21世纪高等学校规划教材

信号与系统
学习指导与习题精解

胡钋 张宇 王粟 编著

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

21世纪高等学校规划教材

信号与系统
学习指导与习题精解

编著 胡钋 张宇 王莱
主审 吴铁洲

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。

本书为胡钋教授等编写《信号与系统》的配套教材。全书共分8章，与《信号与系统》一书相得益彰。书中精辟地总结了信号与系统主要内容，列举了各种典型例题的求解方法，组织了丰富的各类习题，并作出详细的解答。

本书可作为高等学校自动化类、信息类及相关专业“信号与系统”课程的教学辅导用书和考研参考书，也可供自学自动控制原理的科技人员及工程技术人员学习和参考。

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统学习指导与习题精解/胡钋，张宇，王粟编著. —北京：中国电力出版社，2012.7

21世纪高等学校规划教材

ISBN 978-7-5123-3362-8

Ⅰ.①信… Ⅱ.①胡… ②张… ③王… Ⅲ.①信号系统—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第175768号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2012年8月第一版 2012年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 18.5印张 452千字

定价 **34.00** 元

前　言

“信号与系统”是一门与现代高科技信息学科密切相连的技术基础课，因而是通信工程、电子信息工程、光电子工程、计算机、自动控制、电子科学技术、电力等众多专业的必修课，还是相关专业硕士研究生入学考试必考的科目之一。

“信号与系统”是一门理论性和实践性都很强的课程。它以高等数学、工程数学、电路理论等课程为基础，具有显著的数理密切结合的特点。因此，要学好这门课程，首先要弄清所用的数学工具及分析方法，然后尽可能地将分析结果与实际的物理概念联系在一起，通过做大量的习题和实验加深对此课程理论、方法和应用的理解。

为了帮助在本专科学生和准备考研的读者深入学习信号与系统课程的理论知识，提高综合分析问题和解决问题的能力，作者根据长期教学实践和科研工作的经验和体会，对本课程的重难点以及解题方法进行了全面深入的系统总结，并精心编排了各类典型例题帮助读者透彻理解、牢固掌握并能灵活应用信号与系统课程的基本理论和分析方法，同时对胡钋、张宇、王粟所编著教材《信号与系统》中的全部习题作了详细的剖析解答。因此，本书还是学习该教材的必备用书。

全书共分 8 章，其中 1～5 章由张宇副教授撰写，第 6 章由王粟副教授撰写，第 7、8 两章由胡钋教授撰写。胡钋负责校订统稿全书。本书各章内容分别与胡钋、张宇、王粟编著的教材《信号与系统》中的一致。

本书可供高等学校电类各专业及有关专业的本科生和专科生作为学习参考书，也可作为硕士研究生入学考试的备考用书。

由于作者的水平有限，敬请广大读者对书中可能出现的疏误多加指正。

作　者

2011 年 9 月

目　　录

第1章　信号与系统的基本概念

1.1　基　本　要　点

1.1.1　信号及其描述方式

所谓信号，广泛地说它是随时间变化的物理量，是传递和记录信息的一种工具。从数学的角度而言，它可以看成是一个或多个独立变量的函数表达式。从通信技术角度而言，是借助电、光、声信号将文字、图像、语声、数码等信息从甲地传递到乙地或对不同信号进行各种形式的处理。

信号的描述方式主要有两种：一种是解析函数表达形式；另一种是图像表达形式。信号的独立变量与其函数的依托关系是多种形式的，如以时间特征量作为自变量来表示信号则称之为时域表示法，即把一个信号随时间变化的规律用 $x = x(t)$ 的解析函数表达式描述出来，或通过图像的形式描述出来。

1.1.2　信号的分类

由语声、图像、数码等形成的电信号，其形式是多种多样的，根据其本身的特征，可进行如下分类。

1. 确定性信号与随机信号

如果信号可以表示为一个或几个自变量的确定函数，则称此信号为确定性信号。如果一个信号在发生以前无法确切地知道它的波形，即该信号没有确定的函数表达式，而只能预测该信号对某一数值的概率，这样的信号称之为随机信号。

2. 周期信号与非周期信号

如果一个信号每隔固定的时间 T 精确地再现该信号的本身则称此为周期信号。周期信号具有两大特点，即周而复始且无始无终。一个时间周期信号的表达式为

$$x(t) = x(t \pm nT) \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

作为非周期信号则无固定时间长度的周期。

3. 连续时间信号与离散时间信号

如果在所讨论的时间间隔内，除若干个不连续点之外，对于任意时间值都可给出确定的函数值，此信号就称为连续信号，对应的函数用 $x(t)$ 表示。连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的（只取某些规定值）。时间和幅值都为连续的信号又称为模拟信号。离散信号在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间没有定义。函数符号写作 $x(n)$，仅当 n 为整数时 $x(n)$ 才有定义。如果离散时间信号的幅值是连续的，则又可取名为抽样信号，另一种情况是时间与幅值都具有离散性，这种信号又称为数字信号。

4. 能量信号与功率信号

若信号 $x(t)$ 能量有限，即 $0 < E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\mathrm{d}t < \infty$，此时 $P=0$，则称该信号为能量信号；若信号 $x(t)$ 功率有限，即 $0 < P = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\mathrm{d}t < \infty$，此时 $E=\infty$，则称该信

号为功率信号。对于周期信号，其能量随着时间的增加可以趋于无限，但功率是有限值，所以周期信号属于功率信号，而非周期信号可以是能量信号，也可以是功率信号。

1.1.3 常用单元信号

1. 正弦信号

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

式中：A 为振幅；φ 为初位相；ω 为角频率。

2. 指数信号

$$x(t) = Ae^{at} \qquad -\infty < t < \infty$$

式中：a 为任意常数。

3. 抽样信号

$$x(t) = \frac{\sin t}{t} = Sa(t)$$

4. 高斯信号

$$x(t) = Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

5. 单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

6. 单位冲激信号 $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

7. 符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

8. 单位斜变信号 $r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

9. 冲激偶信号 $\delta'(t)$

冲激函数的微分（阶跃函数的二阶导数）将呈现正、负极性的一对冲激，称为冲激偶信号。

1.1.4 信号的运算

1. 信号和、积运算

信号和与积运算是指信号代数相加与相乘。

2. 信号时移运算

$x(t) \to x(t+a)$。当 $a>0$ 时，信号波形图左移；当 $a<0$ 时，信号波形图右移。

3. 信号尺度变换

$x(t) \to x(at)$。其中 a 为时间轴上的压扩系数，a 可以为正，也可以为负，但 $a \neq 0$。

若 $a>1$，则将 $x(t)$ 图像在时间轴上压缩到 $1/a$ 倍即得到 $x(at)$ 的图像；若 $0<a<1$，

则将 $x(t)$ 图像在时间轴上扩展到 $1/a$ 倍而得到 $x(at)$ 的图像。

4. 信号反褶运算

$x(t) \rightarrow x(-t)$。将原信号 $x(t)$ 图像相对纵轴作反褶。

5. 信号幅度变换运算

$x(t) \rightarrow ax(t)$。将 $x(t)$ 图像上每个时刻对应的值变为它的 a 倍，就得到 $ax(t)$ 的图像。

6. 信号微、积分运算

信号微分运算注意信号在间断点处的微分结果应是一个冲激信号。信号积分运算注意在做分段积分时，前一段积分对后面积分的影响。

1.1.5　信号的分解与合成

1. 分解为直流分量 x_D 与交流分量 $x_A(t)$ 之和

$$x(t) = x_D + x_A(t)$$

信号平均值即信号的直流分量。从原信号中去掉直流分量即得信号的交流分量。

2. 分解为偶分量 $x_e(t)$ 与奇分量 $x_o(t)$ 之和

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

3. 分解为无穷多连续冲激信号之和

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

4. 分解为实分量 $x_r(t)$ 与虚分量 $x_i(t)$ 之和

$$x(t) = x_r(t) + \mathrm{j}x_i(t)$$

5. 表示为正交函数分量之和

三角函数集合形式

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

复指数函数集合形式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

1.1.6　系统的模型

系统模型的建立是有一定条件的，对于同一物理系统，在不同条件下，可以得到不同形式的数学模型。从另一方面讲，对于不同的物理系统，经过抽象和近似，有可能得到形式上完全相同的数学模型。

如果系统数学模型、起始状态以及输入激励信号都已确定，即可运用数学方法求解其响应。系统分析的过程，是从实际物理问题抽象为数学模型，经数学解析后再回到物理实际的过程。

1.1.7　系统的分类

1. 连续时间系统与离散时间系统

连续时间系统是指输入、输出及状态量都是时间 t 的连续函数，其数学模型是微分方程。离散时间系统是指输入、输出都是离散 n 的变量（n 为整数集合），其数学模型是差分方程。

2. 即时系统与动态系统

若系统响应信号只取决于同时刻的激励信号，而与它过去的工作状态（历史）无关，则为无记忆系统，即即时系统，其用代数方程描述。

若系统响应信号不仅取决于同时刻的激励信号，而且与它过去的工作状态有关，则为动态系统，其数学模型是微分方程或差分方程。

3. 集总参数系统与分布参数系统

只由集总参数元件组成的系统称为集总参数系统，其数学模型是常微分方程。含有分布参数元件的系统是分布参数系统（如传输线、波导等），其数学模型是偏微分方程。

4. 线性系统与非线性系统

具有叠加性与均匀性（也称齐次性）的系统称为线性系统。所谓叠加性是指当几个激励信号同时作用于系统时，总的输出响应等于每个激励单独作用所产生响应之和；而均匀性的含义是，当输入信号乘以某常数时，响应也倍乘相同的常数。不满足叠加性或均匀性的系统是非线性系统。

5. 时变系统与时不变系统

时变系统是指系统参数随时间变化，其数学模型应是变系数微分方程或变系数差分方程。非时变系统的重要性质就是系统参数不随时间而改变。其数学模型是常系数微分方程或常系数差分方程。

6. 可逆系统与不可逆系统

若系统在不同激励信号作用下产生不同的响应，则称此系统为可逆系统。若系统在不同的激励信号作用下产生了相同的响应，则为不可逆系统。

7. 因果与非因果系统

若系统任何时刻的响应只取决于激励的现在与过去值，而不取决于激励的将来值，则为因果系统。若系统的响应发生在激励之前，没有激励就有响应，则为非因果系统。

8. 稳定系统与非稳定系统

稳定系统，是指对于有限（有界）激励只能产生有限（有界）响应的系统。

1.1.8 系统分析方法

在建立系统模型方面，系统的数学描述方法可分为两大类型，一类是输入—输出描述法，另一类是状态变量描述法。

从系统数学模型的求解方法来讲，大体上可分为时间域方法与变换域方法两大类型。时间域方法直接分析时间变量的函数，研究系统的时间响应特性，或称时域特性。变换域方法将信号与系统模型的时间变量函数变换成相应变换域的某种变量函数。例如，傅里叶变换（FT）以频率为独立变量，以频域特性为主要研究对象；而拉普拉斯变换（LT）与 Z 变换（ZT）则注重研究极点与零点分析，利用 S 域或 Z 域的特性解释现象和说明问题。

1.2 典型例题

例 1-1 分别求下列各周期信号的周期 T。

(1) $\cos(10t)-\cos(30t)$；

(2) e^{j10t}；

(3) $[5\sin(8t)]^2$。

解：(1) 由于 $\omega_1:\omega_2=m_1:m_2=10:30=1:3$，所以其周期为

$$T=m_iT_i=m_i\frac{2\pi}{\omega_i}=1\times\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$$

(2) 由欧拉公式，得 $e^{j10t}=\cos(10t)+j\sin(10t)$，$T=\dfrac{2\pi}{10}=\dfrac{\pi}{5}$

(3) $[5\sin(8t)]^2=25\sin^2(8t)=25\times\dfrac{1-\cos(16t)}{2}=\dfrac{25}{2}-\dfrac{25}{2}\cos(16t)$，$T=\dfrac{2\pi}{16}=\dfrac{\pi}{8}$

例 1-2　计算下列信号的能量或功率。

(1) $\cos(t)\varepsilon(t)$；

(2) $e^{-2t}\varepsilon(t)$；

(3) $t^2e^{-2t}\varepsilon(t)$；

(4) $e^{-2|t|}$。

解：(1) $E=\displaystyle\int_0^\infty\cos^2(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty[1+\cos(2t)]dt=\infty$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(t)dt=\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[1+\cos(2t)]dt=0.5W$$

因此，该信号是功率信号。

(2) $E=\displaystyle\int_0^\infty e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^\infty=0.5J$，因而是能量信号。

(3) $E=\displaystyle\int_0^\infty t^2e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2d(e^{-2t})=-\frac{1}{2}\left[(t^2e^{-2t})\Big|_0^\infty-2\int_0^\infty te^{-2t}dt\right]$

$$=\int_0^\infty te^{-2t}dt=-\frac{1}{2}\int_0^\infty td(e^{-2t})=-\frac{1}{2}\left[(te^{-2t})\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-2t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2t}dt=-\frac{1}{4}e^{-2t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{4}J$$

(4) $E=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-2|t|}dt=\int_{-\infty}^0e^{2t}dt+\int_0^\infty e^{-2t}dt=\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_{-\infty}^0-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^\infty=1J$

例 1-3　试求下列函数值。

(1) $y_1(t)=2\varepsilon(2t+4)\delta(t+2)$；

(2) $y_2(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\delta(t^2-4t+3)dt$；

(3) $y_3(t)=\displaystyle\int_{-2}^2\delta(t^2-4t+3)dt$；

(4) $y_4(t)=\dfrac{d}{dt}[e^{-t}\varepsilon(t)]$。

解：(1) $y_1(t)=2\varepsilon(2t+4)\delta(t+2)=2\varepsilon[2\times(-2)+4]\delta(t+2)=2\varepsilon(0)\delta(t+2)$

注意到 $\varepsilon(0)=0.5$，所以

$$y_1(t)=\delta(t+2)$$

(2) 解此题要注意单位冲激信号 $\delta(t^2-4t+3)$ 的性质，由于

$$t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$$

所以当 $t=1$ 以及 $t=3$ 时，$\delta(t^2-4t+3)$ 存在两个脉冲；而当 t 为其他值时，$\delta(t^2-4t+$

3) = 0。

因此

$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-4t+3)\mathrm{d}t=2$$

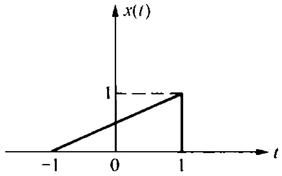

图 1-1 例 1-4 中信号 $x(t)$ 波形

(3) 按照 (2) 的分析，可得

$$\begin{aligned}y_3(t)&=\int_{-2}^{2}\delta(t^2-4t+3)\mathrm{d}t\\&=\int_{-2}^{2}[\delta(t-1)+\delta(t-3)]\mathrm{d}t=1\end{aligned}$$

(4) 由于 $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$，所以

$$\begin{aligned}y_4(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]=-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-t}\delta(t)\\&=-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\delta(t)\end{aligned}$$

例 1-4 已知信号 $x(t)$ 的波形如图 1-1 所示，画出 $x(-2t-1)$ 的波形。

解： 所求波形如图 1-2 所示。

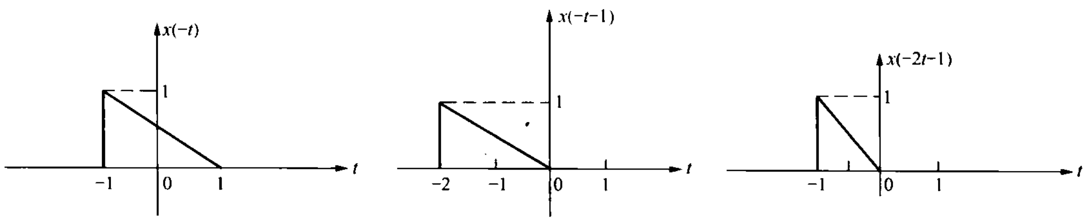

图 1-2 $x(-2t-1)$ 波形求解过程

例 1-5 系统满足 $y(t)=\int_{-\infty}^{2t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$，问该系统是否是线性的、时不变的、因果的？

解： 该系统是否是线性、时变、非因果系统。

设 $x_1(t)\rightarrow y_1(t)$，$x_1(t)\rightarrow y_1(t)$，则有

$$\alpha x_1(t)\rightarrow\alpha\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\alpha y_1(t)$$

系统满足齐次性。

又有 $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\rightarrow\alpha\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\beta\int_{-\infty}^{2t}x_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$

所以系统满足可加性，即该系统为线性系统。

因为 $x(t-t_0)\rightarrow\int_{-\infty}^{2t}x(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{2t-t_0}x(\tau)\mathrm{d}\tau\neq\int_{-\infty}^{2(t-t_0)}x(\tau)\mathrm{d}\tau=y(t-t_0)$

所以该系统是时变的。

因为当 $t>0$ 时，$y(t)$ 与未来的输入 $x(2t)$ 有关，所以该系统是非因果的。

1.3 习 题 解 答

1-1 分别判断图 1-3 所示各波形是连续时间信号还是离散时间信号，若是离散时间信号是否为数字信号？

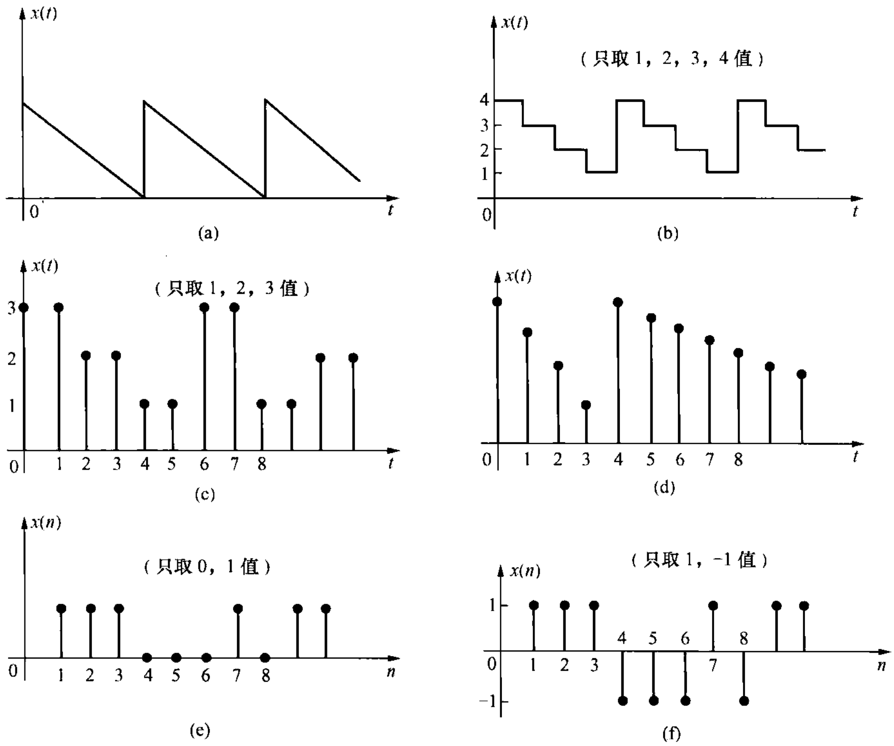

图 1 - 3　习题 1 - 1 图

解：(a) 连续时间信号；

(b) 连续时间信号；

(c) 离散时间信号，数字信号；

(d) 离散时间信号；

(e) 离散时间信号，数字信号；

(f) 离散时间信号，数字信号。

1 - 2　说明下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号，求其周期 T。

(1) $a\sin t - b\sin 3t$；　　(2) $a\sin 4t + b\cos 7t$；

(3) $a\sin 3t + b\cos \pi t, \pi = 3$ 和 $\pi \approx 3.141\cdots$；　　(4) $a\cos(\pi t) + b\sin(2\pi t)$；

(5) $a\sin\dfrac{5t}{2} + b\cos\dfrac{6t}{5} + c\sin\dfrac{t}{7}$；　　(6) $(a\sin 2t)^2$；

(7) $(a\sin 2t + b\sin 5t)^2$。

提 示

如果包含有 n 个不同频率余弦分量的复合信号是一个周期为 T 的周期信号，则其周期 T 必为各分量信号周期 $T_i(i = 1,2,3,\cdots,n)$ 的整数倍。即有 $T = m_i T_i$ 或 $\omega_i = m_i \omega$。式中 $\omega_i = \dfrac{2\pi}{T_i}$ 为各余弦分量的角频率，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ 为复合信号的基波频率，m_i 为正整数。

因此只要能找到 n 个不含整数公因子的正整数 m_1，m_2，m_3，…，m_n 使

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \cdots : \omega_n = m_1 : m_2 : m_3 : \cdots : m_n$$

成立，就可判定该信号为周期信号，其周期为

$$T = m_i T_i = m_i \frac{2\pi}{\omega_i}$$

如复合信号中某分量频率为无理数，则该信号常称为概周期信号。概周期信号是非周期信号，但如选用某一有理数频率来近似表示无理数频率，则该信号可视为周期信号。所选的近似值改变，则该信号的周期也随之变化。例如 $\cos t + \cos\sqrt{2}t$ 的信号，如令$\sqrt{2}\approx 1.41$，则可求得 $m_1=100$，$m_2=141$，该信号的周期为 $T=200\pi$。如令$\sqrt{2}\approx 1.414$，则该信号的周期变为 2000π。

解：(1) 由于 $\omega_1 : \omega_2 = m_1 : m_2 = 1 : 3$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T = m_i T_i = m_i \frac{2\pi}{\omega_i} = 2\pi$$

(2) 由于 $\omega_1 : \omega_2 = m_1 : m_2 = 4 : 7$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T = m_i T_i = m_i \frac{2\pi}{\omega_i} = 4 \times \frac{2\pi}{4} = 2\pi$$

(3) 如令 $\pi=3$，由于 $\omega_1 : \omega_2 = m_1 : m_2 = 1 : 1$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T = m_i T_i = m_i \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{2\pi}{3}$$

如令 $\pi=3.141\cdots$，由于其频率分量为无理数，则信号为非周期信号。

(4) 由于 $\omega_1 : \omega_2 = m_1 : m_2 = 1 : 2$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T = m_i T_i = m_i \frac{2\pi}{\omega_i} = 1\,\frac{2\pi}{\pi} = 2$$

(5) 由于 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = m_1 : m_2 : m_3 = 175 : 84 : 10$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T = m_i T_i = m_i \frac{2\pi}{\omega_i} = 175 \times \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = 140\pi$$

(6) $(a\sin 2t)^2 = a^2\sin^2(2t) = \frac{a^2}{2}[1-\cos(4t)]$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

(7)
$$\begin{aligned}(a\sin 2t + b\sin 5t)^2 &= a^2\sin^2(2t) + 2ab\sin(2t)\sin(5t) + b^2\sin^2(5t)\\ &= \frac{a^2}{2}[1-\cos(4t)] + ab[\cos(3t)-\cos(7t)] + \frac{b^2}{2}[1-\cos(10t)]\end{aligned}$$

由于 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 = m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = 4 : 3 : 7 : 10$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T = m_i T_i = m_i \frac{2\pi}{\omega_i} = 4 \times \frac{2\pi}{4} = 2\pi$$

1-3 说明下列信号中哪些是周期信号，哪些是非周期信号；哪些是能量信号，哪些是功率信号。计算它们的能量或平均功率。

(1) $x(t) = \frac{1}{2}\cos 3t$；

(2) $x(t) = \begin{cases} 8e^{-4t} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$；

(3) $x(t)=5\sin 2\pi t+10\sin 3\pi t \qquad -\infty<t<\infty$；

(4) $x(t)=20e^{-10|t|}\cos\pi t \qquad -\infty<t<\infty$；

(5) $x(t)=\cos 5\pi t+2\cos 2\pi^2 t \qquad -\infty<t<\infty$。

解：(1) 因为此信号是周期信号，故为功率信号。其平均功率为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{4}\cos^2 3t\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{12}\sin 6t\right)\Big|_{-T}^{T}\right]$$

$$=0.125\text{W}$$

(2) 因为 $t\to+\infty$ 时，$e^{-4t}\to 0$，所以 $x(t)$ 为非周期信号，也是能量信号。故

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}64e^{-8t}\mathrm{d}t=8\text{J}$$

(3) 由于 $\omega_1:\omega_2=m_1:m_2=2:3$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T=m_iT_i=m_i\frac{2\pi}{\omega_i}=2\times\frac{2\pi}{2\pi}=2$$

所以该信号为功率信号，其平均功率为

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[5\sin(2\pi t)+10\sin(3\pi t)]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[25\sin^2(2\pi t)+100\sin(2\pi t)\sin(3\pi t)+100\sin^2(3\pi t)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}[125-25\cos(4\pi t)+100\cos(\pi t)-100\cos(5\pi t)-100\cos(6\pi t)]\mathrm{d}t$$

$$=62.5\text{W}$$

(4) 可知该信号为非周期信号，该信号的能量为

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}[20e^{-10|t|}\cos(\pi t)]^2\mathrm{d}t$$

$$=400\times 2\int_{0}^{\infty}e^{-20t}\frac{1+\cos(2\pi t)}{2}\mathrm{d}t$$

$$=400\int_{0}^{\infty}e^{-20t}\mathrm{d}t+400\int_{0}^{\infty}e^{-20t}\cos(2\pi t)\mathrm{d}t$$

$$=20+\frac{2000}{100+\pi^2}=38.18\text{J}$$

(5) 令 $\pi=3$，由于 $\omega_1:\omega_2=m_1:m_2=5:6$，所以该信号是周期信号，其周期为

$$T=m_iT_i=m_i\frac{2\pi}{\omega_i}=2$$

其平均功率为

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x(t)]^2\mathrm{d}t=2\times\frac{1}{2}\int_{0}^{1}[\cos(5\pi t)+2\cos(2\pi^2 t)]^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{1}[\cos^2(5\pi t)+4\cos(5\pi t)\cos(2\pi^2 t)+4\cos^2(2\pi^2 t)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}[5+\cos(10\pi t)+4\cos(5\pi+2\pi^2)t+4\cos(5\pi-2\pi^2)t+4\cos(4\pi^2 t)]\mathrm{d}t$$

$$=2.5\text{W}$$

1 - 4 粗略绘出下列各函数式表示的信号波形。

(1) $x(t)=3-\mathrm{e}^{-t} \quad t>0$；

(2) $x(t)=5\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t} \quad t>0$；

(3) $x(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin 2\pi t \quad 0<t<3$；

(4) $x(t)=\dfrac{\sin at}{at}$；

(5) $x(n)=(-2)^{-n} \quad 0<n\leqslant 6$；

(6) $x(n)=\mathrm{e}^{n} \quad n\leqslant n<5$；

(7) $x(n)=n \quad n<n<k$。

解：各函数式所表示的信号波形如图 1 - 4 所示。

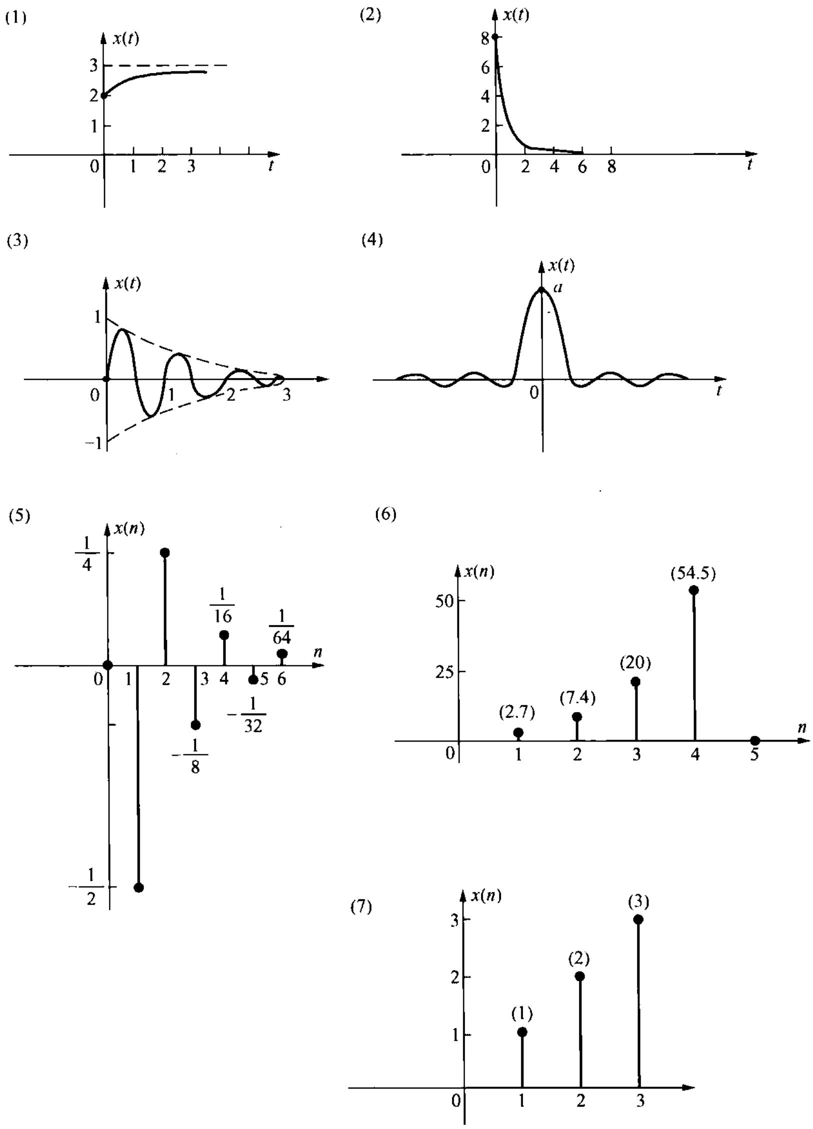

图 1 - 4 习题 1 - 4 图

1－5　写出图 1－5（a）、（b）、（c）所示各波形的函数式。

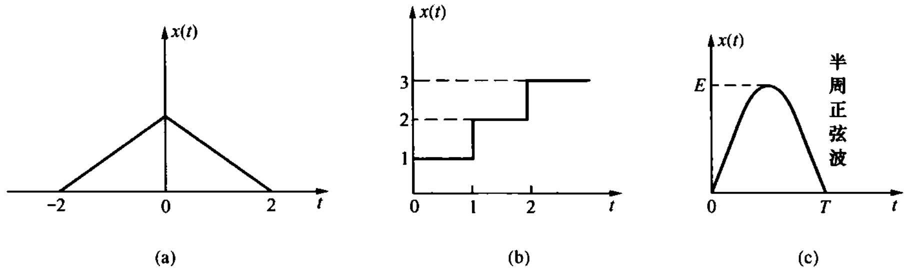

图 1－5　习题 1－5 图

解：（1）由图 1－5（a）可写出

$$x(t)=\begin{cases}1+\frac{1}{2}t & -2\leqslant t\leqslant 0\\ 1-\frac{1}{2}t & 0<t\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

于是

$$x(t)=\left(1-\frac{|t|}{2}\right)[\varepsilon(t+2)-\varepsilon(t-2)]$$

（2）由图 1－5（b）可写出

$$x(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 1 & 0<t\leqslant 1\\ 2 & 1<t\leqslant 2\\ 3 & t>2\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}x(t)&=[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+2[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]+3[\varepsilon(t-2)]\\&=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)\end{aligned}$$

（3）由图 1－5（c）可写出

$$x(t)=\begin{cases}E\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

于是

$$x(t)=E\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$$

1－6　绘出下列各时间函数的波形图，注意它们的区别。

(1) $t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$；

(2) $t\varepsilon(t-1)$；

(3) $t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\varepsilon(t-1)$；

(4) $(t-1)\varepsilon(t-1)$；

(5) $-(t-1)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$；

(6) $t[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)]$；

(7) $(t-2)[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)]$。

解：各函数式所表示的信号波形如图 1 - 6 所示。

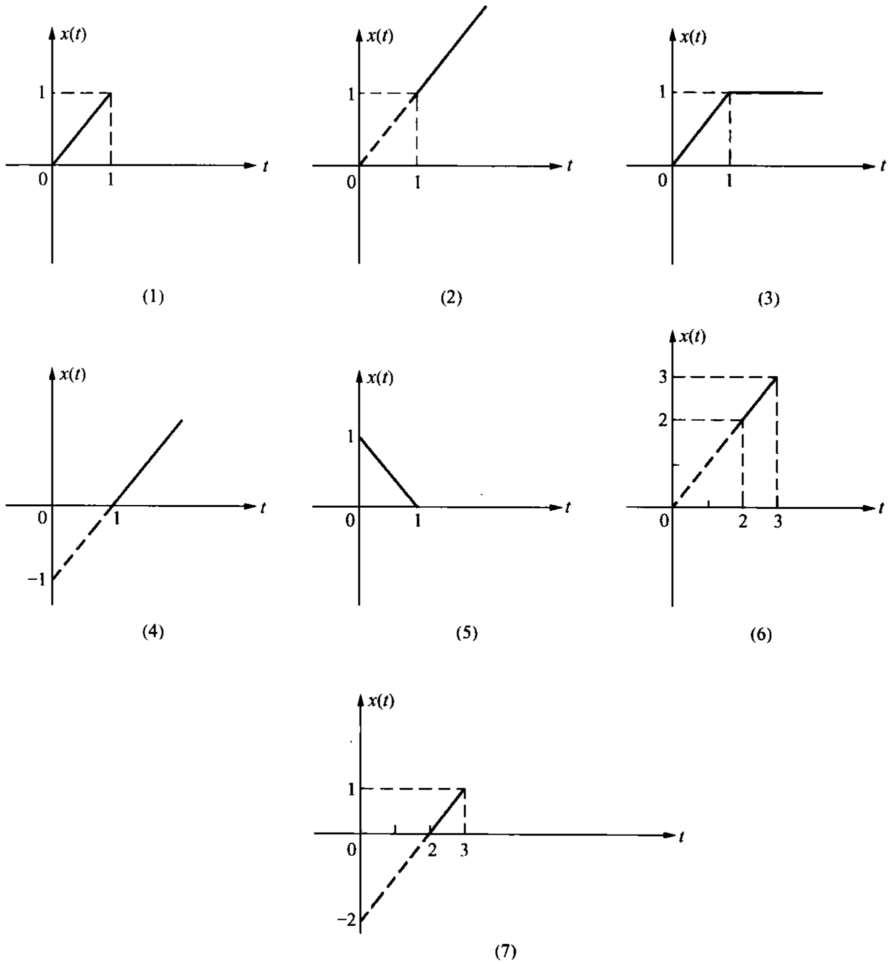

图 1 - 6　习题 1 - 6 图

1 - 7　绘出下列各时间函数的波形图，注意它们的区别。

(1) $x_1(t)=\sin(\omega t)\varepsilon(t)$；

(2) $x_2(t)=\sin[\omega(t-t_0)]\varepsilon(t)$；

(3) $x_3(t)=\sin(\omega t)\varepsilon(t-t_0)$；

(4) $x_4(t)=\sin[\omega(t-t_0)]\varepsilon(t-t_0)$。

解：各函数式所表示的信号波形如图 1 - 7 所示。

1 - 8　应用冲激信号的抽样特性，求下列表示式的函数值。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\delta(t)\mathrm{d}t$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0-t)\delta(t)\mathrm{d}t$；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varepsilon\left(t-\frac{t_0}{2}\right)\mathrm{d}t$；

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varepsilon(t-2t_0)\mathrm{d}t$；

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{e}^{-t}+t)\delta(t+2)\mathrm{d}t$；

(6) $\int_{-\infty}^{\infty} (t+\sin t)\delta\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}t$；