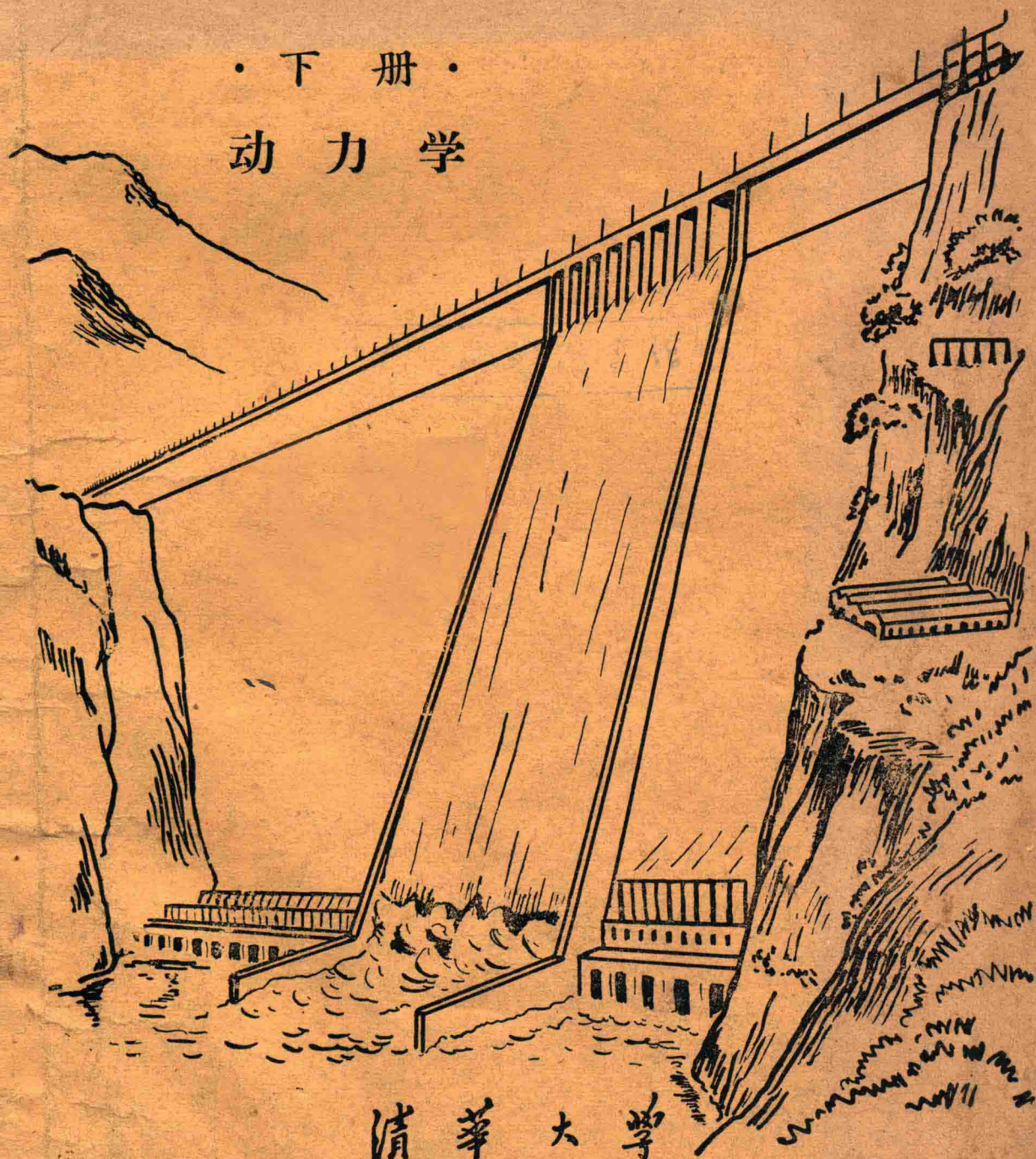


理論力學習題集

· 下 册 ·

动 力 学



清 華 大 学

理 論 力 学 教 研 組 編

1959 ★ 北京

基本定律的运用

- 1) 运用动力学的基本定律解决质点动力学的第一类问题，主要是已知质点的运动规律时：求质点所受的未知力，通常主要是约束反力。
- 2) 必须在学习动力学的开始就建立起分析问题的正确方法，动力学的问题牵涉到力与运动的关系，因此必须仔细研究问题的两个方面：
 - (1) 分析质点的受力情况：从一切力都是两物体之间的相互作用这一概念出发分清主动力与约束反力，约束反力的数值是未知的，但它们的方向可从约束的性质来决定，应该将质点受到的一切力用受力简图来表示。
 - (2) 分析质点的运动状态：应该从问题的条件搞清质点的运动的几何性质，例如运动的轨迹，在某瞬时的速度与加速度，为此，必须熟知点的运动学的方法与结论。
- 3) 质点动力学的基本方程式通常可用直角坐标系及自然坐标系中的两种投影式来表示：

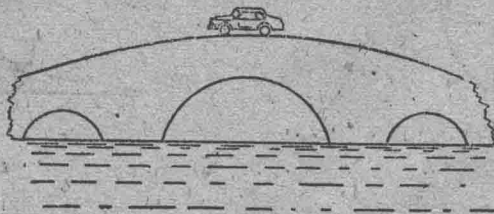
$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = m \ddot{x} ; \\ \Sigma F_y = m \ddot{y} ; \\ \Sigma F_z = m \ddot{z} . \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_\tau = m w_\tau = m \frac{dv}{dt} ; \\ \Sigma F_n = m w_n = m \frac{v^2}{\rho} ; \\ \Sigma F_b = 0 . \end{array} \right.$$

应该根据问题的条件考虑选用何种坐标系，在这些方程式中是以力在坐标轴上的投影表现出来，应该正确地判断投影的正负号，并理解所得结果的正负号的实际意义。

- 4) 初步了解动反力的概念。

1. 汽车重 1500 公斤，以 $v=10$ 公尺/秒的速度驶过拱桥；桥之中点之曲率半径为 $\rho=50$ 公尺。求汽车经过桥中部时对桥之压力。

答： $N=1.19 \times 10^3$ 公斤。

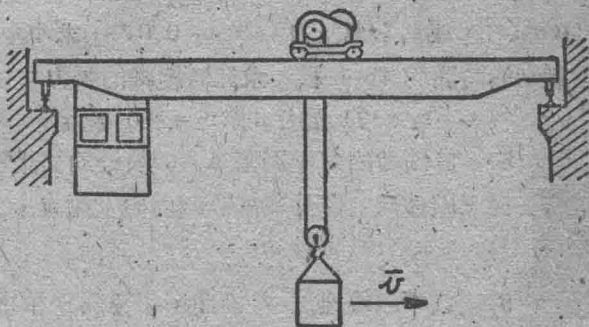


题 1

2. 重 $Q=10$ 吨的重物随同跑车以 $v=1$ 公尺/秒的速度沿桥式吊车的水平桥架而移动；重物之重心到悬挂点的距离为 $l=5$ 公尺。当吊车突然停止时，重物因惯性而继续运动，开始绕悬挂点摆动，试求钢缆的最大张力。设摆至最高位置之偏角为 8° ，求此时之张力。

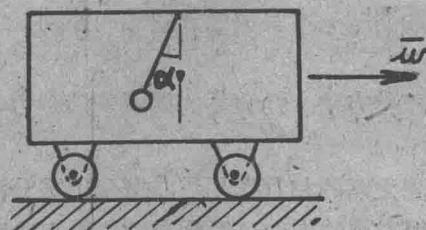
答： $s=1.02$ 吨

$s_1=0.99$ 吨

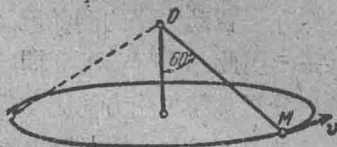


题 2

3. 機車以等加速度沿直線軌道行駛，車廂內一單擺與鉛垂綫成 $\alpha=5^\circ$ 相對地靜止，試求機車的加速度 w 。



題 3



題 4

4. 重 1 公斤的重物 M 繫於 30 公分長的綫上，綫的另一端繫於固定點 O 。重物在水平面內作圓周運動，成一錐擺形狀，且綫與鉛垂綫成 60° 角。求重物的速度 v 與綫的張力 T 。

答： $v=2.10$ 公尺/秒

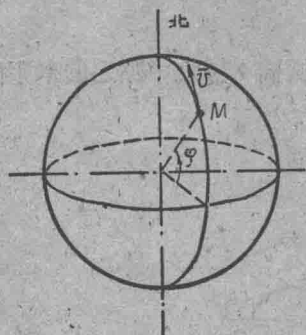
$T=2$ 公斤。

5. 已知一機械重量為 10 噸置於火車車廂中，機械與車廂地面之滑動摩擦係數 $f=0.25$ 求機械不發生滑動時車廂之最大加速度。

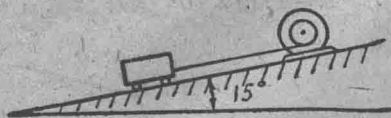
答： $w=2.46$ 公尺/秒²。

6. 火車以 $v=72$ 公里/小時速度沿經綫向北行駛，如列車重 2000 噸，當地緯度 $\varphi=45^\circ$ ，試求火車加於軌道的側壓力。

答： $F=420$ 公斤。



題 6



題 7

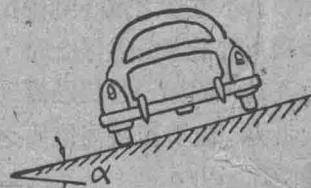
7. 載貨的小車重 700 公斤，以 $v=1.6$ 公尺/秒之速度沿纜車軌道而下降；軌道的傾角 $\alpha=15^\circ$ ，運動之總阻力係數 $f=0.015$ ，求小車等速下降時，吊小車之纜繩的張力；又設小車制動的時為 $t=4$ 秒，求此時纜繩的張力。

答： $s_1=171$ 公斤； $s_2=200$ 公斤。

8. 篩礦砂的篩作振幅 $a=5$ 公分的簡諧運動。當某頻率時，篩上礦砂碎片開始與篩分開而向上拋起，求此最小頻率。

答： $k=14$ 1/秒。

9. 汽車以等速度 v 沿曲率半徑為 ρ 的圓弧路面行駛，欲使二輪之垂直壓力相等。問路面的斜度 α 應為多少度？



題 9

質點運動微分方程式的積分

- 1) 運用質點運動微分方程式解決質點動力學的第二類問題，主要是自由質點在已知力作用下求其運動規律的問題。
- 2) 在解決這類問題時，仍然需要仔細研究質點在任一瞬時（或任一位置）的受力情況和運動狀態，然後選定適當的座標系，以便使得力的投影的表達式儘可能簡單，最後再根據質點在任意瞬時（或位置）的受力情況建立質點運動微分方程式。
- 3) 根據力是常數、是位置、速度或時間的函數及具體問題中所要求的結果（位置、速度或時間）靈活應用兩種分離變量的積分法：

$$w = \frac{dv}{dt} \text{ 或 } w = v \frac{dv}{dx}。$$

- 4) 運動規律還決定於起始條件，通常是用定積分法來求運動微分方程式的解，而運動的起始條件可以表現在積分的上下限中。

10. 質點 M 沿斜面上升，斜面與水平面成 $\alpha = 30^\circ$ 角，開始時質點的速度等於 15 公尺/秒。摩擦係數 $k = 0.1$ 。問此質點在停止前走了多少路程？又在多少時間內走過這段路程？

答： $s = 19.6$ 公尺， $T = 2.6$ 秒。

11. 質點為 m 的質點帶有電荷 e ，在一均勻的電場中，電場強度 $E = A \sin kt$ (A, k 均為常數)。如已知在電場中，質點所受的力 $F = eE$ ，其方向與 E 相同，求質點的運動。設質點的初速等於零，且其起始位置取為座標原點。重力的影响略去不計。

12. 電車司機藉逐漸開啓變阻器以增加電車發動機的动力，使拉力由零起而與時間成正比地增加，在每秒內增加 120 公斤。試根據下列數據求電車運動的距離曲綫：車重為 10 噸，摩擦阻力為常數，等於 0.2 噸，電車的初速等於零。

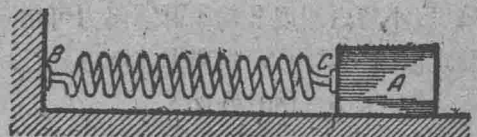
答： 電車在電流通後經 $\frac{5}{3}$ 秒而開始運動；此時以後，

$$\text{距離 } S = 0.01962 \left(t - \frac{5}{3} \right)^3 \text{ 公尺。}$$

13. 欲在地面上鉛直向上射出一物體，使它一去不復返，設只考慮地球引力，此力與物體到地心的距離平方成反比，問應給物體多大初速？地球半徑等於 6370 公里，在地面上的重力加速度等於 980 公分/秒²。設按此脫離速度射出物體，試求以後的運動規律。

14. 重為 1 公斤之物體，在水中沿水平面運動，當速度大於 $\frac{1}{2}$ 公尺/秒時，阻力與速度平方成正比，比例常數 $k_1 = 0.2$ ，當速度小於 $\frac{1}{2}$ 公尺/秒時與速度一次方成正比，比例常數 $k_2 = 0.1$ ，今給物體以 8 公尺/秒的初速度，求當物體停止前走過多少距離？

15. 重塊重量 2 公斤，由彈簧繫住，開始彈簧為原來長度，今將彈簧拉長 20 公分後放開。已知彈簧每伸長 1 公分需 0.5 公斤的力，求重塊的運動規律。



答： $x = 20 \cos 15.7t$ 公分

題 15

16. 不前進的潛水艇受到較小的沉力 D 而向水底下沉。在沉力不大時，水的阻力可以視為與下沉速度的一次方成正比並等於 ksv ，其中 k 為比例常數， s 為潛水艇的水平投影面積， v 為下沉速度。如當 $t=0$ 時， $v_0=0$ ，求下沉速度及在時間 T 內潛水艇下沉的路程 s_0 。

17. 一輪船排水量為 10000 噸，以 16 公尺/秒的速度航行。水的阻力與輪船速度之平方成正比，在速度為 1 公尺/秒時等於 30 噸。問當船速降為 4 公尺/秒時，輪船航行了多少路程？又需時間多少？

答： $S=47.1$ 公尺； $T=6.38$ 秒。

18. 一物重 P ，以初速度 v_0 將其鉛垂向上拋起，如空氣阻力可以公式 kv^2 來表示，其中 v 為物體的速度。問物體所能達到的高度及所經的時間各為多少？

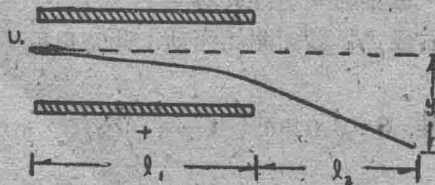
19. 在均勻磁場 ($H=$ 常向量) 中的質量為 m 帶電荷 e 的粒子所受的力 $F=\frac{e}{c}[v \times H]$ ，其中 c 為光速， v 為粒子速度，如粒子初速度為 v_0 ，且垂直於 H 。求粒子運動軌跡。

20. 質量為 m 帶電荷 e 的粒子在均勻電場 ($E=-a j=$ 常向量) 中所受的力 $F=eE$ 。如粒子初速度為 v_0 ， $v_0=v_0 \cos \alpha i+v_0 \sin \alpha j$ ，求粒子運動軌跡。

21. 傘兵帶降落傘從高空無初速度下降，傘兵體重 75 公斤，所受空氣阻力 $F=\frac{1}{2}c\rho sv^2$ ，其中 c 為無因次阻力係數， s 為與運動方向垂直的最大截面積，對完全張開的球面降落傘而言， $c=0.96$ ， $s=50$ 公尺²； ρ 是空氣密度，在標準狀態下 $\rho=1/8$ [公斤-秒²/公尺³]。求傘兵下降的極限速度，及到達此極限速度 99.5% 所需的時間。

答： $v_m=5$ 公尺/秒 $t=1.9$ 秒。

22. 質量為 m 帶電荷 e 的電子以垂直於均勻電場 E 的速度 v_0 進入電場 (長 l_1 的平板電容器) 已知電子在電場中所受之力 $F=eE$ 。求電子自均勻電場 E 中穿出后，在磁場強度小到可以不計的區域中前行了 l_2 距離后之總的偏離 $y_2=?$



題 22

23. 電氣機車及列車共重 40 噸，沿水平軌道作直線運動，電氣機車的牽引力 $F=1000$ 公斤，阻力 $R=A+Bv=100+2v$ ，其中 R 以公斤計， v 以公里/小時計。試求列車開始運動后經過多少時間和距離達到 12 公里/小時之速度。取 $g=10$ 公尺/秒²。

24. 列車達到 90 公里/小時的速度后，司機關上氣門。問列車通過多少路程后降到 36 公里/小時之速度？為了計算阻力可用經驗公式 $F=2.5+0.5v^2$ ， F (公斤) 為每噸列車重量所受之阻力，其中 v 為列車速度以公里/小時計。取 $g=10$ 公尺/秒²。

答： $S=180$ 公尺。

25. 當直徑小於 0.085 公厘的物體在液體中運動時，它受到的阻力可用斯托克公式計算：

$$F=6\pi\eta vr$$

其中 η 為液體之阻力係數。當溫度為 20°C 時水的阻力係數 $\eta=0.01$ 達因-秒/公分²， F 以達因計， v 為運動之速度以公分/秒計， r 為物體之半徑以公分計。今求直徑為 0.08 公厘之細砂在水中下沉的極限速度。（細砂之比重為 2.65 ）。並以此極限速度來計算細砂到達水深為 3 公尺之沉澱池池底時所需之時間。

答： $v=0.55$ 公分/秒； $t=550$ 秒。

質点的自由振動

- 1) 當質點在運動時，如果在任一位置所受的力都具有使質點回到平衡位置的趨勢，這種力稱為恢復力，在恢復力作用下，質點將以平衡位置為振動中心進行諧振動。

自由振動的中心問題在於確定質點的自然頻率，週期和振幅。

- 2) 以平衡位置為坐標原點，分析質點在任一位置所受的恢復力，其運動的微分方程式具有以下形式：

$$\ddot{x} + k^2x = 0。$$

應該明確式中 k 即為質點的自然頻率。

- 3) 質點的自由振動的頻率只決定於系統本身之性質，而與起始條件無關，因此，在很多情況下，應該能夠直接根據質點的質量與系統的相當剛度或靜止變形來求自然頻率：

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_s}}。$$

其中 c 為相當剛度，表示從平衡位置有單位位移時的彈性恢復力；

λ_s 為平衡時由於重力所引起的彈性位移。

- 4) 振動的振幅與初位相由起始條件確定。
5) 了解衰減振動的主要性質：將衰減振動方程式建立后：

$$\ddot{x} + 2nx + k^2x = 0。$$

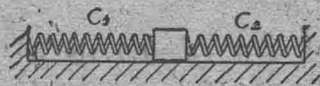
運動性質完全由系統的兩個參數 k, n 所決定。

只有當 $k > n$ 時，運動才具有振動的形式，在這情況下阻尼對振動的影響主要表現在兩方面：

(1) 振動的頻率 $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ 低於自然頻率。

(2) 振幅按等比級數規律遞減： $\frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{nT_1}$

26. 重物重量為 P ，置於光滑水平桌面上，重物夾在兩彈簧之間，彈簧各具有不同之彈簧常數 C_1 與 C_2 ，今將重物從靜止位置向右移動一段距離 δ ，然後釋放，求其運動規律，振幅及週期。



題 26

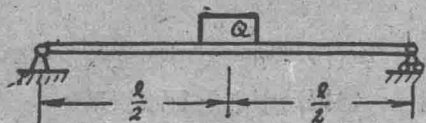
27. 求下列各系統之自然頻率與週期。

(a) 工字樑長 $l=4$ 公尺，截面轉動慣量 $J=180$ 公分⁴，材料彈性係數 $E=2.16^6$ 公斤/

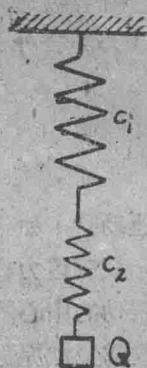
公分²；中部載荷 $Q=200$ 公斤。

答： $k=33.8$ 1/秒。 $T \approx 0.02$ 秒。

(b) 重為 Q 的質點與兩剛度不同的彈簧串聯。



題 27 (a)

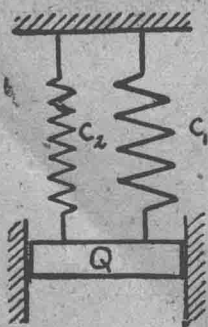


題 27 (b)

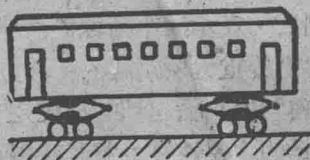
(c) 重為 Q 的質點與兩剛度不同的彈簧並聯。

(d) 車廂的每個彈簧上的荷載為 P 公斤；彈簧在此荷載下平衡時被壓短了 5 公分。求車廂在彈簧上自由振動的週期。彈簧的彈力與其縮短的长度成正比。

答： $T=0.45$ 秒。



題 27 (c)



題 27 (d)

(e) 機器的基礎放在有彈性的土壤上，如基礎與機器共重 $Q=90$ 噸，基礎的底面積 $S=15$ 平方公尺。土壤的剛度系數 $C=\lambda S$ ，其中 $\lambda=3$ 公斤/公分² 稱為土地的比剛度，求機器自由振動的週期。

答： $T=0.09$ 秒。

28. 升降機的廂籠重 $Q=3$ 噸，以速度 $v=3$ 公尺/秒降落於礦井中。由於吊索上端突然嵌住，廂籠中止了下降。如吊索的剛性系數 $c=2.75$ 噸/公分，求此后廂籠的運動。吊索質量不計。

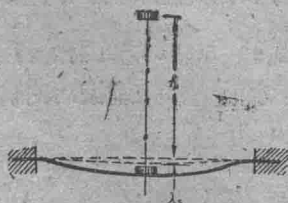
答： $x=0.1 \sin 30t$ 公尺。

29. 重物 Q 的初速為零，自高度 $h=1$ 公尺處落下，打在水平樑的中部。樑的兩端系固定的，在荷載 Q 之下，該樑中點的靜止撓度等於 0.5 公分。如自重物在樑上的靜止平衡位置作出鉛垂向下之軸，並以此軸作為此后重物在樑上之運動所參考的座載軸，試寫出重物運動的方程式。樑的重量不計。

答： $x = 10 \sin \left(44.3 t - \frac{\pi}{60} \right)$ 。



題 28

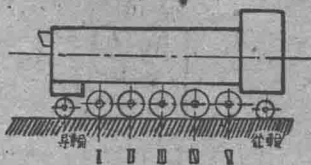


題 29

30. 和平型機車總重為 134 噸，簧上重量為 105.5 噸，每一個輪子上有一組彈簧，每組彈簧的剛度如下：

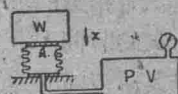
導輪	470 公斤/公厘；
主輪 I→V	164 公斤/斤厘；
從輪	164 公斤/公厘。

求機車的浮沉頻率。(即機車作上下平移振動時的自然頻率)。



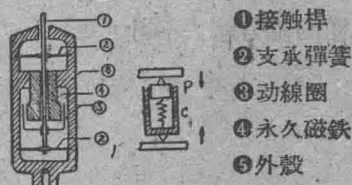
題 30

31. 對於一些需要頻率較低的系統來說，使用空氣彈簧是很方便的。若空氣的比熱 $\gamma = 1.4$ ，活塞的橫截面為 A ，在平衡位置時空氣的壓力及體積為 P_0, V_0 (P_0 為單位面積上所受的力)，若設空氣的變形很小 (即 x 很小)，求重物 W 的振動頻率的近似值。



題 31

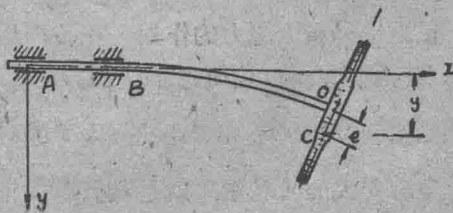
32. 用於測量相對位移的拾振器如圖所示。已知拾振器彈性系統的剛度 $C = 4.25$ 公斤/公分，運動系統 (包括接觸桿與線圈) 重 $P = 10$ 克。設被測物體間的初始壓力為 0.85 公斤。求當測定頻率為 200 赫及 1000 赫時的容許測定振幅各為多大？



題 32

33. 衝動式汽輪機轉子如圖所示。已知於於外懸轉盤自身重量所引起的靜止撓度 $\delta_{st} = 0.025$ 公分，轉子的工作轉速 $n = 8000$ 轉/分，並設轉盤的偏心距為 e 。

求轉子的臨界轉速 n_k 為多少轉/分？又在工作轉速的轉盤的重心偏離 AB 軸綫的距離 y 為偏心距 e 的幾分之幾？(不計轉盤的迴轉效應)



題 33

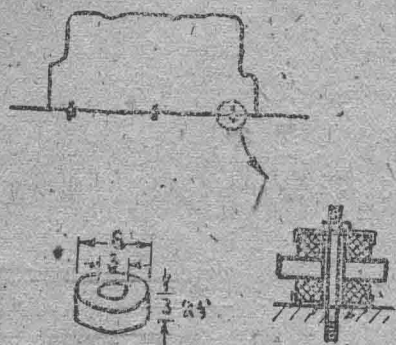
34. 動力系學生所裝修的柴油機爲了減少基礎的振動影響，在機器底座裝有緩衝器，即機器底座並不直接固聯在地腳螺絲上，而是底座上下都配置有橡皮墊圈，每一墊圈的尺寸如圖所示。從試驗知橡膠的彈性係數 $E=160$ 公斤/公分²。基礎共有六個地腳螺絲與機器相聯。試確定機器沿鉛垂方向振動的自然頻率。已知柴油機總重 1500 公斤。

答： $\omega=135$ 1/秒。

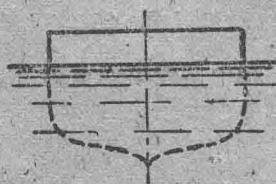
提示：在材料力學中彈性直桿的拉伸公式爲：
$$\frac{P}{F} = E \frac{\Delta l}{l}$$

35. 排水量爲 $P=5000$ 噸的海船浮在水面時截水面積 $S=1150$ 公尺²，海水比重 $\gamma=1.03$ 噸/公尺³。求船在水面上作鉛垂振動的自然振動頻率及週期。

答： $T=4.1$ 秒。

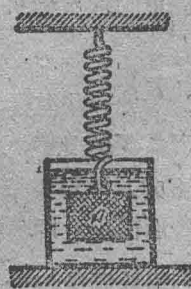


題 34



題 35

36. 庫倫曾以下面的方法來測定液體的黏滯係數。在彈簧上懸一薄板 A，他先讓此薄板在空氣中振動，然後將薄板放在欲測黏滯係數的液體中令其振動，再分別測得每次向上向下擺動一次的時間：在第一種情況下爲 T_1 ，在第二種情況下爲 T_2 。液體與薄板間的阻力等於 $2skv$ 公斤，其中 $2s$ 爲薄板的表面積， v 爲其速度，而 k 則爲黏滯係數。如薄板重 P 公斤，試根據由實驗測得的數據 T_1 與 T_2 求黏滯係數 k 。薄板與空氣間的阻力略去不計。



題 36

質点的强迫振動

1. 振動系統在週期性干擾力作用下引起的振動稱爲强迫振動，强迫振動的中心問題在於確定振動的振幅。
2. 正確地分析干擾力的作用，在各種强迫振動問題中干擾力的本質是不相同的，但運動微分方程式都具有以下的共同形式：

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$$

這方程式的“特解”就是我們所要找的强迫振動的規律：

$$x = A \sin(pt + \delta - \theta)$$

其中振幅 $A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$ 。

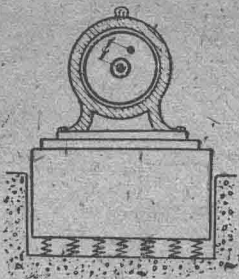
當 $k \gg p$ 或 $k \ll p$ 時，阻尼的影響可略去不計，振幅可按以下的無阻尼情況進行計算：

$$A = \frac{h}{|k^2 - p^2|}$$

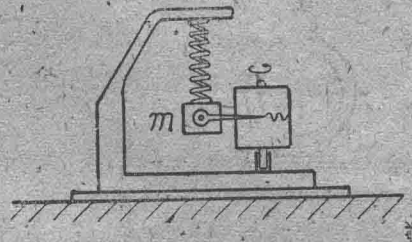
3. 振動的振幅隨 $\frac{p}{k}$ 之值而變，這個變化關係從共振曲線上明顯地表示出來，應該善於利用强迫振動的理論來解釋工程中的一些振動現象並對於簡單的强迫振動問題提出初步意見以滿足工程上的要求。為此，就必須熟知 $p \rightarrow k$ 時引起的共振現象及 $\frac{p}{k} \ll 1$ ， $\frac{p}{k} \gg 1$ 時改變系統的自然頻率 k 對於强迫振動振幅的影響。

37. 電動機裝置在由螺旋彈簧所支持的平台。電動機與水平台的總重量 $P=100$ 公斤，彈簧剛性系數 $C=70$ 公斤/公分，軸上裝一重 1 公斤的重物，重物到軸綫 O 的距離 a 等於 10 公分，電動機的角速度等於 2000 轉/分，開始時平台處於靜止，求平台所作的强迫振動。並求平台所受的最大動反力。

答： $x=0.1 \sin(209.3t)$ 公分；最大動反力 $N=7$ 公斤。



題 37



$$x_e = a \sin pt$$

題 38

38. 振動儀裝置如圖，已知震源振動規律為 $x_e = a \sin pt$ ，其中 $p > 100$ 1/秒，如彈簧剛性系數 $C=0.1$ 公斤/公分，重物 m 重 1 公斤。試求按這樣裝置記錄振動產生的誤差 r ，

$$r = \frac{a - a_r}{a}$$

其中 a 為震源振動的振幅， a_r 為捲筒上所記錄下來的正弦曲線的振幅。

答： $r < 0.01 = 1\%$

39. 車廂載有貨物，車架彈簧的靜止縮短為 $\Delta l_{\text{靜止}} = 5$ 公分。每根鐵軌的長度為 $L = 12$ 公尺，而在每個鐵軌接口處車廂受到一衝擊。車廂在臨界速度時發生激烈顛簸，求此臨界速度。

答： $v = 96$ 公里/小時。

40. 設有一 24 號工字鋼樑，兩端鉸支，跨長 $l = 4$ 公尺，一重量 $P_1 = 3$ 噸的發動機按裝在樑中央，發動機所生干擾力之值為 $P_2 = 1$ 噸，每分鐘轉數為 $n = 860$ ，如使樑內應力不應超過 $\sigma = 1400$ 公斤/公分²，且撓度不應大於 $\frac{1}{500}l$ ，試校核上述樑是否安全？

41. 重 30 公斤的電動機裝置在樑上，樑的剛度 $C = 300$ 公斤/公分。在電動機的軸上裝

有一重 200 克的重物，此重物到軸之距離為 1.3 公分。電動機的角速度 $\omega = \text{常數} = 90 \text{ 1/秒}$ 。求電動機所作強迫振動的振幅及其臨界轉數（以每分鐘轉數表示）。略去樑的質量與運動所受的阻力。

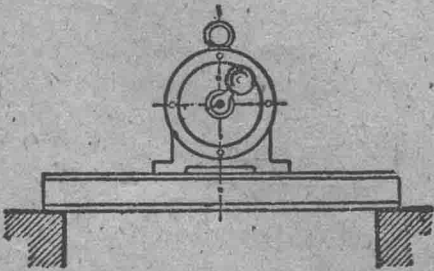
答： $A = 0.410 \text{ 公厘}$ ； $n_{\text{臨界}} = 950 \text{ 轉/分}$ 。

42. 一振動台重 15 公斤，安置在片狀彈簧支持上，此時彈簧片之中點之靜止撓度為 $\lambda_s = 0.02 \text{ 公分}$ ，振動台之下端聯結一剛性系數 $C = 4 \text{ 公斤/公分}$ 之彈簧，此彈簧之下端聯結於一由馬達所帶動之曲軸上，故彈簧端點位移可表為 $e \sin \omega t$ 。如已知 $e = 0.5 \text{ 公分}$ ，馬達轉速 $n = 1500 \text{ 轉/分}$ 。問振動台之振幅為多少？又馬達轉速為何值時，振動台之振幅最大？

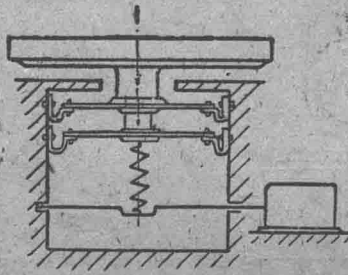
答： $A = 0.0055 \text{ 公分}$ ； $n = 2110 \text{ 轉/分}$ 。

43. 蒸汽機的示功計由一圓筒 A 做成，活塞 B 由彈簧 D 撐住並能在圓筒中活動；活塞與桿 BC 相連、桿上則聯結一劃針 C。設蒸汽對活塞的壓力按下式而變化： $p = 4 + 5 \sin \frac{2\pi}{T} t$ ，其中 P 以公斤/公分²計，而 T 則為軸每作一轉所需的秒數。設軸每秒作 3 轉，試在下面的數據下：示功計之活塞的面積 $\sigma = 4 \text{ 公分}^2$ ，示功計之活動部分的重量 $Q = 1 \text{ 公斤}$ ，彈簧每壓短 1 公分需力 3 公斤，求劃針 C 所作的強迫振動的振幅。

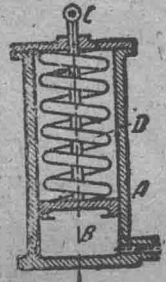
答： $a = 4.5 \text{ 公分}$ 。



題 41

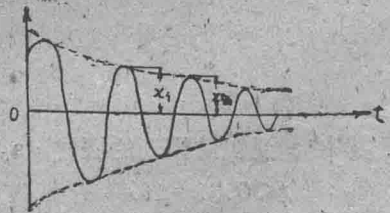


題 42



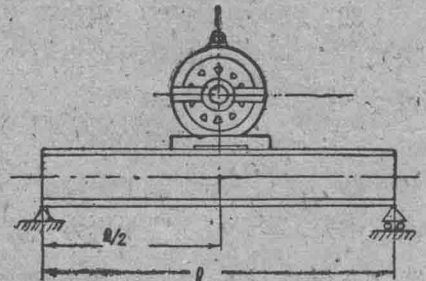
題 43

44. 30 號工字鋼簡支樑長 $l = 4 \text{ 公尺}$ ，樑上安裝有發動機。已知此樑作自由衰減振動時的衰減曲線，量得 $x_i : x_{i+1} = 1.2$ 。今由於發動機的不均衡產生強迫振動，已知強迫振動的頻率 50 次/秒，振幅為 1 公厘，試計算消耗於振動的功率。已知發動機重 $Q = 3.5 \text{ 噸}$ ， $E = 2.1 \times 10^6 \text{ 公斤/公分}^2$ ， $J = 8880 \text{ 公分}^4$ ，樑單位長重 48 公斤/公尺，在計算時可將樑的總重的一半集中於中點作為一個自由度問題考慮。



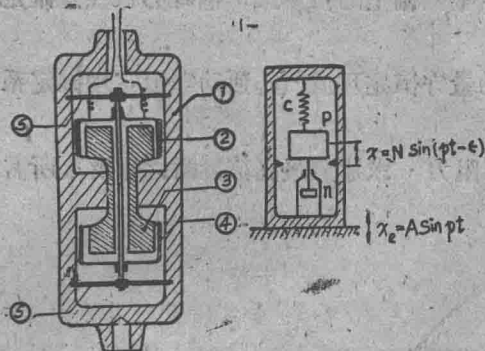
45. 實驗測得汽輪機葉片在衰減振動中每振動 100 次則其振幅減為原來的 $\frac{1}{7}$ 。求對應於葉片材料內阻的對數減幅係數 δ 為多少 %？又葉片在共振情況下的振幅較其靜止變形將增大多少倍？

46. 用以測量絕對運動系統的慣性拾振器如圖所示。已知慣性系統重 $P = 50 \text{ 克}$ ，由此重量所引起的支承彈簧的靜止變形 $\lambda_{st} = 1.78 \text{ 公厘}$ ，振動系統所受到的阻尼相當於臨界阻尼的一半。

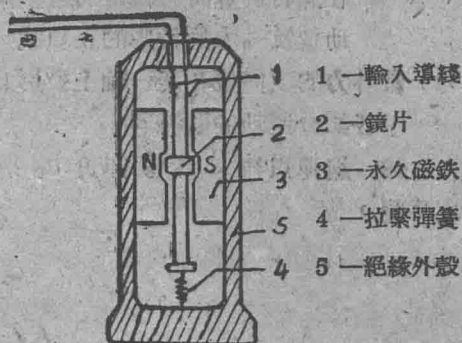


題 44

- 求 (1) 拾振器的自然频率 f 为多少赫 (1 赫 = 1 次/秒) ?
 (2) 在测定的简谐振动的频率大于其自然频率的范围内灵敏度的误差为多少%? (拾振器的灵敏度等于拾振器惯性系统的振幅与测定振幅的比值)
 (3) 拾振器惯性系统的位移与测定位移间相角差 δ 改变的範圍。



題 46



題 47

47. 鏈式示波器的振子如圖所示。

已知振子的自然频率 $f = 8000$ 赫，振子的运动系統置於油阻中且其阻尼為臨界阻尼的 $\frac{1}{2}$ 。

- 求 (1) 在被測信號譜量的频率小於振子自然频率範圍內引起灵敏度的误差為若干%。
 (靈敏度等於振子鏡片的振幅和被測信號的振幅的比值)
 (2) 又在此频率範圍內相角差 δ 的改變。
 (3) 如果振子作自然振动則在振动的一個周期內其振幅當衰減為原來的幾分之幾?

動量定理與質心運動定理

1) 动量定理是以 $K = \sum mv$ 作為描述整個系統運動的物理量，它以下面形式表示系的運動與外力的關係：

$$\dot{K} = R_e.$$

質心運動定理是动量定理的另一種表達形式；它說明系的質量中心的運動與外力的關係：

$$Mw_c = R_e.$$

當系之運動規律已知時，或系之質心運動規律已知時，可用动量定理求未知的外力（主要是約束反力）。

2) 在應用动量定理理解質系動力學問題時，應注意以下幾點：

- (1) 應該熟練質系动量的計算，动量是系中各質點动量的幾何和，因此是個向量，當質心的速度已知時，可以用 $K = Mv_c$ 直接求出动量。
 (2) 在解決質系動力學問題時，必須明確所考慮的運動對象（整個系統或個別物體），正確地分析系統的運動狀態與受力情況，分清外力與內力，因為內力與系之动量變化無關，所以只需將所有外力（包括已知力與未知的約束反力）用受力簡圖表示出來。

(8) 動量定理可表為以下幾種形式：

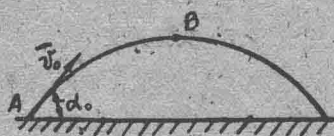
$$\sum F_o = \frac{d}{dt} \sum mv = \sum mw = Mw_c$$

實際應用時可視需要靈活採取其中一種形式。

在進行計算時，總是將這些向量式寫成在選定坐標軸上的投影式，這時必須注意確定動量及外力的投影的正負號

3) 當外力的主向量在某一軸上投影為零時，可利用動量守恒定理或質心運動守恒定理確定系中各部分運動的關係。

48. 炮彈以初速 v_0 及仰角 α_0 射出，如不計空氣阻力，求達到最高位置時之速度及所需之時間。



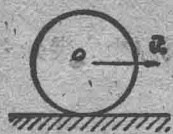
題 48

49. 計算下列簡單情況下系統的動量：

(a) 重 P 的均質圓盤，圓心具有速度 v_0 ，沿水平面滾動。

(d) 非均質圓盤以角速度繞 O 軸轉動，圓盤重 P ，質心為 C ， $OC=a$ 。

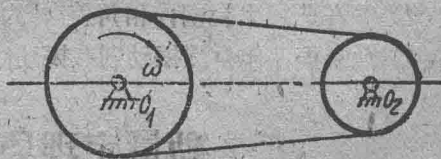
(c) 設皮帶及皮帶輪的質量都是均勻的。



(a)



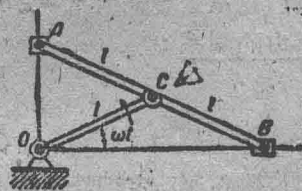
(b)



(c)

題 49

50. 橢圓規之尺 AB 重 $2P_1$ ，曲柄重 P_1 ，套管 A 與 B 各重 P_2 ；已知尺寸： $OC=AC=CB=l$ 。曲柄與尺之重心都在它中點上。曲柄與角速度 ω 轉動。求此橢圓規機構動量向量之大小與方向。



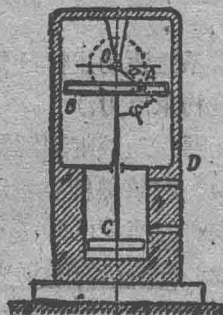
題 50

答： 向量的大小：

$$Q = \frac{\omega l}{29} (5P_1 + 4P_2) ;$$

向量的方向與曲柄垂直。

51. 水泵的固定外殼部分 D 與基礎 E 共重 P_1 ，曲柄 $OA=a$ ，重為 P_2 ，連桿 B 與活瓣 C 共重 P_3 。曲柄 OA 以角速度 ω 作等角速轉動，試求水泵在唧水時給地面的壓力。曲柄可視為均質桿。



題 51

52. 在立式内燃机中，其汽缸、机架与轴承共重 10 噸，活塞重 981 公斤，其重心则在十字头 B 处，活塞的行程为 60 公分，每分之转数为 300 转；曲柄长 r 与连杆长 l 之比为 $1/6$ ；曲柄与连杆的质量可忽略不计。发动机用螺桿扣在基础 C 上，在机器未开动时，螺桿的张力等于零。求发动机在基础上的最大压力 N 以及在全部螺桿上最大的张力 T 。

答： $N=35.6$ 噸； $T=23.5$ 噸。

提示：应将根式 $\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}$ 开为级数，并且将级数中包含

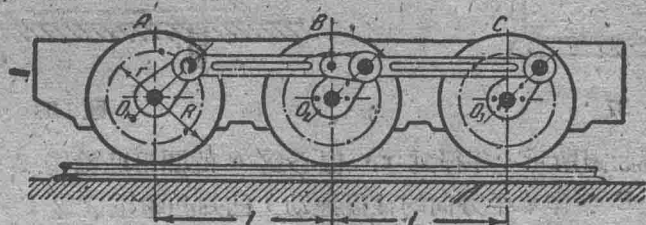
$\left(\frac{r}{l}\right)^2$ 以上各项捨棄。



題 52

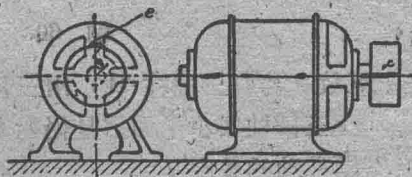
53. 機車以 $v=72$ 公里/小時的速度沿直線軌道行駛。平行桿重 200 公斤，其質量可視為沿長度均勻分佈；曲柄長 $r=0.3$ 公尺，其質量可不計；車輪半徑 $R=1$ 公尺；車輪只滾動而不滑動。求車輪加於鐵軌的附加壓力的最大值。

答： 2.45 噸。



題 53

54. 重 P 之電動機在轉動軸上帶一重 Q 之偏心輪，偏心距為 e 。如電動機之轉速為 ω 。試求：1) 如電動機外殼用螺桿扣在基礎上，求作用在螺桿上的最大水平剪力 R 。2) 如不用螺釘固定，求角速度 ω 為多大時，電動機會跳離地面？



題 54



題 55

55. 求水注對渦輪的固定葉片之壓力的水平分力。已知水的體積流量為 Q ，比重為 γ ，水打在葉片上的速度 v_1 是水平的，水流出的速度 v_2 與水平成 α 角。

答： $N = \frac{\gamma}{g} Q (v_1 + v_2 \cos \alpha)$ 。

56. 從橫截面為 16 公分²的救火頭龍噴出來水柱，水柱之速度為 8 公尺/秒，與水平所成的角度 $\alpha = 30^\circ$ 。

如不計重力對水柱狀態的影響，並假設水分子在碰到牆壁上后，其速度就沿着牆壁，求水柱給鉛垂牆壁的壓力。

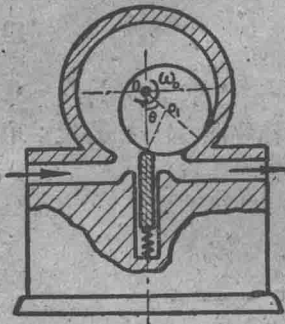
答：9.05 公斤。



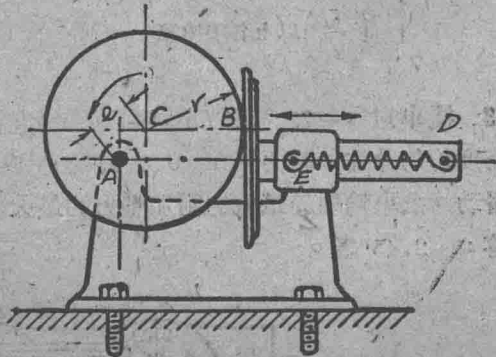
題 56

57. 水泵如圖所示。重 Q 之均質圓盤 O_1 繞固定軸 O 以等角速 ω_0 轉動，重 P 的夾板藉下端彈簧之推壓而頂在圓盤上，因此當圓盤轉動時，夾板作復移動。

求在任一位置時水泵對基礎之動壓力。設距離 OO_1 為 e ，圓盤半徑為 r 。



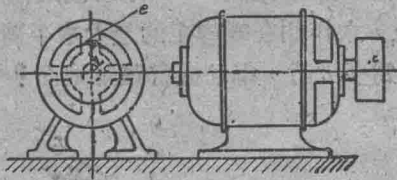
題 57



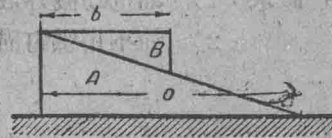
題 58

58. 一凸輪機構如圖所示，半徑為 r ，偏心為 e 的圓形凸輪繞 A 軸以等角速 ω 轉動，帶動滑桿 D 在套筒 E 中作水平方向的往復運動，已知凸輪重量為 P ，滑桿重量為 Q ，求在任一瞬時機座的螺釘所受的總的動反力。

59. 重 P 之電動機在轉軸上帶一重 Q 之偏心輪，偏心距為 e 。電動機之轉速為 ω ，如電動機放在光滑水平面上，求電動機之水平運動。



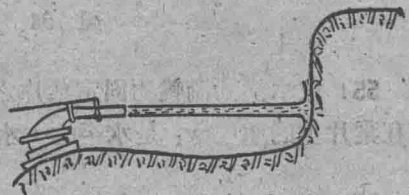
題 59



題 60

60. 水平面上放一均質三稜柱 A ，此三稜柱上又放一均質三稜柱 B ；兩三稜柱的橫截面都是直角三角形，三稜柱 A 比三稜柱 B 重兩倍。設三稜柱與水平面都是絕對光滑的，求當三稜柱 B 沿三稜柱 A 滑下至水平面時，三稜柱 A 所移動的長度 l 。

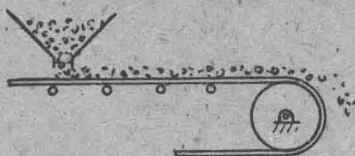
61. 水力採煤就是利用水槍在高壓下噴射出的強力水流採煤，林西礦水力採煤區所用水槍水柱直徑為 30 公厘，水速為 56 公尺/秒。求給煤層的動水壓力。



題 61

62. 自动传送带运煤量恒为 20 公斤/秒，皮带速度为 1.5 公尺/秒。试确定在匀速传送时皮带作用于煤块之总水平推力。

答： $F_x = 3$ 公斤。



題 62

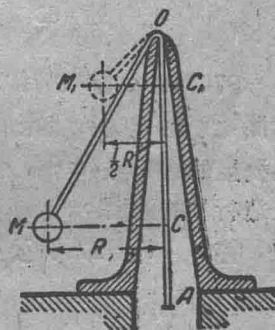
动量矩定理 (一)

- 1) 在动量矩定理中建立了質點對於一點 (或軸) 的动量矩的變化與作用於質點上的力對於該點 (或該軸) 之矩的關係。
- 2) 當未知的約束反力恒通過固定中心 (或固定軸) 時，應用动量矩定理可以從已知的主动力求質點的運動規律。
- 3) 當質點所受的力通過固定中心或固定軸時，質點的动量矩守恒，利用动量矩守恒的條件可知質點運動的主要性質。

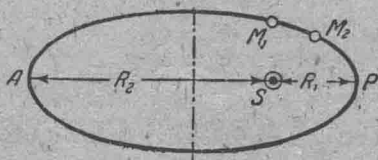
63. 小錘 M 系於不能伸長的綫 MOA 的一端，此綫的一部分穿過鉛垂的小管。小錘繞管軸而沿半徑 $MC = R$ 之圓周運動，每分鐘作 120 轉。今將綫段 OA 慢慢向管內拉，使外面的綫段縮短到 OM_1 的長度，此時小錘作半徑為 $\frac{1}{2}R$ 的圓周運動。問小錘沿此圓周每分鐘所作的轉數為多少？

答： 480 轉/分鐘。

64. 兩隕石 M_1 與 M_2 沿同一橢圓軌道而運動，太陽在此橢圓軌道的焦點之一 S。兩隕石相距很近，因此橢圓弧 $M_1 M_2$ 可看成為一直綫段。已知當 $M_1 M_2$ 的中點在近日點 P 時， M_1 與 M_2 間的距離為 a。設兩隕石以同一角面積速度運動，且 $SP = R_1$ ， $SA = R_2$ ，求當 $M_1 M_2$ 的中點經過遠日點 A 時兩者間的距離。



題 63



題 64

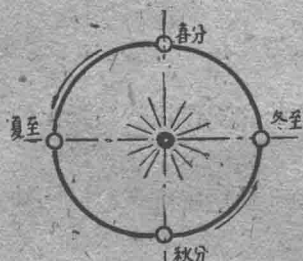
65. 一小球重 p 克，用不可伸長的綫系住，在光滑的水平面上運動。綫的他端被拉入鑿於平面上的小孔並以恒速 a 拉動。設已知在開始時，綫是直的，球與孔間的距離為 R，而球的初速在綫的垂直方向的投影等於 v_0 ，試求小球的運動。

提示：以極座標表示之面積速度為 $\frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}$

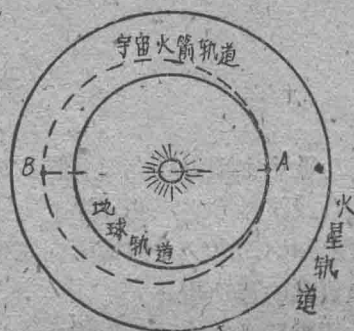
66. 假定春分秋分點是近似的在地球軌道的正焦弦兩端，而地球軌道的偏心率約為 $1/60$ ，試証自春分點到秋分點的時間比秋分點到春分點約長 7.6 日。

註：下列数据可資驗證：

春分 3 月 21 日，
 夏至 6 月 22 日，
 秋分 9 月 23 日，
 冬至 12 月 22 日。



題 66



題 67

67. 1959 年 1 月 2 日莫斯科時間 20 時（北京時間 3 日 1 時）蘇聯的第一個宇宙火箭開始了第一次行星際飛行。在 1 月 14 日人造行星以每秒 37 公里的速度飛越離太陽 14640 萬公里的近日點 A，並將於 9 月初到達離太陽 19720 萬公里的遠日點 B。試求過遠日點時人造行星的速度。

答： $v_B = 27.4$ 公里。

動量矩定理 (二)

1) 質系動量矩定理是以 $G_0 = \sum r \times mv$ 作為描述整個系統運動的物理量，它以下面形式表示系統的運動與外力的關係：

$$G_0 = L_0, \quad G_z = L_z, \quad J_z \varepsilon = L_z.$$

動量矩定理可用來研究系統特別是剛體繞固定軸轉動的運動規律，這時不但內力，而且軸承上的未知反力都不出現在運動方程式中。

2) 在應用質系動量矩定理時，應注意以下二點：

- (1) 首先應能熟練計算剛體及系統對固定軸之動量矩，剛體的動量矩決定於對軸的轉動慣量，應該熟知幾種簡單剛體的轉動慣量。
- (2) 在剛體系特別是輪系傳動的問題中，應明確所考慮的對象，分清外力矩與動量矩，以及這些代數量的正負號。

3) 了解動量矩守恆的條件並注意在這情況下的運動性質。