小学教师《专业合格证书》教材

算术基础理论

北京师范大学出版社

小学教师《专业合格证书》教材

算术基础理论

黄文选　刘齐平　编

北京师范大学出版社

小学教师《专业合格证书》教材

算术基础理论

黄文选　刘齐平　编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
1201工厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：12　字数：252千
1987年10月第1版　　1988年1月第2次印刷
印数：121500—149000

ISBN7-303-00005-4/G·6
统一书号：7243·540　　定价：2.15元

说　　明

《中共中央关于教育体制改革的决定》提出："要争取在五年或者更长一点的时间内使绝大多数教师能够胜任教学工作．在此之后，只有具备合格学历或有考核合格证书的，才能担任教师．"为了贯彻落实这一要求，国家教育委员会决定建立中小学教师考核合格证书制度，并于1986年9月颁发了《中小学教师考核合格证书试行办法》．根据该《试行办法》的规定，我们已经组织编写出版了中小学教师《专业合格证书》文化专业知识考试各科教学大纲．现在，我们又按照教学大纲的基本要求，组织编写出版这套教材，供中小学教师参加《专业合格证书》文化专业知识考试用．这套教材包括：中等师范11门课程、高等师范专科14个专业的48门课程、高等师范本科12个专业的40门课程，以及公共教育学、心理学课程用书．

这套教材的编写力求具有科学性、系统性和思想性，并努力体现以下原则和要求：要有鲜明的师范性，紧密联系中小学教学的实际；要符合成人在职进修的特点，便于教师自学、自检，要使大多数教师经过努力可能达到规定的要求．

考核合格证书制度刚刚试行，尚缺少经验，加之这套教材出版时间仓促，难免存在一些问题．我们准备继续在实践中探索和研究，争取用几年的时间，建设一套适合我国中小学在职教师进修的教材，希望全国师范教育工作者，尤其是

从事在职中小学教师培训工作的同志为此共同努力.

这套教材在编写、出版和发行工作中，得到了各省、自治区、直辖市教育行政部门，许多师范院校、教育学院、教师进修学校和师资培训中心，许多专家和教师，以及有关出版社和教材发行部门的大力支持和帮助，在此，一并致谢.

国家教育委员会师范教育司

1987年6月

编 者 的 话

这本教材是根据国家教育委员会制订的“小学教师《专业合格证书》文化专业知识考试”数学教学大纲确定的教学内容，遵照国家教育委员会确定的编写原则进行编写的．为了贯彻所确定的原则，我们努力做到：教材要符合成人在职进修的特点，便于教师自学、自检，叙述力求详尽，文字通俗易懂．并且在教材的讲述结构上突出以下四个特点：

(1) 小步前进，便于自学

为了适合教师在职自学，把篇幅较大的内容按照知识结构分成较小的几段，每段之后附有练习题．由于每段的篇幅较小，知识量较少，“阶梯”的高度较低，便于学员利用零散的时间进行自学，并可能在没有教师指导的情况下掌握知识．

(2) 及时反馈，自检自评

为了使学员随时掌握自己的学习情况，并能对自己的学习进行评价，做到及时反馈，以便收到较好的效果．为此，我们采取了两项措施：一是给出了习题的答案；二是各章都附有自测试题．

(3) 讲清思路，加强分析

本册教材对重要的概念尽量做到有实例，有分析，对于意义相近或相反的概念予以对比，分清异同，以便更深刻地理解这些概念．对于重要的定理、例题，尽力做到讲清证明

过程的思路及解题的思路，注意提高学员的证题能力和解答应用题的能力.

(4) 增设"提示"，进行辅导

"提示"的内容，主要是针对教材的重点和难点，进一步加以解释或举出实例予以说明，作为教材的辅导. 增设"提示"一栏，为了方便学员自学.

这本教材除可供小学教师参加《专业合格证书》文化专业知识考试复习使用之外，也可作为中等师范、中师函授教师的教学参考用书或青年自学用书.

由于我们水平有限，编写时间仓促，错漏之处，在所难免，希望读者批评指正.

编　者

1987.6

目　　录

第一章　集合与映射

集合是近代数学中重要的基本概念之一，集合的理论是算术理论的基础．小学数学教师应该掌握一些集合的初步知识并能在教学中运用．

一、集　合

1.1　集合的概念

(1) 集合与元素

下面有几组不同的事物：

① 某市所有的小学；

② 某小学所有的教师；

③ 某学生书包里所有的文具；

④ 平面上到点 O 的距离等于 2 的所有的点；

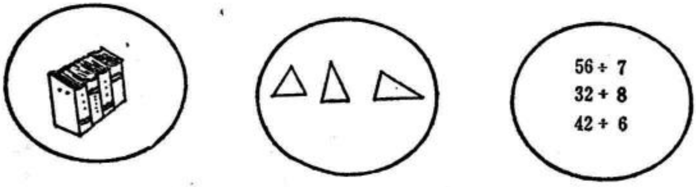
⑤ 所有的三角形；

⑥ 所有的实数．

它们分别是由一些学校、一些人、一些物体、一些点、一些图形和一些数组成的．我们把具有某种共同性质的一些事物的一个整体叫做一个集合(简称集)，集合里的每一个事物都叫做这个集合的元素．例如，⑥是由所有的实数组成的集合，任何一个实数都是这个集合的一个元素．

在小学数学课本中常有这样的一些插图：把几本书、几

个三角形或者几个算式用一个圈围起来，如图1-1所示.每一个圈里的几个事物都组成一个集合.



（甲）　（乙）　（丙）

图 1-1

如果给定了一个集合，那么集合中的元素应是确定的.这就是说：任何一个事物，要么是这个集合的元素，要么不是这个集合的元素，不存在“既是这个集合的元素，又不是这个集合的元素”这样的事物，也不存在“无法确定它是不是这个集合的元素”这样的事物.例如，对于所有的三角形组成的集合来说，任何一个三角形都是它的元素，其他任何事物都不是它的元素.又如，我们不把“年龄较大的人”看成一个集合，因为它的元素不是确定的，我们无法肯定某人是否属于这个集合，因为此人的年龄比一些人的年龄大，但比另一些人的年龄小.

我们约定集合中的元素都是互异的，这就是说：一个集合中的任何两个元素都是不同的事物，完全相同的事物归入集合时只能算作一个元素.因此，集合中没有相同的元素.例如，由字母a、a、b、c组成的集合只有三个元素a、b、c，第一个字母a与第二个字母a应看作是一个元素.

在集合里，我们不考虑元素的顺序.如果两个集合的元素完全相同，我们就把这两个集合看成是同一个集合.例如，

由数字1、2、3组成的集合与由数字3、2、1组成的集合是同一个集合.

根据组成集合的元素的个数，可以把集合分成两大类：由有限个元素组成的集合叫做有限集合，如前面的①、②、③；由无限个元素组成的集合叫做无限集合，如前面的④、⑤、⑥.

有的集合是由一个元素组成的，这样的集合叫做单元素集. 例如，由太阳组成的集合就是一个单元素集. 由于实际的需要，我们认为集合也可以没有元素，并把没有元素的集合叫做空集，空集用符号ϕ表示. 例如，黑板上一个字也没有写，这块黑板上的字的集合就是空集. 单元素集和空集都是有限集合.

提　示

ϕ与0的区别：ϕ是一个集合而不是一个数；0是一个数而不是一个集合.

ϕ与0的联系：空集ϕ中元素的个数用0表示；元素的个数为0的集合用ϕ表示.

(2) 集合的表示方法

我们常用图示法、列举法和描述法来表示集合.

①图示法. 把一个集合的所有元素用一条封闭曲线圈起来表示这个集合的方法叫做图示法.用图示法表示集合时，集合的元素可用文字、符号或封闭曲线内的点表示.因为这种方法比较直观，所以小学数学教材里就用这种方法表示集合.

②列举法. 把一个集合中的所有元素一一列出，写在大括号内表示这个集合的方法，叫做列举法. 例如，由字母a、b、c、d组成的集合可以表示为

$$\{a, b, c, d\},$$

还可表示为

$$\{b, d, c, a\}$$

等等.又如，由一个字母a组成的单元素集用列举法表示出来就是$\{a\}$. 这里要注意：a与$\{a\}$是不同的：a表示一个元素，而$\{a\}$表示只有一个元素的集合.

③描述法. 把一个集合中所有元素的公共性质描述出来，写在大括号内表示这个集合的方法，叫做描述法.例如，前面的集合①用描述法表示就是

{某市的小学}；

前面的集合⑥用描述法表示就是

{实数}.

用描述法来表示集合，还有一种形式：在大括号内，先写上表示集合的元素的符号，再划一条竖线(有的书上用冒号":"或分号";"代替竖线)，然后在竖线的右边写上这个集合的元素的公共性质. 例如，方程$x^2-5x+6=0$的根的集合(简称方程的解集)用描述法表示就是

$$\{x \mid x^2-5x+6=0\};$$

不等式$x-3<0$的解的集合(简称不等式的解集)用描述法表示就是

$$\{x \mid x-3<0\}.$$

提　示

列举法和描述法各有什么优越性？

用列举法表示一个集合，要将这个集合中的元素一一列举出来. 所以，用列举法表示集合，可以清楚地看出这个集合有哪些元素，但不易看出这些元素有哪些公共性质. 集合的描述法表示则相反，因为用描述法表示一个集合，就要写

出该集合中所有元素的公共性质，但从中不易看出它是由哪些元素组成的.

对于有限集合来说，元素不多的有限集合可用描述法表示，但更宜于用列举法表示. 例如，有限集合$\{8, -2, \sqrt{3}, \pi\}$用描述法表示就没有用列举法表示那么方便. 对于无限集合来说，由于无限集合的元素不可能全部一一列举出来，所以无限集合宜于用描述法表示. 但我们也用列举法表示一些常见的无限集合，如在初中代数里，把正整数集合表示为

$$\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\},$$

省略号表示这个集合有无限多个元素.

我们通常用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素. 集合与元素的关系可以这样表示：如果a是集合A的元素，就记作$a \in A$，读作"a属于A"；如果a不是集合A的元素，就记作$a \notin A$（或$a \overline{\in} A$），读作"a不属于A". 例如，设A表示集合$\{a, b, c\}$，那么

$$b \in A, \quad d \notin A.$$

为了方便，我们约定，一些常用的数集各用一个字母来表示：**R**表示实数集，**Q**表示有理数集，**Z**表示整数集，**N**表示自然数集. 有时，还用$\mathbf{Z}^-$表示负整数集，用$\mathbf{Q}^+$表示正有理数集，等等.

练　习

1. 下列集合，哪些是有限集合或无限集合？

哪些是单元素集或空集？

(1) 大于-10而小于0的负整数的集合；

(2) $\triangle ABC$的重心的集合；

(3) 不等式 $x-2>0$的解的集合；

(4) 方程 $x^2+1=0$的实数根的集合；

(5) 大于0而小于1的有理数的集合；

(6) 方程 $x-3=0$的根的集合；

(7) 两条平行线的交点的集合.

2. 用列举法表示下列集合：

(1) {一年中有30天的月份}；

(2) {太阳系的九大行星}；

(3) $\{x \mid x-5=0\}$；

(4) {阿拉伯数字}.

3. 用描述法表示下列集合：

(1) 所有梯形的集合；

(2) 不等式 $x+5>0$的解的集合；

(3) 所有负实数的集合；

(4) 某班全体学生的集合.

4. 用符号$\in$或$\notin$填空；

(1) a____$\{a\}$； (2) 0____ϕ；

(3) 0____$\{0\}$； (4) $\sqrt{2}$____R；

(5) $\sqrt{3}$____Q； (6) 3.1416____Q^+；

(7) π____R； (8) -3____Z.

1.2 集合的包含与相等

观察下面三个集合，看它们之间有什么关系.

$$M:\ \{a,\ b,\ c\};$$
$$P:\ \{c,\ b,\ a,\ d,\ e\};$$
$$S:\ \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}.$$

先看M与S，集合M的任何一个元素都是S的元素. 集

合P与S、M与P也都有同样的现象.

由此可以引出下列定义:

定义 设A、B是两个集合，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，集合B叫做集合A的扩集.

集合A是集合B的子集记作$A \subseteq B$(或$B \supseteq A$)，读作"A包含于B"(或"B包含A").例如，对于上面三个集合来说，有

$$M \subseteq S, \quad M \subseteq P, \quad P \subseteq S, \quad S \subseteq P.$$

如果A不是B的子集，可以记作$A \nsubseteq B$.(或$B \nsupseteq A$)，读作"A不包含于B"(或"B不包含A").

对于任一集合A，因为集合A的任何一个元素都属于它本身，所以

$$A \subseteq A,$$

也就是说，任何一个集合都是它本身的子集.

为了方便，我们规定：空集ϕ是任何集合的子集.也就是说，对于任何集合A，总有

$$\phi \subseteq A.$$

比较集合S的两个子集M与P，可以知道扩集与子集的关系有两种情况:

①扩集中还有不属于子集的元素.如集合S中还有不属于集合M的元素，这时，$M \subseteq S$，但$S \nsubseteq M$;

②扩集中没有不属于子集的元素.如集合S中没有不属于集合P的元素，这时，$P \subseteq S$，且$S \subseteq P$.

根据以上两种情况可以引出真子集与真扩集的定义以及两集合相等的定义.

定义 设集合A是集合B的子集，并且集合B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，集合B

叫做集合A的真扩集.

集合A是集合B的真子集记作$A \subset B$(或$B \supset A$).

例如，对于前面三个集合来说，有

$$M \subset S, \qquad M \subset P.$$

一个集合与它的真子集之间的关系，可用图1-2表示，其中A、B两个圈(包括内部)分别表示集合A、B，A圈完全在B圈的内部表示集合A是集合B的真子集.

在小学数学教材中有这样的图，如图1-3所示.这个图表示：等边三角形集合是等腰三角形集合的真子集，而等腰三角形集合又是三角形集合的真子集.

显然，一个集合的真子集一定是这个集合的子集，但一个集合的子集不一定是这个集合的真子集.例如，任何一个集合是它本身的子集，但不是它本身的真子集.

特别，空集是任何非空集合的真子集.

定义 设集合A是集合B的子集，并且集合B的任何一个元素也都是集合A的元素，那么就说集合A与集合B相等.

集合A与集合B相等记作$A=B$，读作“A等于B”.

例如，对于前面三个集合来说，有

$$P=S.$$

在初中数学教材中有一些集合相等的例子. 如等边三角形集合与正三角形集合相等：

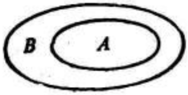


图 1-2

图 1-3

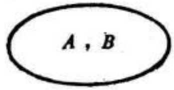


图 1-4