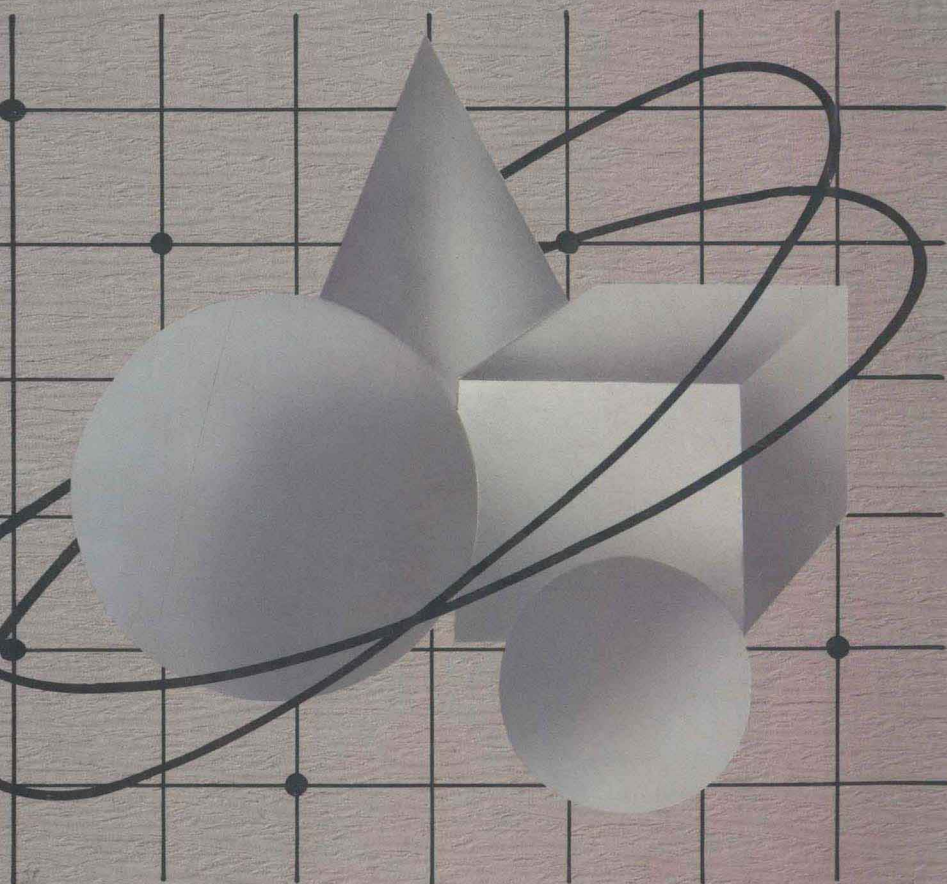


學術著作・大學用書

數學學習



譯 /
劉秋木



大學用書

數學學習

劉秋木 譯

花蓮師範學院教務長

五南圖書出版公司 印行



ISBN 957-11-0078-1

數 學 學 習

中華民國 79 年 4 月初版

譯 者 劉 秋 木

發行人 楊 榮 川

發行所 五南圖書出版公司

局版臺業字第 0598 號

臺北市銅山街 1 號

電 話：3 9 1 6 5 4 2

郵政劃撥：0 1 0 6 8 9 5 - 3

印刷所 茂榮印刷事業有限公司

板橋市雙十路 2 段 46 巷 22 弄 11 號

電 話：2 5 1 3 5 2 9

基本定價： 6 元

(本書如有缺頁或倒裝，本公司負責換新)

ISBN 957-11-0078-1

譯 序

現在我們都不再相信苦練就可以學好數學了。反之，我們從認知心理學的觀點來探索人類思考和做數學的心理歷程，從而研究如何教學數學。認知心理學除了皮亞傑的認知發展論已廣為大家所熟悉之外，另一個理論基礎是資訊處理。資訊處理的理論嘗試以電腦模擬人腦，以電腦運作的歷程解釋人類思維的過程。這方面的研究也稱為人工智慧或認知科學。這個理論基礎似乎越來越重要。A.H.Schoenfeld甚至說，研究數學學習而忽略人工智慧的內容是很危險的。（見Silver, 1985, 所編 Teaching and Learning Mathematical Problem Solving, p.178）。真的，認知科學讓我從一個新穎的觀點來看數學。

本書Learning Mathematics: the cognitive science approach to mathematics education, 1984年Ablex Publishing Corporation出版，正是以認知科學的觀點解釋我們學習數學的心理歷程。本書將認知科學上的一些觀念和數學學習心理巧妙地結合起來。對於多數從事數學教學的人來說，本書將展現幾乎全新的景象。

以電腦比擬人腦，以機器學習比擬人的學習，尚有相當大的差距。人的創造力遠非現有的電腦所能企及。人工智慧所創造的一些觀念可為我們了解思維歷程的參考，但不能認定人類思維跳不出這些觀念的掌心。好在本書作者有豐富的教學經驗，列舉許多生動活潑的例子，使我們閱讀時不致於像面對著冰冷的機器，也不覺得人的思考是機械呆板的。

本書作者Robert Benjamin Davis (1926-) 是五〇年代新數學Madison Project的主持人，有許多新穎的教學法。在數學教育上無論教學與研究始終努力不懈，與一群學者和教師從事長程的教學研究，本書也可以說是展現這些研究的成果。他在伊利諾大學 (Champaign-Urbana校區) 課程及電腦本位教育研究實驗室擔任副主任從事數學課程實驗，並發行The Journal of Mathematical Behavior雜誌。由於教學經驗的豐富，他在本書各種概念的解釋，都能深入淺出反覆譬喻，絕無生澀冷僻之感。如有逆譯未達原意之處，尚祈指正。

Davis教授在大學部講授小學數學教學的理論與實際時並未使用本書為教材。究竟本書具有相當深度，閱讀本書也可以稱得上是一種挑戰。

目次

第 1 章	數學和數學教育	1
	壹、今日數學	• 1 •
	貳、今日的數學教育	• 2 •
	參、數學教育的問題	• 2 •
第 2 章	何謂數學	9
	壹、記憶的數學和有意義的數學	• 9 •
	貳、創性的數學	• 16 •
第 3 章	理論在科學上的角色	23
	■理論從何處來	• 27 •
第 4 章	基本概念	31
	壹、單位步驟	• 32 •
	貳、程序	• 33 •
	參、運作記憶及貯存記憶	• 33 •
	肆、人腦記憶	• 35 •
	伍、「憶取」意即「影印」	• 36 •
	陸、下位程序與上位程序	• 37 •
	柒、視覺導引的順序	• 37 •
	捌、統整的順序	• 39 •

- 玖、達成名詞狀態 · 40 ·
- 拾、程序之概述 · 40 ·
- 拾壹、一般的知識表象結構 · 41 ·
- 拾貳、評鑑者 · 47 ·
- 拾叁、矯正程序 · 48 ·
- 拾肆、狀態變數 · 49 ·
- 拾伍、架構 · 49 ·
- 拾陸、找正確架構：由上而下與由下而上 · 56 ·
- 拾柒、控制 · 59 ·
- 拾捌、堆疊：追躡芳蹤 · 62 ·
- 拾玖、運用架構的步驟 · 65 ·
- 貳拾、目標與子目標 · 74 ·

第 5 章 何事需要解釋 81

- 壹、專家的表現 · 82 ·
- 貳、心靈 · 82 ·
- 叁、廣大的記憶而狹小的工作空間 · 82 ·
- 肆、分配工作空間記憶 · 84 ·
- 伍、團簇 · 86 ·
- 陸、表象 · 86 ·
- 柒、抽象表象 · 87 ·
- 捌、組型記認 · 91 ·
- 玖、合併線索 · 91 ·

第 6 章 資料蒐集 95

- 壹、作業本位訪談法 · 95 ·

貳、分析學生答案 · 99 ·

叁、上課錄影 · 99 ·

肆、「結果」 · 99 ·

第 7 章 學生錯誤的規律性 105

壹、錯誤的規律性 · 105 ·

貳、上位程序之失敗 · 107 ·

叁、二元逆轉 · 109 ·

肆、錯誤規律性之其他研究 · 113 ·

第 8 章 一些共享的架構 115

壹、人類資訊處理的一些共通原則 · 116 ·

貳、有關一些共享架構的假設 · 119 ·

叁、初級的不分化的二元運算架構 · 120 ·

肆、低年級加法架構 · 122 ·

伍、低年級對稱減法架構 · 124 ·

陸、名數或單位的架構 · 125 ·

柒、哪些特定的架構 · 134 ·

捌、架構之特徵 · 135 ·

玖、「食譜」架構 · 138 ·

拾、結論 · 141 ·

拾壹、補述 · 141 ·

第 9 章 非共享的架構 145

壹、閱讀文字題 · 145 ·

貳、建構成成的？或取憶的？ · 150 ·

第10章 用淺白的話來說..... 153

壹、觀念的生長——第一形式 · 153 ·

貳、觀念的生長——第二形式 · 157 ·

第11章 O'Hare機場的解決方案..... 159

壹、「派遣」與「志願」 · 159 ·

貳、Chicago-Atlanta 解決法 · 162 ·

叁、認知架構與芝加哥機場 · 162 ·

肆、附帶的忠告 · 166 ·

第12章 組合..... 169

壹、當保祿十八歲 · 170 ·

貳、演化 · 172 ·

叁、Piaget 的公式 · 173 ·

肆、簡單架構的重要性 · 174 ·

伍、Papert 的齒輪 · 180 ·

陸、複雜觀念建立在簡單觀念的基礎上 · 180 ·

柒、組合的種類 · 185 ·

捌、不利於全錄的個案 · 188 ·

玖、若無現成的架構 · 189 ·

第13章 使用前數學的架構..... 197

■函數 · 197 ·

第14章 非字亦非圖..... 207

壹、文字與陳述 · 210 ·

貳、信賴自然語言的學生 · 221 ·

第15章 表象 223

壹、表象與解題 · 224 ·

貳、無窮數列的極限 · 228 ·

叁、小圓圈和大圓圈 · 237 ·

第16章 搜尋 261

壹、B的解答 · 265 ·

貳、搜尋的方法 · 282 ·

第17章 當下建構的表象 287

壹、分析 · 291 ·

貳、Wunderbar · 293 ·

第18章 憶取、建構與映射 301

壹、以方程式為例 · 305 ·

貳、理論 · 305 ·

叁、單位與映射 · 307 ·

肆、P.G.先生解方程式實錄 · 308 ·

伍、專家解題的企圖 · 323 ·

陸、超分析 · 324 ·

柒、MIU系統 · 325 ·

第19章 記認 331

壹、對數函數的導數 · 331 ·

貳、一個極限問題 · 334 ·

叁、無窮級數 · 336 ·

肆、「記認」的問題 · 337 ·

第20章 何謂「問題解決」.....339

壹、兩個同時並行的歷程 • 340 •

貳、建構表象 • 340 •

參、超分析 • 342 •

肆、解題如何失敗 • 342 •

伍、比較 • 345 •

第21章 「典範」教學策略.....347

壹、介紹負數 • 348 •

貳、典範教學策略 • 350 •

參、當「抽象」數學不存在時 • 351 •

第22章 一些古典的錯誤.....353

壹、前面章節談過的錯誤 • 353 •

貳、不完全的架構 • 356 •

參、製造規律的規律 • 358 •

肆、Marcia 的減法 • 361 •

伍、Marcia 的後續訪談 • 364 •

陸、分配律的錯誤 • 367 •

柒、中流易馬 • 371 •

捌、當「評鑑」不發生作用時 • 374 •

第23章 學校課程常見的缺陷.....377

壹、教材單位大小的問題 • 377 •

貳、語言講述法的問題 • 381 •

參、機械模仿 • 381 •

肆、教得太慢 · 382 ·

第 24 章 今日之處境 385

壹、基礎問題 · 385 ·

貳、補偏救失 · 387 ·

參、「災難」研究 · 389 ·

第 25 章 認知科學與數學教育 395

壹、預設的結構 · 396 ·

貳、秩序性 · 403 ·

參、解題與超語言 · 410 ·

肆、「算術」或許太狹窄 · 410 ·

伍、「災難研究」 · 411 ·

陸、一九五〇年代的典範 · 411 ·

柒、今日的樂觀條件 · 413 ·

參考書目 417

第 1 章

數學和數學教育

壹、今日數學

在今日的美國，數學扮演著顯要的角色：舉凡建築公路、探尋能源、設計電視、企業經營、太空艙飛行、研究傳染疾病、航海等等，皆賴數學之助。對個人而言，個人行業和財務狀況依個人所學數學的多寡和精通程度而定，而個人所學數學越多，其收入越佳。從社會的觀點來看，現代科學、技術、製造、甚至是農場經營，依賴數學的程度越來越重。

基於社會及個人的理由，我們對於一個人如何學得數學，以及如何分析數學問題思索解答等問題的興趣與日俱增。請留意，此處有兩個不同主題：數學研究本身，以及有關如何學習數學的研究，第二個主題有時候也稱為「數學教育」、「數學教授學」，或「數學行為的

認知研究」。本書的主題是數學教育。數學教育和數學並不相同，但二者也非截然不同。一個人研究數學多少也對下面的問題有興趣：「人們會如何著手想這個問題」，或者「他們自己是否正確了解這個科目。」很顯然，這類關切代表兩個疆域的交流；「數學」常常也包含了「數學教育」的重要層面。

貳、今日的數學教育

目前數學教育研究的方向，正迅速變遷中，在美國一群活躍而富有創意的研究者轉而研究人類如何處理數學概念的問題。他們的研究使用了新的方法，他們對人類數學思維的分析，開啟了一個重要的研究領域。

參、數學教育的問題

我們可以說，數學在處理人類從環境中所發現的（或人類置於環境之上的）組型。數學教育又處理什麼？或許就是人類思維、傳達或學習如何處理這些組型的方法。一旦採取這種看法，則顯然可見，數學所運用之資訊處理歷程（information processing），和人類日常大部份基本思維，並無太大差異。因此認知科學家常常研究數學的思維以期了解人類一般性的思維。就基本水準而言，無論你所關切的是「閱讀理解的資訊處理」、「下棋時的資訊處理」，在「紐約市找路的資訊處理」或「做數學的資訊處理」，是沒有差別的。

是故我們可以說，認知科學是人類思維的一般研究，而數學思維則是認知科學的重要部份。但是數學教育另有其特有的貢獻，亦即改

進數學之教學、學習和創造思考。本節便概覽一下數學教育所擁有的這個特別角色。

數學教育之成為獨立學科，可溯源自1900年代，尤其得力於David E. Smith 和 J.W.A. Young在芝加哥和哥倫比亞大學教育學院的工作。這倒是件怪事，數學研究遠在數千年前已開始，且對後世有無比重要性，Euclid及Archemdes二位大師的貢獻更不在話下。就如於四十多年前在中非出土的證據，顯示當地早有思辨精密的數學。(註1)何以數學的研究如此古老，而數學教育卻如此年幼？

這可能有點像醫藥，幾世紀以前很少控制環境的觀念，凡事聽天由命。若孩子死了，那只是發生過的事，直到最近，我們才認為一個嬰兒死了該有其原因，而這些原因該找出來，同時這類原因的知識該足夠使我們藉以發明防治的方法。這個觀點已掃除了小兒麻痺症，根絕了天花，同時有法子控制糖尿病，也大大減少了心臟血管疾病。然而很有趣的是，古時候聽天由命的態度，居然還殘留到二十世紀的醫學，例如認為感冒「就是這麼一回事」，關節炎和視力減退被視若無可避免且無法治療而逆來順受。

好多世紀以來，我們就知道有些人可玩弄數學於股掌之上，但大部份人則否。這也被視若自然，而個人生活型態的決定和社會的經濟需要也助長這種觀念。在今天，我們對這類事不再那麼聽命於自然。例如某人想要學某種數學，我們不那麼輕易就宣判他無能為力。我們會尋找更多的資料，要精確了解究竟是什麼障礙阻延他的進步？他做不來的是什麼？以及他犯的錯誤是什麼？何以犯這種錯？

我不想誇大其辭：現在我們依然無法幫助每一個人學會他所要學的數學，也無法精確指出何種障礙阻攔學習之路。但在這方面，數學教育類似醫學。現代醫學仍無法治癒每一種癌症，甚或每一種呼吸道

感染，也無法診斷出每一種疼痛。但現代醫學確實已有鉅大的價值。想想我們的祖父輩默然承受心絞痛而無能為力，以及現代有關飲食、運動、膽固醇、心理壓力、心導管、瓣膜移植、心臟血管旁通手術、心律調整器之研究。我們未能克服教學上的每一個教育問題，更難能將每一個學生變成二十世紀的阿基米德。但我們對於人類如何思維數學問題的歷程，有較精確而詳盡的敘述，這點將使吾人遠離聽天由命的境界而走向更佳控制的理想。

■教育效果之新研究

下列各章將縷析Clement, Lochhead及其同僚在麻州大學對學生學習數學之研究。Bert Green及其同僚在Johns Hopkins大學，Andrea di Sessa及其同僚在MIT，以及其他多位研究者，也從事類似的研究。這些研究指明了未來發展的重要方向。因為，第一，這些研究顯示，許多大學生所學得的數學遠不如一般人對他們的期許。許多學生在中學及大學中念了五年以上的數學，對於變數（variable-即未知數、在代數中無所不在的 X ， Y ），依然有嚴重的錯誤觀念。儘管這些學生已學了線性方程式、線性代數、二次方程式、圓錐曲線，及其他許多事，而這些知識都賴正確的變數概念。這似乎是不可能的，基礎的東西不懂，怎能學會上層的東西？在以後的章節，我們便會看到答案：有不同「型態」的學習。就像歌星會唱德文歌，但並不懂德文；唱歌可能只是模仿。由這個例子，我們可以看到兩種行為：把德文當作語言使用，則字句都具有意義；其次，把德文當作一組要模擬的聲音。數學行為亦然。其一是了解的，另一種則不然。在學生身上所發現的這個無可置疑的缺陷，有深遠的涵義。

Clement, Green諸人的研究之所以有趣的第二個理由是，有些

研究是在大學數學系，物理系，工學院進行的。這代表著有些學系逐漸致力於探究學生學習困難的本質，以及尋找克服困難的方法。假如這個問題代表一個趨勢，則在大學教育上將產生戲劇性的結果，而在整個數學教育上的涵義也非淺鮮。

附 註

1. 參閱 Jean de Heinzelin 著 Ishango, Scientific American (June 1962) pp, 105-16

研究問題

1. 假設你有一個學生，未學過正負數，亦即他不知有 -2 ， $+3$ 或 $5-6=-1$ 之類的知識。

你首次向他介紹這些觀念

$$6-10=-4$$

$$10-6=+4$$

$$5-6=-1$$

你將如何著手？（假如你認為必要，可花些時日介紹所需的預備觀念。）假定該生在11，12歲左右。

2. 假如你發現三年級學生 Marcia，解答

$$\begin{array}{r} 7002 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$$

時，寫成