵圆周的$\frac{1}{360}$为 1 度的角

∴即$\frac{1}{360}$周角$=1^\circ$，$\frac{1}{2\pi}$周角$=1$ rad

∴$360^\circ=2\pi$ rad

∴$180^\circ=\pi$ rad，$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad，1 rad$=(\frac{180}{\pi})^\circ$

7. 弧长公式

$l=|\alpha|\cdot r$，即弧长等于弧所对的圆心角(弧度数)的绝对值与半径的积.

涉及扇形弧长和面积的计算，可用的公式有角度和弧度两种表示形式，其中弧度表示的公式结构简单，易记好用，在使用前，应将圆心角用弧度表示.

扇形弧长和面积的核心公式是圆周长公式 $C=(2\pi)r$和圆面积公式 $S=\frac{1}{2}(2\pi)r^2$，当用圆心角的弧度数 α 代换 2π 时，即可得到一般弧长和扇形面积公式：$l=|\alpha|r$，$S=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

8. 任意角的三角函数的定义

设 α 是一任意角，α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y)，它与原点的距离是 $r(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$，那么

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$

$\cot\alpha=\frac{x}{y}$，$\sec\alpha=\frac{r}{x}$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}$.

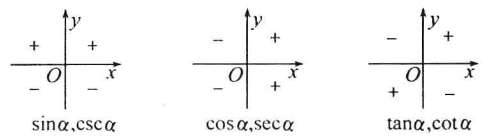
注意：对任意角的三角函数定义的理解可以对比初中锐角的三角函数的定义去进行，重在掌握二者间的某种联系，分清它们之间的根本区别.

9. 三角函数的定义域

三角函数	定义域
$\sin\alpha$，$\cos\alpha$	**R**
$\tan\alpha$，$\sec\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$
$\cot\alpha$，$\csc\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

注意：抓住定义中分母为零时比值无意义这一关键.

10. 各象限角的三角函数值的符号



三角函数正值歌：Ⅰ全正，Ⅱ正弦，Ⅲ两切，Ⅳ余弦，正、余割分别随着余、正弦.

注意：三角函数的定义及象限符号是任意角的三角函数的两大重要支柱，利用三角函数的定义解三角题是一种最基本的方法，迅速准确地判断三角函数值的符号是今后化简求值的关键.

11. 本节的重点是任意角的正弦、余弦、正切的定义(包括这三种三角函数的定义域和函数值在各象限的符号)，难点是弧度的概念及其与角度的换算关系. 关键是通过数形结合来认识角的几何表示和终边相同的角，1 弧度的角的意义.

典例剖析

【例1】下列各命题正确的是

(A)终边相同的角一定相等

(B)第一象限角都是锐角

(C)锐角都是第一象限角

(D)小于 90°的角都是锐角

【点拨 1】可根据各种角的定义，利用排除法予以解答. 注意角的概念的扩展，角可为正，可为负，也可为零.

【解析 1】选 C. 对于 A 选项，-60°和 300°是终边相同的角，它们并不相等，∴应排除 A. 对于 B 选项，390°是第一象限角，但它不是锐角，∴应排除 B. 对于选项 D，-60°是小于 90°的角，但它不是锐角，∴应排除 D. 综上，∴应选 C.

【归纳】要想否定一个命题，只需举出一反例即可，本解法就是恰当地举出反例，将 A、B、D 三个选项予以排除，从而确定正确选项 C.

【点拨 2】可根据锐角和第一象限角的定义，利用定义直接判断.

【解析 2】∵锐角的集合是$\{\alpha|0^\circ|<\alpha<90^\circ\}$， ①

第一象限角的集合是$\{\alpha\mid k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+$

$90°, k\in \mathbf{Z}\}$, ②

对于②,当 $k=0$ 时,②与①相同.

∴锐角是第一象限角.

【归纳】准确区分锐角,$0°\sim 90°$的角,小于 $90°$的角及第一象限角.锐角是 $0°<\alpha<90°$的角,它既是第一象限角,也是小于 $90°$的角;$0°\sim 90°$的角是 $0°\leqslant\alpha<90°$的角;小于 $90°$的角是 $\alpha<90°$的角,它包括锐角;第一象限角是 $k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°, k\in \mathbf{Z}$ 的角,它包括锐角.

【例2】集合 $M=\{x|x=k\cdot 90°+135°, k\in \mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=k\cdot 45°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$,则

(A)$M=N$　　(B)$M\supsetneqq N$

(C)$M\subsetneqq N$　　(D)$M\cap N=\varnothing$

【点拨1】利用子集的定义来解题.

【解析1】选C.设 $\alpha\in M$,则

$\alpha=k_1\cdot 90°+135°(k_1\in \mathbf{Z})$

$=2k_1\cdot 45°+135°$

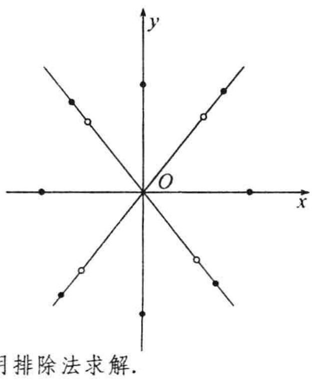
$=(2k_1+1)45°+90°$.

由于 $k_1\in \mathbf{Z}$,则 $2k_1+1\in \mathbf{Z}$,∴$\alpha\in N$,$M\subseteq N$,

又 $90°\in N$,$90°\notin M$,得 $M\subsetneqq N$,故选C.

【点拨2】利用图像来判定.

【解析2】选C.如图所示,用圆点"◦"所在射线表示集合 M 的元素的终边,黑点"•"表示集合 N 的元素的终边,由图易得 $M\subsetneqq N$,故选C.



【点拨3】利用排除法求解.

【解析3】选C.由于 $90°\in N$,$90°\notin M$,故可排除A、B;又由于 $45°\in N$,$45°\in M$,可排除D,故选C.

【点拨4】根据元素的个数求解.

【解析4】选C.集合 M 的元素为:$x=(2k+3)\times 45°$,集合 N 的元素为:$x=(k+2)\times 45°$,

$2k+3$ 是奇数,而 $k+2$ 是整数,因此,$M\subsetneqq N$,故选C.

【归纳】以上四种解法各具特色,解析1利用子集的定义来求解,解法虽然抽象,但这是解这类问题的一般方法;解析2借助图像根据两个集合中元素的终边来判断,解法直观、可靠;解析3和解析4分别利用排除法和元素特征分析法来判断,解法简捷、明了,对于选择题而言,我们应力求简单、快捷地求解.

【例3】已知一扇形的周长为 $C(C>0)$,当扇形的圆心角为何值时,它有最大面积?并求出面积的最大值.

【点拨1】根据扇形的面积公式 $S=\frac{1}{2}Rl$ 和弧长公式 $l=R\alpha$,把面积 S 表示成圆心角 α 的函数后,再设法求面积的最大值.

【解析1】设扇形的半径为 R,圆心角为 α,面积为 S.

∵扇形的周长 $C=2R+l=2R+R\alpha$(l 为扇形的弧长),

∴$R=\frac{C}{2+\alpha}$.

则 $S=\frac{1}{2}Rl=\frac{1}{2}R\cdot R\alpha=\frac{1}{2}R^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{C^2\alpha}{(2+\alpha)^2}$.

将上式整理可得 $2S\alpha^2+(8S-C^2)\alpha+8S=0$. ①

∵α 为实数,

∴方程 $2S\alpha^2+(8S-C^2)\alpha+8S=0$ 的判别式

$\Delta=(8S-C^2)^2-64S^2\geqslant 0$.

解得 $0<S\leqslant\frac{C^2}{16}$.

当 $S=\frac{C^2}{16}$ 时,有 $\frac{1}{2}\cdot\frac{C^2\alpha}{(2+\alpha)^2}=\frac{C^2}{16}$,则 $\alpha^2-4\alpha+4=0$,

从而 $\alpha=2$.

故当扇形的圆心角为 2 rad 时,扇形的面积有最大值,最大值为 $\frac{C^2}{16}$.

【点拨2】将面积表示为弧长 l 的函数,只要求出面积最大时 l 的值,再由弧长公式就能求出圆心角 α 的值.

【解析2】设扇形的半径为 R,圆心角为 α,弧长为 l,面积为 S.

∵$C=2R+l$,

∴$R=\frac{C-l}{2}(C>l)$.

$\therefore S=\frac{1}{2}Rl=\frac{1}{2}\cdot\frac{C-l}{2}\cdot l=\frac{1}{4}(Cl-l^2)$

$=-\frac{1}{4}(l-\frac{C}{2})^2+\frac{C^2}{16}$. ②

则 $l=\frac{C}{2}$ 时，$S_{\max}=\frac{C^2}{16}$，此时 $\alpha=\frac{l}{R}=\frac{\frac{C}{2}}{\frac{C-\frac{C}{2}}{2}}=2$.

故当扇形的圆心角为 2 rad 时，扇形面积有最大值 $\frac{C^2}{16}$.

【点拨 3】将扇形的面积表示成圆心角的函数后，用均值不等式求最大值.

【解析 3】设扇形的半径为 R，圆心角为 α，扇形的面积为 S.

则 $C=2R+R\alpha$，$R=\frac{C}{2+\alpha}$

$\therefore S=\frac{1}{2}R^2\alpha=\frac{C^2\alpha}{2\alpha^2+8\alpha+8}=\frac{C^2}{2\alpha+\frac{8}{\alpha}+8}\leqslant\frac{C^2}{2\sqrt{2\alpha\times\frac{8}{\alpha}}+8}=\frac{C^2}{16}$

当且仅当 $2\alpha=\frac{8}{\alpha}$，即扇形圆心角 $\alpha=2$ rad 时，扇形有最大面积 $S_{\max}=\frac{C^2}{16}$.

【归纳】本例解析 1 中的函数关系①较为复杂，求最大值时化为一元二次方程，利用判别式法求解；解析 2 中的函数关系②是学生很熟悉的二次函数，利用配方法便能求出它的最大值.

解析 2 中我们先将 S 表示成 l 的函数，求得 l 后再求 α，这种"欲进先退"的解题方法是数学中一种重要的策略.

解析 1、解析 2 都是利用了函数与方程的思想方法解决问题的，而解析 3 则是运用均值不等式，凑出"一正二定三相等"后简单解决.

【例4】设角 $\alpha_1=-570°$，$\alpha_2=750°$，$\beta_1=\frac{3}{5}\pi$，$\beta_2=-\frac{7}{3}\pi$.

(1)将 α_1，α_2 用弧度制表示出来，并指出它们各自所在的象限；

(2)将 β_1，β_2 用角度制表示出来，并在 $-720°\sim0°$ 之间找出与它们有相同终边的所有角.

【点拨】(1)注意角度制与弧度制的区别与联系；

(2)要确定角 α 所在的象限，只要把 α 表示为 $\alpha=2k\pi+\alpha_0(k\in\mathbf{Z},0\leqslant\alpha_0<2\pi)$，由 α_0 所在象限即可判定出 α 所在的象限.

【解析】(1) $-570°=-\frac{19}{6}\pi=-4\pi+\frac{5}{6}\pi$，

$750°=\frac{25}{6}\pi=4\pi+\frac{\pi}{6}$.

$\therefore\alpha_1$ 在第二象限，α_2 在第一象限.

(2) $\beta_1=\frac{3\pi}{5}=108°$，

设 $\theta=k\cdot360°+\beta_1(k\in\mathbf{Z})$，

由 $-720°\leqslant\theta<0°$，得 $-720°\leqslant k\cdot360°+108°<0°$，

$\therefore k=-2$ 或 $k=-1$，

$\therefore$ 在 $-720°\sim0°$ 间与 β_1 有相同终边的角是：$-612°$ 和 $-252°$.

同理 $\beta_2=-420°$，且在 $-720°\sim0°$ 间与 β_2 有相同终边的角是 $-60°$.

【归纳】终边相同的角的集合是 $S=\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$，其公式隐含了周期性，即每当角度增加 $360°$ 或减少 $360°$ 时，角的终边相应按逆时针方向就又与角 α 的终边分别重合一次，当 k 取一切整数时，就一遍一遍地循环变化着.

要求在某一范围内与角 α 终边相同的角，实质就是确定适当的 k 值，进而该范围内的角也就确定下来了.

【例5】若角 θ 的终边与函数 $y=-2|x|$ 的图像重合. 求 θ 的各三角函数值.

【点拨】由于 $y=-2|x|=\begin{cases}-2x & (x\geqslant0)\\2x & (x<0)\end{cases}$ 的图像为三、四象限中的两条射线，故可根据三角函数定义来求解.

【解析】$\because$ 角 θ 的终边与函数 $y=-2|x|$ 的图像重合，

$\therefore\theta$ 是第三、四象限的角.

若 θ 为第三象限的角，取终边上一点 $P(-1,-2)$，$r=|OP|=\sqrt{5}$，从而

$\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\tan\theta=\frac{y}{x}=2$，$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$，

$\sec\theta=\frac{r}{x}=-\sqrt{5}$，$\csc\theta=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

若θ在第四象限,可取点$P(1,-2)$,易得:

$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\tan\theta=-2,\cot\theta=-\frac{1}{2}$,

$\sec\theta=\sqrt{5},\csc\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【归纳】三角函数值的大小与点P在角的终边上的位置无关,只与角的大小有关,本题还应注意的是函数$y=-2|x|$的图像为两条射线,故应该有两种答案.

要善于利用三角函数的定义及三角函数的符号规律解题,并且注意掌握解题时必要的分类讨论以及三角函数值符号的正确选取.

【例6】设函数$f(x)=-x^2+2x+3(0\leqslant x\leqslant 3)$,设$f(x)$的最大值为$m$,最小值为$n$,当角$\alpha$的终边经过点$P(m,n-1)$时,求$\sin\alpha+\cos\alpha$的值.

【点拨】本题以二次函数为背景,考查了函数的最值和三角函数的定义,培养综合运算能力.本题的解题关键是求函数$f(x)$的最大值和最小值.

【解析】$\because f(x)=-(x-1)^2+4\quad(0\leqslant x\leqslant 3)$

$\therefore$当$x=1$时$f(x)_{\max}=4$

当$x=3$时$f(x)_{\min}=0$

即$m=4,n=0$

$\therefore P(4,-1)$

$\therefore r=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

$\therefore \sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{1}{\sqrt{17}},\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{17}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

【归纳】本题关键是求二次函数在区间上的最大值和最小值,既要注意开口方向,又要注意给定区间$x\in[0,3]$.

坐标系中任意角的三角函数的定义,是通过直角坐标系中的终边上某一点的坐标,确定该角三角函数的值.根据定义可知,一个角的三角函数值只与这个角的终边位置有关,即角α与$\beta=2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$的同名三角函数值相等.

能力训练

一、选择题

1.若α和β的终边关于y轴对称,则必有 ( )

(A)$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ (B)$\alpha+\beta=(2k+\frac{1}{2})\pi$

(C)$\alpha+\beta=2k\pi$ (D)$\alpha+\beta=(2k+1)\pi$

2.若$\sin\theta=\frac{4}{5}$,$\tan\theta<0$,则2θ的终边在 ( )

(A)第二象限 (B)第三象限

(C)第四象限 (D)第三、四象限

3.“$\alpha=\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的 ( )

(A)充分不必要条件 (B)必要不充分条件

(C)充要条件 (D)既不充分也不必要条件

4.已知点$P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$在第一象限,则在$[0,2\pi]$内$\alpha$的取值范围是 ( )

(A)$(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi)\cup(\pi,\frac{5}{4}\pi)$

(B)$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$

(C)$(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi)\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3}{2}\pi)$

(D)$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3}{4}\pi,\pi)$

5.已知扇形的周长为6 cm,面积是2 cm^2,则扇形的中心角的弧度数是 ( )

(A)1 (B)4 (C)1或4 (D)2或4

6.已知弧度数为2的圆心角所对弦长也是2,则这个圆心角所对的弧长是 ( )

(A)2 (B)$\frac{2}{\sin 1}$ (C)$2\sin 1$ (D)$\sin 2$

7.设$\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$且$\sin\frac{\alpha}{3}>\cos\frac{\alpha}{3}$,则$\frac{\alpha}{3}$的取值范围是 ( )

(A)$(2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{3})(k\in\mathbf{Z})$

(B)$(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3})(k\in\mathbf{Z})$

(C)$(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$

(D)$(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3})\cup(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi)(k\in Z)$

8. 若角 α 的终边与直线 $y=3x$ 重合且 $\sin\alpha<0$，又 $P(m,n)$ 是 α 终边上一点，且 $|OP|=\sqrt{10}$，则 $m-n$ 等于　(　　)

(A)2　(B)-2　(C)4　(D)-4

9. 已知锐角 α 终边上一点 A 的坐标为 $(2\sin3,-2\cos3)$，则角 α 的弧度数为　(　　)

(A)3　(B)-3　(C)$3-\frac{\pi}{2}$　(D)$\frac{\pi}{2}-3$

10. 有下列命题：

①终边相同的角的同名三角函数的值相等；

②终边不同的角的同名三角函数的值不等；

③若 $\sin\alpha>0$，则 α 是第一、二象限的角；

④若 α 是第二象限的角，且 $P(x,y)$ 是其终边上一点，则 $\cos\alpha=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中正确命题的个数是　(　　)

(A)0 个　(B)1 个　(C)2 个　(D)3 个

二、填空题

11. 若 α 为第一象限角，那么 $\sin2\alpha,\cos2\alpha,\sin\frac{\alpha}{2},\cos\frac{\alpha}{2}$ 中必定取正值的有______.

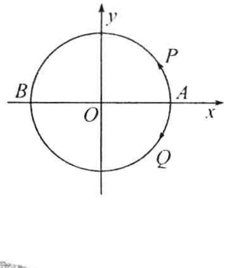
12. 修钟表的李师傅将分针拨快了 1 950°，则时针转了______度.

13. 若角 α 的终边与角 $\frac{\pi}{6}$ 的终边关于直线 $y=x$ 对称，且 $\alpha\in(-4\pi,4\pi)$，则 $\alpha=$______.

14. 将长度为 1 的铁丝分成两段，分别围成一个正方形和一个圆心角为 1 的扇形，要使正方形和扇形的面积之和最小，扇形的周长应为______.

三、解答题

15. 如图所示，动点 P,Q 从点 $A(4,0)$ 出发沿圆周运动，点 P 按逆时针方向每秒钟转 $\frac{\pi}{3}$ 弧度，点 Q 按顺时针方向每秒钟转 $\frac{\pi}{6}$ 弧度，求 P,Q 第一次相遇时所用的时间，相遇点的坐标及 P,Q 点各自走过的弧长.



16. 2003 年 10 月 15 日上午 9 时，中国首位航天员杨利伟乘坐的“神舟”五号载人飞船，在酒泉卫星发射中心用“长征二号 F”型运载火箭发射升空。按预定轨道环绕地球十四圈，在太空飞行 21 小时 18 分，16 日 6 时 23 分，在内蒙古中部地区成功着陆，中国首次载人航天飞行任务获得圆满成功.

视飞船在距地面 343 公里的太空中绕地球作匀速圆周运动，90 分钟绕地球一圈，地球的平均半径为 6 378千米，试计算：

(1)飞船绕地球 14 周共转过的角度是多少？

(2)在太空飞行中，杨利伟与家人进行了一次特别的通话，通话时间持续 4 分 50 秒，在这段时间内，杨利伟所乘坐的飞船转过的角度是多少？飞船走了多少千米(不考虑其他因素)？

17. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & (x<\frac{1}{2})\\ f(x-1)+1 & (x\geq\frac{1}{2})\end{cases}$，求 $f(\frac{1}{4})+f(\frac{7}{6})$ 的值.

18. 已知角 α 的顶点与直角坐标系的原点重合，始边在 x 轴的正半轴上，终边经过点 $P(-1,2)$.

求 $\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$ 的值.

(二) 同角三角函数的基本关系式与诱导公式

考纲展示

1. 掌握同角三角函数的基本关系式.

2. 掌握正弦、余弦的诱导公式并能正确用来进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明.

要点归纳

1. 同角三角函数的基本关系式

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1(\alpha\in\mathbf{R})$；

(2)商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$；

(3)倒数关系：$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1(\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$.

同角三角函数的基本关系式主要有三个方面的应用：化简、求值、证明，值得注意的是：

①每个公式成立的限制条件，特别是“同角”及定义域.

②利用平方关系式进行开方运算时要慎重考虑结果的符号，如α是第二象限角，则$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha$.

2. 诱导公式

(1)$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$，$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$，$2\pi-\alpha$的三角函数等于$\alpha$的同名函数值，前面加上一个把$\alpha$看成锐角时原函数值的符号，口诀为：函数名不变，符号看象限.

(2)$\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数值等于α的余函数值，前面加上一个把α看成锐角时原函数值的符号. 口诀为：函数名改变，符号看象限.

这九组诱导公式可以列表如下：

函数 / 角	正弦	余弦
$2k\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\dfrac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$

总口诀为：奇变偶不变，符号看象限，其中“奇、偶”是指“$\dfrac{k\pi}{2}\pm\alpha$”$(k\in\mathbf{Z})$中k的奇偶性；“符号”是把任意角α看作锐角时，原函数值的符号.

学习诱导公式要抓住一个“诱”字，诱什么？怎样诱？为什么这样诱？同学们若能搞清这些问题，自然就会循循善“诱”了.

诱什么，就是诱角，即把$\alpha+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，$-\alpha$，$180^\circ\pm\alpha$，$360^\circ-\alpha$和$90^\circ\pm\alpha$，$270^\circ\pm\alpha$中的任意角$\alpha$看做锐角；怎么诱，就是变角，角的变换为使用诱导公式创造条件；为什么这样诱，就是为了达到我们所需要的角，或所需的名，或最简的式.

应用诱导公式，关键是“函数名称”与“正负号”的正确判断. 求任意角的三角函数值的问题，都可以通过诱导公式化归为锐角三角函数的求值问题，具体步骤为“负角化正角”→“正角化锐角”(即“大角化小角”)→求值.

3. 掌握三角函数的三种基本题型

(1)求值题型：已知一个角的某一个三角函数值，求这个角的其他三角函数值. 这类问题可以分成三种情况：

①一个角的某一个三角函数值和这个角所在的象限或终边落在哪个坐标轴上都是已知的，此类情况只有一组解.

②一个角的某一个三角函数值是已知的，但这个角所在的象限或终边落在哪个坐标轴上没有给出，解答这类问题，首先要根据已知的三角函数值确定这个角所在的象限或终边落在哪个坐标轴上，然后分不同的情况求解.

③一个角的某一个三角函数值是用字母给出的，或用一个角的某一个三角函数来表示这个角的其他三角

函数,此类情况有两组解.

(2)化简题型:化简三角函数的目的是为了简化运算,化简的一般要求是:

①能求出函数值的,要求解出函数值来,函数种类尽可能地少;

②要使化简后的式子项数最少,次数最低;

③尽量化去含有根式的式子,尽可能地不含分母.

(3)证明题型:证明三角恒等式的实质是消除等式两边的差异,就是有目的地化繁为简、左右归一或变更改证.三角恒等式证明的常用方法有:

①单向证明:从一边开始证得它等于另一边,遵循由繁到简这一原则.

②双向起动:左边$=A$,右边$=A$,则左边$=$右边,A起着中间传递作用.

③转换命题:$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Leftrightarrow A\cdot D=B\cdot C(B\cdot D\neq 0)$

4.计算、化简或证明三角函数式时常用技巧

(1)"1"的代换.为了解题的需要有时可以将1用"$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$"代替.

(2)切割化弦.利用商数关系或倒数关系把正切、余切、正割、余割化为正弦和余弦函数.

(3)整体代换.将计算式适当变形使条件可以整体代入或条件适当变形找出与算式之间的关系.

(4)公式的一些常见的等价变形,如:

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$,$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$,$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha$,$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$,$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$,$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$,$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\cot^2\alpha}$等.

(5)$\sin\alpha+\cos\alpha$,$\sin\alpha-\cos\alpha$,$\sin\alpha\cos\alpha$三个式子中"知一求二",如$\sin\alpha\pm\cos\alpha=\pm\sqrt{1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha}$.

若令$\sin\alpha+\cos\alpha=t(|t|\leqslant\sqrt{2})$,则$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}$,$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2-t^2$.

5.本节的重点是同角三角函数的三个基本关系式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$(平方关系),$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$(商数关系),$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$(倒数关系)以及九组诱导公式.难点是在$\sin\alpha$,$\cos\alpha$,$\tan\alpha$,$\cot\alpha$中"知一求三",特别是分类讨论,正负号的选取等,关键是熟记公式,灵活运用.

典例剖析

【例1】求值:$\sin(-690°)\cdot\cos(-600°)+\tan675°$.

【点拨】利用诱导公式求任意角的三角函数值的一般步骤是:

(1)化负角三角函数为正角三角函数;

(2)化大于360°角的三角函数为0°～360°角的三角函数;

(3)化90°～360°角的三角函数为0°～90°角的三角函数.另外要熟记特殊角的三角函数.

【解析】原式$=\sin(-720°+30°)\cdot\cos(-720°+120°)+\tan(360°+315°)$

$=\sin30°\cdot\cos120°+\tan315°$

$=\sin30°\cdot(-\cos60°)+(-\tan45°)$

$=\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})+(-1)$

$=-\frac{5}{4}$.

【归纳】诱导公式的重要作用在于它揭示了终边在不同象限但具有一定对称关系(关于原点、坐标轴、直线$y=\pm x$)的角的三角函数间的内在联系,从而可以将任意角的三角函数转化到一个较小的特定范围(如$[0,\frac{\pi}{2}]$)来研究,其解题思路是化负角为正角,化复杂角为简单角,化非锐角为锐角.

此例虽然简单,但反映了一种数学思想.即将不易解决的问题通过变形、代换、分解,将原有问题化为一个熟悉的问题,将抽象的化为具体的,将一般的化为特殊的,将未知的化为已知的化归思想.

【例2】已知$f(\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)\tan(-\alpha+\frac{3\pi}{2})}{\cot(-\alpha-\pi)\sin(-\pi-\alpha)}$;

(1)化简$f(\alpha)$;

(2)若α是第三象限角,且$\cos(\alpha-\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{5}$,求$f(\alpha)$的值;

(3)若$\alpha=-\frac{31\pi}{3}$,求$f(\alpha)$的值.

【点拨】先用诱导公式及同角三角函数的基本关系式化简,再代入求值.

【解析】(1) $f(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cot\alpha}{(-\cot\alpha)\sin\alpha}=-\cos\alpha$.

(2) $\because\cos(\alpha-\dfrac{3\pi}{2})=-\sin\alpha$

$\therefore\sin\alpha=-\dfrac{1}{5},\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5^2-1}}{5}=-\dfrac{2}{5}\sqrt{6}$,

$\therefore f(\alpha)=\dfrac{2}{5}\sqrt{6}$.

(3) $\because -\dfrac{31\pi}{3}=-6\times2\pi+\dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore f(-\dfrac{31\pi}{3})=-\cos(-\dfrac{31\pi}{3})$

$=-\cos(-6\times2\pi+\dfrac{5\pi}{3})$

$=-\cos\dfrac{5\pi}{3}=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$.

【归纳】在求三角函数式的值时，一般应先化简，再代入求值的范围以及相应三角函数值的正负情况进行讨论.因此，在解答这类问题时要三思而行：①角的范围是什么？②对应的三角函数值是正还是负？③与此相关的定义、性质或公式有哪些？

我们认真地观察一下每一组诱导公式的等号两边的角度，不难发现，这两个角度的和或差总是一个轴上角，即为 $k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 的形式.于是我们可以归纳出诱导公式的一个十分重要的功能是：如果两个角的和或差是轴上角 $k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 的话，利用诱导公式总可以把它们变成同角函数来处理，能认识到这一点，对于我们灵活利用诱导公式进行变形是十分重要的.

运用诱导公式可将任意角的三角函数转化为锐角的三角函数，重点在于函数名称与符号的正确判断和使用，运用同角三角函数的基本关系式可将较繁的三角函数式化简，在利用同角关系的平方关系时，关键在于讨论角的范围.

【例3】已知 $\sin\alpha+3\cos\alpha=0$，求(1) $\dfrac{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}$

(2) $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2$ 的值.

【点拨】先由已知 $\sin\alpha+3\cos\alpha=0$，显然 $\cos\alpha\neq0$，解得 $\tan\alpha=-3$，再用 $\cos^n\alpha(n\in\mathbf{N}^*)$ 除以被求式，从而化为关于 $\tan\alpha$ 的表达式，最后代入求值.

【解析】(1) $\because\sin\alpha+3\cos\alpha=0,\therefore\tan\alpha=-3$

$\dfrac{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}-\tan\alpha}{\sqrt{3}+\tan\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3}=-2-\sqrt{3}$.

(2)方法一：

$2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2$

$=2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$=\dfrac{4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{4\tan^2\alpha-3\tan\alpha+2}{\tan^2\alpha+1}$

$=\dfrac{4\times(-3)^2-3\times(-3)+2}{(-3)^2+1}=\dfrac{47}{10}$.

方法二：

$2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2$

$=4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha$

$=\cos^2\alpha(4\tan^2\alpha-3\tan\alpha+2)$

$=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}(4\tan^2\alpha-3\tan\alpha+2)$

$=\dfrac{1}{1+(-3)^2}(4\times9+3\times3+2)=\dfrac{47}{10}$.

【归纳】关于含有正弦、余弦函数的齐次式(或能化为齐次式)，$\dfrac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$ 或 $\dfrac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{d\sin^2\alpha+e\sin\alpha\cos\alpha+f\cos^2\alpha}$ 等，在求解时常常利用分子，分母同除以 $\cos\alpha,\cos^2\alpha$ 等转化为含有正切 $\tan\alpha$ 的表达式，这种变形技巧十分重要.

【例4】已知关于 x 的方程 $2x^2-(\sqrt{3}+1)x+m=0$ 的两根为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta,\theta\in(0,2\pi)$，求：

(1) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 的值；

(2) m 的值；

(3)方程的两个根及此时 θ 的值.

【点拨】韦达定理等是解决一元二次方程问题常用的工具，切化弦是处理三角函数问题常采取的措施.注意隐含条件"$\Delta\geqslant0$"的挖掘，重视"方程法"在解题中的作用.

【解析】(1)由韦达定理可知

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & ①\\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{m}{2} & ②\\ \Delta=(\sqrt{3}+1)^2-8m\geqslant0 & ③\end{cases}$$

而$\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

(2)由①式平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

由②得$\dfrac{m}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

适合③式,故 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)当 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时,

原方程变为 $2x^2-(\sqrt{3}+1)x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$,

解得 $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$x_2=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

又$\because \theta\in(0,2\pi)$,$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$或 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

【例5】是否存在角 α、β,$\alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$,$\beta\in(0,\pi)$,使等式 $\sin(3\pi-\alpha)=\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{2}-\beta)$,$\sqrt{3}\cos(-\alpha)=-\sqrt{2}\cos(\pi+\beta)$同时成立.若存在,求出 α、β 的值;若不存在,请说明理由.

【点拨】一般探索结论性问题的基本解法是:先假设结论成立.据此假设若能推出合理的结论,则说明假设成立;若推出矛盾,则可否定假设.

【解析】将已知条件化为$\begin{cases}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta & ①\\ \sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\beta & ②\end{cases}$

$①^2+②^2$ 得 $\sin^2\alpha+3(1-\sin^2\alpha)=2$,

即 $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}$,$\sin\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because -\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{4}$或 $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$.

(1)当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时,由②得 $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because 0<\beta<\pi$,$\therefore \beta=\dfrac{\pi}{6}$.

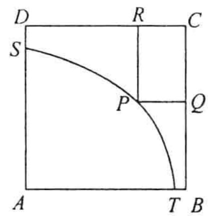
(2)当 $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$时,由①得 $\sin\beta=-\dfrac{1}{2}$.

而 $\beta\in(0,\pi)$,∴此时无解.

于是存在 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$,$\beta=\dfrac{\pi}{6}$使两个等式成立.

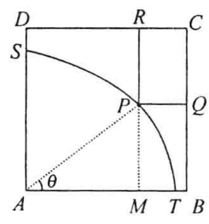
【归纳】本题通过变形转化为已知三角函数值求角的问题,关键就在于对角的范围的讨论,注意合理利用不等式的性质,必要时,根据三角函数值缩小角的范围,从而求出准确角.另外,求角一般都通过三角函数值来实现,但求该角的哪一种函数值,往往有一定的规律,若 $\alpha\in(0,\pi)$,则求 $\cos\alpha$,若 $\alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$,则求 $\sin\alpha$ 等.

【例6】如图所示,$ABCD$ 是一块边长为 100 m 的正方形地皮,其中 AST 是一半径为 90 m 的扇形小山,其余部分都是平地.一开发商想在平地上建一个矩形停车场,使矩形的一个顶点 P 在$\overset{\frown}{ST}$上,相邻两边 CQ、CR 落在正方形的边 BC、CD 上.求矩形停车场 $PQCR$ 面积的最大值和最小值.



【点拨】本例所给的实际问题来源于生活,选材贴近学生,构思新颖,况且提供了有关量之间的关系式,数学模型初见端倪,只要读懂题目,找出主要变量,建立面积的目标函数,问题即可转化为函数的最值.

【解析】如图所示,



设$\angle PAB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$,

延长 RP 交 AB 于 M,则 $AM=90\cos\theta$,$MP=90\sin\theta$.$PQ=MB=100-90\cos\theta$,$PR=MR-MP=100-90\sin\theta$.于是,

$S_{矩形PQCR}=PQ\cdot PR$

$=(100-90\cos\theta)(100-90\sin\theta)$

$=10\,000-9\,000(\sin\theta+\cos\theta)+8\,100\sin\theta\cos\theta$.

令 $\sin\theta+\cos\theta=t(1\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$,则 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$.