ISSN 1001-6120

运筹学杂志

CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH

第10卷　第1期
Vol. 10　No. 1

1991

中国运筹学会主编
上海科学技术出版社出版

运 筹 学 杂 志

（半年刊）

第10卷　第1期

目　　录

专题介绍：理论和方法

应 用 实 例

研 究 简 报

动 态 和 其 他

CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH

Vol. 10 No. 1

MAIN CONTENTS

Survey and Introduction

Case Studies

Research Letters

第 10 卷　第 1 期　　运筹学杂志　　Vol.10 No.1
1991 年 9 月　　CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH　　Sep., 1991

专题介绍：理论和方法

现代效用及其数学模型

姜青舫

（南京审计学院）

现代效用理论作为决策分析最重要的基础理论之一，已广泛用于管理科学、经济分析和心理学等领域．本文着重论述 von Neumann-Morgenstern 线性效用的基本原理及数学模型，所涉及内容大多是该领域近 20 年取得的研究成果；对新近发展起来的非线性效用理论也作简要阐述；并提出有关现代效用理论研究方向上的一些问题．

一、背景

对效用概念有两种理解：一是经济学所说的效用，这主要指十九世纪新古典学派的商品效用；另一是现代效用，它同时涉及管理科学、经济学、心理学等领域，也是运筹学的分支学科之一。

人们在谈论效用时，往往要把它同商品效用联系在一起．这其实是一种误解．最早的效用概念并非出自经济学，它是十八世纪数学家 D.Bernoulli[13] 在总结同时代另两名数学家 G.Cramer 和 N.Bernoulli 较早研究的基础上提出的概念[44]．D.Bernoulli 研究了包括著名的圣·彼得堡悖论在内的好几种违背货币期望值准则的赌博（抽彩、保险）现象，指出人们选择判断所依据的不是货币期望值，而是 meral expectation. 这里的 meral 即指财富的效用；这种效用，其增加率随着财富的增加而递减．

经济学家利用 D.Bernoulli 的边际效用递减思想，研究了消费者的需求理论，从而发展了十九世纪新古典学派的商品效用论．这便是作为第一种理解的效用理论，也称传统效用理论．但这种理论进入二十世纪后便逐渐衰退下来．传统效用不具有真正的数量意义．尽管有人一直研究基于偏好差的效用测量，但收效甚微．

另一种源于 Bernoulli 效用思想但不基于偏好差的效用，即 von Neumann-Morgenstern 效用，其理论在本世纪四十年代一经引入便迅速发展起来．由于它与数量概率相联系，从而具有真正的数量意义．它的公理化由本世纪最伟大的科学家之一、在众多领域均有卓著贡献的现代数学巨匠 von Neumann 和他的合作者 O.Morgenstern 首先作出[48]，故其得名 N-M 效用，也就是本文所称的现代效用．当然，在这之前，即 1926 年，另一名年轻的数学家和哲学家 F.P.Ramsey 就曾得到与此相似的结果[42]．但很可惜，在他死后的 1931 年其成果发表，也未能引起学术界的注意[44]．

现代效用理论目前包括了线性效用理[illegible]效用理论两大部分[12][23]．后者在近几年才发展起来，其理论和方法均不[illegible]效用理论的基础，

本文 1990 年 11 月 13 日收到修改稿

已有一套较为严格的理论与方法，并在规范意义上广泛应用于决策分析、管理研究和经济分析等．以下几节着重从应用的角度讨论线性效用理论及其数学模型；最后简单提及非线性效用理论．由于文献 [2] 对线性效用的公理系统和两个基本定理已有介绍，本文对此从简论述．

二、线性效用及其存在性

本文用 X 表示作为主体偏好对象的单一属性水平集合，可称作抉择集．若考虑一般性结论，得研究 X 为无限且不可数的情形，这时须假设 X 是闭的和连通的；若 X 为货币一类对象的集合，便直接假定它为实数子集．如果在这样的 X 上定义一个偏好的二元关系 $\preceq$, 并假定主体具有关于 $\preceq$ 偏好的连续性，即 X 上 $\preceq$ 稠密，那么，当 $\preceq$ 为 X 上的弱序，则存在一个 X 上关于 $\preceq$ 保序的实值连续函数 u, 使得对于所有的 $x,y\in X$, 有

$$u(x)\leq u(y)\iff x\preceq y, \tag{2.1}$$

u 即称作 X 上的效用函数．

这里 $\preceq$ 之称为弱序，是指 $\preceq$ 在 X 上是自反的、传递的和完备的[17]．这一弱序假设，实质上是关于主体在 X 上的偏好应当具有怎样的一种行为特点的假设．而 X 上 $\preceq$ 稠密，是说定义了 $\preceq$ 的无限不可数集 X 中存在一可数子集 A, 对于所有的 $x\in X, A$ 中必有任意逼近 x 之点．或者说，当 X 无限不可数，$\preceq$ 是 X 上的弱序，则对于任意的 $x'\in X$, 集 $\{x\in X|x\preceq x'\}$ 和 $\{x\in X|x'\preceq x\}$ 是闭的．从而 X 为一可分度量空间．X 中包含的可数稠密子集 A, 使得 $X=\overline{A}$. 这一性质使我们得以在 A 上先定义一个关于 $\preceq$ 保序的实值连续函数 u'(这是能够办到的), 然后再按极限定理把它扩展到无限不可数集 X 上，从而得到 u.

不过这样得到的 u 还不是一个从本质上说具有数量意义的指标．事实上，现代效用的根本点正是不从 X 出发来定义效用函数，而是从定义在 X 上的概率分布集 $\mathcal{P}$ 出发来定义效用函数．这时，由于 $\mathcal{P}$ 的凸性，当我们象在 X 上那样，也在 $\mathcal{P}$ 上定义一个二元关系 $\preceq'$, 且同样假设 $\preceq'$ 是 $\mathcal{P}$ 上的弱序和具有稠密性，另增加一条原在 X 上并不需要的 $\mathcal{P}$ 中偏好的独立性，那么，$\mathcal{P}$ 上就存在一实值连续函数 U, 称作 $\mathcal{P}$ 上的效用函数，使得对于所有的 $p,q\in\mathcal{P}$, 有

$$U(p)\leq U(q)\iff p\preceq' q; \tag{2.2}$$

且对于满足 $0\leq\alpha\leq 1$ 的任意实数 α, 有

$$U((1-\alpha)p+\alpha q)=(1-\alpha)U(p)+\alpha U(q), \tag{2.3}$$

或

$$U(\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m p_m)=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m U(p_m). \tag{2.4}$$

式中 p_m 属于 $\mathcal{P}$ 中任一序列 $(p_m), m\geq 1; \alpha_m$ 属于任一非负实数序列 $(\alpha_m), m\geq 1$, 且 $\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m=1$[7,26,28]

(2.3) 和 (2.4) 所表明的性质，称做 U 的线性或 σ- 线性．它由 $\mathcal{P}$ 的自身结构所决定，是 $\mathcal{P}$ 上效用函数最重要的性质之一．由于这种线性，定义在 $\mathcal{P}$ 上的 U 便不象定义在 X 上的 u 那样单调任意，而是在正线性变换范围内唯一的[48]．如果我们在 X 上选取与 $\mathcal{P}$ 上 $\preceq'$ 相容的 $\preceq$, 也即对于所有 $x, y \in X$ 和 $p_x, p_y \in \mathcal{P}$, 有

$$x \preceq y \Longleftrightarrow p_x \preceq' p_y, \tag{2.5}$$

那么便可得到这样一个重要结果，即

$$u(x) = U(p_x), \tag{2.6}$$

这样，u 除了满足 (2.1) 要求的一般性质外，还具有因 (2.6) 由 U 的线性而带来的其他有利性质．这使 u 成为一种可与数量概率相结合从而能用于测度 X 中元素真实价值的数量指标．

(2.5) 中的 p_x 或 p_y, 称作 $\mathcal{P}$ 中的一点测度．它是把概率 1 赋到 Borel 集 $\{x\}$ 上，即由 $p(\{x\}) = 1$ 所定义的测度．当 $\mathcal{P}$ 为简单分布集，即 $\mathcal{P}$ 仅由把非零概率赋到 X 中有限个元素上的概率测度所组成时，$p(\{x\})$ 就与 $p(x)$ 同义．如果把 p 视为抽彩，那么 p_x 就相当于以概率 1 取 x, 以概率 0 取非 x 的抽彩，也即确定地取到 x, 于是又有

$$p_x \sim' x. \tag{2.7}$$

这样，按 $\mathcal{P}$ 的凸性和 U 的线性，使用 (2.6), 可以证明[7,26], 对于一般分布 $p \in \mathcal{P}$, 有

$$U(p) = \int_X u(x)dp; \tag{2.8}$$

若 p 为简单分布，则

$$U(p) = E_p(u(x)), \tag{2.9}$$

此处 $E_p(\cdot)$ 表示按分布 p 取 $(\cdot)$ 中随机变量的期望值．

由于 (2.7), 故有 $U(p_x) = U(x)$; 对这一结果使用 (2.6), 则有 $U(x) = u(x)$. 这样，当我们按 (2.5) 选取 X 上的 $\preceq$ 和 $\mathcal{P}$ 上的 $\preceq'$ 时，U 和 u 全同．今后研究它们的数学模型，一般就不再区分 U 和 u, 一律用 u 表示之．也不再区分 $\preceq$ 和 $\preceq'$. 于是 (2.9) 可直接写为

$$u(p) = E_p(u(x)). \tag{2.10}$$

如果只考虑简单分布，则 p 常用以下记号表示:

$$p = [p(x), x; p(y), y; \cdots]. \tag{2.11}$$

最简单的分布是所谓二元分布或二元抽彩，系指以概率 $p(x)$ 取 x 而以概率 $1-p(x)$ 取 y; 当 $p(x) = \frac{1}{2}$, 二元抽彩也称等可能抽彩．本文简记二元抽彩 p 为

$$p = [x, \beta, y]. \tag{2.12}$$

注意 $\beta = 1 - p(x)$. 等可能抽彩 p 相应地记为

$$p = [x, \frac{1}{2}, y]. \tag{2.13}$$

三、离散点的效用测定原理

要把 N-M 效用用于实际的决策分析或经济分析，需按前述原理建立可用于实际计算的 u 的数学模型. 这时一般要解决以下三个问题:

(i) 测定抉择集 X 中具有代表性的离散点的效用值 (也称 X 中效用点的测定). 其结果既可用于鉴别主体的风险性质，也要用来作为导出相应效用函数表达式的定量约束.

(ii) 根据对决策问题和主体风险态度的分析 (这在很大程度上也包括或者也就是对效用点测定结果的分析), 鉴别效用函数应满足的性质 (如单调性、有界性、连续性), 其中特别是风险性质，以此作为寻出效用函数的定性约束.

(iii) 按照 (i) 和 (ii), 确定效用函数表达式及其参数值.

偏好 (preference) 一词原为经济学术语，但在我们的理论中另有特定的涵义. 本文把偏好定义为一种主体关于客体的价值判断的直觉. 哲学或心理学对直觉可能有不同解释，而我们仅在莱布尼茨给出的定义上来使用它. 所谓直觉，是指人的一种认识自明真理 (如 "A 是 A") 的能力，是不需分析便作出判断的能力. N-M 效用的弱序公理，其中的完备性，便是关于主体的这种能力在 X 中是完全的这样一种假设.

除偏好直觉外，进行效用的点测定，还要引入另一新概念 —— 内省 (introspection). 按 Concise Oxford Dictionary 的解释，" 内省 " 原指检测自已思维和心理的过程. 但我们还要对它给出更确切的定义. 文献 [7] 从哲学和心理学的角度对此有详细分析. 简言之，所谓 " 内省 ", 是指人的这样一种感知能力和心理过程，即在把二元抽彩与介于其机会结果之间的某一确定结果相比较时，在认定两者成立无差异关系的条件下，对其中某一未知量作出数量估计. 这个作为估计对象的未知量，便称作该关系中的无差异点. 所谓内省，就是估计或评定 (assess) 无差异点. 也即对于所有 $x,y,z \in X$, 如按偏好直觉有 $x \prec y \prec z$, 则在无差异关系

$$y \sim [x,\beta,z] \tag{3.1}$$

成立的前提下， (i) 在 x,y,z 已知时评定概率值 β, 或 (ii) 在 x,z,β 已知时评定 y 值，或 (iii) 在 x(或 z), y,β 已知时评定 z(或 x) 值. (i) 中 β 称为无差异概率或概率当量，(ii) 中 y 称为二元抽彩的确定当量， (iii) 中 z(或 x) 称为数值当量.

按 (2.1), 可知 (3.1) 蕴含

$$u(y) = u([x,\beta,z]). \tag{3.2}$$

对上式右端使用 (2.10) 可得

$$u(y) = (1-\beta)u(x) + \beta u(z). \tag{3.3}$$

这样，只须按最简单的测量原理，在 X 中选定两个参照点 x,z, 并设定 x 为效用原点和 z 具有 1 单位效用，即令

$$u(x) = 0, \qquad u(z) = 1, \tag{3.4}$$

那么介于 x,z 之间任意点 y 的效用值即可由 β 值完全确定，即 $u(y) = \beta$. 在具体实施中，按 (3.1) 表出的无差异关系，已知 x,y,z 而评定 β, 称为效用点测定的概率当量

(PE) 法；已知 x, z, β 而评定 y, 称为效用点测定的确定当量 (CE) 法；已知 x(或 z), y, β 而评定 z (或 x), 称为效用点测定的数值当量 (VE) 法.

此外，内省方式也可扩展到使用两个二元抽彩之间的无差异关系来评定无差异点，即

$$[x, \alpha, y] \sim [z, \beta, w]. \tag{3.5}$$

式中 $x, y, z, w \in X$, 加上两个概率变量 α, β, 共六个变量，其中任五个已知，都可通过内省评定余下的某一未知量. 于是按相应的效用方程

$$(1-\alpha)u(x) + \alpha u(y) = (1-\beta)u(z) + \beta u(w), \tag{3.6}$$

可在选定原点和比例单位后解出未知的效用值.

上述两类评定无差异点从而实现效用点测定的方法，分别被称为标准赌术 (SGT) 和双赌术 (PGT). 已开发了许多广泛用于实际问题分析的效用点测定方法 [18]. 而且不少方法都已采用人—机对话方式得到实施. 例如 Novick, Dekeyrel 和 Chuang (1981) 研制的局部凝聚法就直接采用了人—机对话程序 [38], 大大方便了效用值的评定. 其简单模型是:

$$y \sim [x, \alpha, z] \Longleftrightarrow [x, \beta_1(\alpha), z] \sim [y, \beta_2(\alpha), z]. \tag{3.7}$$

式中 α 为所需评定的概率当量；$x, y, z \in X$ 且 $x \prec y \prec z$; $\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha)$ 均为 α 的已知函数，即由 α 决定的概率值.

应当指出，效用点测定必然存在着是否精确这样一个问题. 已开发一些方法和技术用于保证得到较为准确的概率当量、确定当量或数值当量. 这些方法和技术可归结为趋势估计技术 [16,40,47]、收敛技术 [29,38] 和界定技术 [20,43] 三种. 尽管如此，仍有可能出现偏差. 迄今已发现的偏差有许多种，它们都是人类自身心理因素和客观世界在人脑中的不完全反映而导致的偏离效应，即所谓确定性效应 [9,30], 渴望水平效应，结果值水平及区域效应，前后关系效应 [7], 以及偏好的惯性效应、反射效应和分离效应 [30] 等等. 也有校正偏差的某些方法和技术，例如一致性检验等. 但有些由更深刻的原因而引起的偏离，却需要理论上的改进. 非线性效用理论在某种程度上可说是应解决此类问题的需要而产生的.

四、风险性质和现代效用的数学模型

毫无疑问，效用的点测定只能得到 X 中少数有限个点的效用值，X 全集的效用数量表达需靠建立相应的数学模型. 根据主体偏好特征判明相应的效用函数应满足的各种性质，其中单调性、有界性、连续性对于实际中的决策人都是容易得到满足的. 而性质迥然不同、形式各异的效用函数表达式，则主要取决于主体不同的偏好特征即风险性质.

这里所说的风险性质，是特定地指主体面对不确定性对象 (风险) 时，其偏好所表现出的某种特性. 这一术语同以下将使用的一些术语，如风险中立、风险厌恶 (追求) 等，都不那么符合汉语语法习惯但却已经严格定义. 作为建立效用函数模型的最简单的风险性质，是所谓连锁风险性质 [4], 这是假定决策人在集 X 中对于任意二元

抽彩所评定的确定当量总遵从同一折算标准；较复杂从而能在实际中得到较多满足的风险性质，是所谓定常风险性质，这是假定决策人在集 X 中只对由等差的 $x, y \in X$ 构成的二元抽彩所评定的确定当量才遵从同一折算标准；更复杂从而能在实际中有更广泛用途的风险性质，是所谓定常交换风险性质 [19]，这是假定决策人在集 X 中只对交换风险的两种混合抽彩所评定的确定当量才遵从同一折算标准．截止目前为止已得到研制的这几种风险性质都可建立相应的数学模型并导出相应的效用函数表达式．由于它们所基于的主体行为前提依次减弱，故每一类型的结果均可大致包含在较后类型的结果之中．

除了以上按主体对抽彩的直接偏好建立效用模型外，在非确定性经济学的投资研究中，Arrow-Pratt 还建立了另一套用以导出效用函数的模型系统 [10,41]．该系统根据决策人现时拥有的整个财富水平和在该水平下对风险投资的态度来定义风险性质，并用一种称之为风险厌恶函数的 $r(x)$ 测度之．这种方法同前述方法本质上是一回事．以下分别给出它们的大致轮廓和要点．在讨论中，我们将把抉择集 X 视为实数子集，为方便，还假定 X 中所有 $x \geq 0$.

1. 连锁风险性质及其效用函数

若对于定义在 X 上的任一二元分布（抽彩）$[x, \alpha, y]$，存在 $w \in X$，使得对于所有 $\Delta, \Delta' \in X$，都有

$$w \sim [x, \alpha, y] \Rightarrow w + (1-\varepsilon)\Delta + \varepsilon\Delta' \sim [x+\Delta, \alpha, y+\Delta'], \tag{4.1}$$

则主体属于连锁风险性质，或称主体是连锁风险的．式中 ε 为二元抽彩与其确定当量 w 的折算系数，其值为

$$\varepsilon = \frac{w-x}{y-x}. \tag{4.2}$$

连锁风险性质部分源于 Torgerson(1958) 描述的标准赌术链式法原理 [47]，其特例是 $\alpha = \frac{1}{2}$ 的中点链式程序．使用 (4.2), (4.1) 便可写为

$$\begin{aligned}&(1-\varepsilon)x + \varepsilon y \sim [x, \alpha, y]\\&\Rightarrow (1-\varepsilon)(x+\Delta) + \varepsilon(y+\Delta') \sim [x+\Delta, \alpha, y+\Delta'].\end{aligned} \tag{4.3}$$

这便是前述的定义在 X 上的所有二元抽彩对于各自的确定当量均遵从同一折算标准的连锁依从性质．显然，这种风险性质具有很强的关于主体行为前提的假设，在实际采用中，则应特别慎重．根据线性效用原理，可知连锁风险性质 (4.3) 蕴含以下关于 u 的函数方程：

$$u((1-\varepsilon)x + \varepsilon y) = (1-\alpha)u(x) + \alpha u(y). \tag{4.4}$$

在初等函数范围，此方程当 $\varepsilon \neq \alpha$ 时无解．而当 $\varepsilon = \alpha$ 时，其连续解仅限于线性函数．这就是说，一个属于连锁风险性质的人，只要他不是风险中立，则其效用函数便不能表达为初等连续函数．作者在文献 [4] 中，导出了一种非初等连锁风险效用函数计算公式：

$$u(x_i) = \frac{i}{2^h}, \tag{4.5}$$

其中 h 为按要求精度任选的非零正整数; i 为与 h 和 x_i 相关的非零正整数, 并由以下方程组决定:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{i=2}^{i} \varepsilon^{h-t_i}(1-\varepsilon)^{t_i}, \\ t_i = \sum_{r=1}^{s+1}([\frac{i-2^{r-1}-1}{2^r}]+1)(2-r). \end{cases} \tag{4.6}$$

式中 $[\cdot]$ 表示取整; $s = \dfrac{\ln(i-1)}{\ln 2}$. 文献 [3] 有关于该算法的讨论.

连锁风险性质可视为 SGT 链式当量的一种结果. 除了理论研究外, 它也许不那么具有实际应用的价值. 若令 (4.1) 中 $\Delta = \Delta'$, 那么它便成为以下较适合于实际选择行为的另一种风险性质, 即定常风险性质.

2. 定常风险性质及其效用函数

若对于定义在 X 上的每一简单概率分布 p, 有 $w \in X$, 使得对于所有 $\Delta \in X$, 必有

$$w \sim p \Rightarrow w + \Delta \sim p + \Delta, \tag{4.7}$$

则主体属于定常风险性质, 或称主体是定常风险的. 式中 $p + \Delta$ 表示在 p 的每一机会结果上均给一增量 Δ 所得的抽彩. 这一性质也称一致性公理或 δ 性质. 一般分析只需考虑 p 为二元抽彩即可. 这时 (4.7) 可表述为

$$w \sim [x, \alpha, y] \Rightarrow w + \Delta \sim [x + \Delta, \alpha, y + \Delta]. \tag{4.8}$$

这便是前述连锁风险性质当 $\Delta = \Delta'$ 的结果. 定常风险性质最先由 Pfanzagl 给出 [39]. 由于它相当于在 (4.3) 中加上 $\Delta \equiv \Delta'$ 这一条件, 故其蕴含的函数方程须包含变量 Δ, 今用 z 表示之. 于是 (4.8) 右端蕴含

$$u(w + z) = (1-\alpha)u(x + z) + \alpha u(y + z). \tag{4.9}$$

而 (4.8) 左端蕴含 $u(w) = (1-\alpha)u(x) + \alpha u(y)$, 故 $w = u^{-1}((1-\alpha)u(x) + \alpha u(y))$. 将这一结果代入 (4.9), 便有

$$u(u^{-1}((1-\alpha)u(x) + \alpha u(y)) + z) = (1-\alpha)u(x+z) + \alpha u(y+z). \tag{4.10}$$

这便是用于导出 u 的函数方程. 经一系列变换, 它可化为一般加性的特殊函数方程. 其解法可参见 [6][39]. 其连续解为以下两种初等函数之一:

$$u(x) = ax + b, \tag{4.11}$$

以及

$$u(x) = ae^{\lambda x} + b. \tag{4.12}$$

上列二式中 a, b, λ 均为参数, 在一定条件下, 它们可以由原抽彩与其确定当量的折算系数 ε 所决定. 如果按规范化条件选取 $u(x) = u(0) = 0, u(y) = u(1) = 1$, 且评定了等可能抽彩 $[0, \frac{1}{2}, 1]$ 的确定当量为 $\varepsilon(\neq 0.5)$, 则定义在 [0,1] 上的效用函数必为 [6]

$$u(x)=\frac{e^{(\ln\varphi(\varepsilon))x}-1}{\varphi(\varepsilon)-1}. \tag{4.13}$$

式中 φ 为方程 $2\varphi^{\varepsilon}-\varphi-1=0$ 的非 1 正实根，可证明它是唯一的. 例如当 $\varepsilon=0.35$, 则可导出

$$u(x)=-1.3858e^{-1.2787x}+1.3858.$$

这属定常风险厌恶型 ($\varepsilon<0.5$); 当 $\varepsilon=0.6$, 则可导出

$$u(x)=0.7841e^{0.8222}-0.7841.$$

这属定常风险追求型 ($\varepsilon>0.5$); 当 $\varepsilon=0.5, u(x)$ 便退化为 (4.11), 在规范化条件下, $u(x)=x$.

定常风险性质比连锁风险性质进了一步. 它可把风险厌恶（追求）表示成初等连续函数. 但对变化的风险态度却不能给出恰当的描述.

3. **定常交换风险性质及其效用函数**

对于所有 $\theta\in X$, 有一概率函数 $\beta(\theta), 0<\beta(\theta)<1$ 且 $\beta(0)=\frac{1}{2}$; 若对于 X 上的概率分布 p, 都有 X 中的元素 y, 使得以下无差异关系成立:

$$[p,\beta(\theta),y+\theta]\sim[y,\beta(\theta),p+\theta], \tag{4.14}$$

则主体属于定常交换风险性质，或称主体是定常交换风险. $\beta(\theta)$ 称作交换概率，y 称作交换值. 若 $\beta(\theta)\equiv\frac{1}{2}$, 则主体属于对称的定常交换风险性质，或称主体为对称定常交换风险；若 (4.14) 对于 $p+\Delta$ 和 $y+\Delta$ 成立（对于所有 $\Delta\in X$), 即

$$[p+\Delta,\beta(\theta),y+\theta+\Delta]\sim[y+\Delta,\beta(\theta),p+\theta+\Delta], \tag{4.15}$$

则主体属于广义的定常交换风险性质，称主体为广义定常交换风险.

定常交换风险性质是近几年才开发的一种用于较广范围建立效用函数模型的风险性质. 可惜目前对 (4.14) 和 (4.15) 还没有如同前述连锁或定常风险性质那样直观的解释.

定理 4.1[19] 若 X 上存在一多次可微效用函数 u, 则主体为 $y\sim p$ 条件下的广义定常交换风险，当且仅当 u 为以下两种函数之一:

(i) 线性函数 $u(x)=ax+b$;
(ii) 指数函数 $u(x)=ae^{\lambda x}+b$.

主体为非 $(y\sim p)$ 条件下的广义定常交换风险，当且仅当 u 为以下四种函数之一:

(iii) 指数组合函数 $u(x)=ae^{\lambda x}+be^{\mu x}+c$;
(iv) 线性 — 指数积函数 $u(x)=(ax+b)e^{\lambda x}+c$;
(v) 线性 — 指数和函数 $u(x)=ax+be^{\mu x}+c$;
(vi) 二次函数 $u(x)=ax+bx^2+c$.

上列各式中，λ,μ,a 和后四式的 b 均为非零常数.

定理 4.2[19] 若 X 上存在一多次可微效用函数 u, 则对于定义在 X 上的每一概率分布 p, 主体为对称定常交换风险且对至少两个 $y\in X$ 成立，当且仅当 $u(x)=ax+b$; 主体为对称定常交换风险且仅对唯一的 $y\in X$ 成立，

(i) 若 $y \sim p$, 当且仅当 $u(x) = ae^{\lambda x} + b$,

(ii) 若非 $(y \sim p)$, 当且仅当 $u(x) = ax + be^{\mu x} + c$ 或 $u(x) = ax + bx^2 + c$.

按照这两条定理，参照其他条件，便可通过对主体偏好特征判定而得到 (4.14)(4.15) 中有关 $p, \beta(\theta)$ 和 y 的信息，从而鉴别主体风险性质，得到应当采用的效用函数表达式．事实上，以上 6 类效用函数，其成立条件均同各类风险态度相对应．线性函数和指数函数适用于定常风险态度中风险中立和风险厌恶 (追求). 指数组合函数与线性 — 指数和函数适用于递减风险厌恶；线性 — 指数积函数与二次函数适用于递增风险厌恶．

此外， Arrow-Pratt 的另一套效用函数模型系统采用了风险报酬 π 定义各类风险态度 [41], 抉择集 X 始终表示决策人的整个财富水平．当主体的初始财富水平为 $x \in X$, 若他 (们) 面临一抽彩 p 且评定了其确定当量 (记为 $\tau(x,p)$), 则风险报酬定义为

$$\pi(x,p) = E(p) - \tau(x,p). \tag{4.16}$$

这样，按 π 的符号和增减性，便可同前述一样定义各类风险态度，这比一般地定义各类风险态度显得更具体．但以此导出效用函数的一套方法，仍然基于前面归纳的几种风险性质．事实上，只要把 (4.7) 中的 Δ 视为决策人的初始财富 x, 便有

$$\tau(x,p) \sim p \Rightarrow x + \tau(x,p) \sim x + p. \tag{4.17}$$

上式右端蕴含

$$u(x + \tau(x,p)) = u(x + p). \tag{4.18}$$

对此式使用 (4.16) 可得到

$$u(x + E(p) - \pi(x,p)) = u(x + p). \tag{4.19}$$

这便是 Arrow-Pratt 模型方法的基本方程．在中性风险 ($E(p) = 0$) 条件下，对 (4.19) 使用泰勒展式并经一系列变换，不难导出以下结果：

$$\pi(x,p) = -\frac{1}{2}\sigma_p^2\left(\frac{u''(x)}{u'(x)}\right) \tag{4.20}$$

式中 σ_p^2 为抽彩 p(随机变量) 的方差．我们定义

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \tag{4.21}$$

并称之为风险厌恶函数或 Arrow-Pratt 函数．于是按 (4.20) 便有

$$r(x) = \frac{2\pi(x,p)}{\sigma_p^2}, \tag{4.22}$$

这样，由 π 定量描述的各类风险态度便可由 r 来测度，而且只要知道某种风险态度下的 r, 便可通过解微分方程 (4.21) 得到 u.

Arrow-Pratt 方法在投资决策研究中，还可用于所谓比例风险的情形 [10,41]. 这在研究最佳比例投资中有用．这时要按比例风险 xp 定义风险厌恶函数 r^*, 即

$$r^*(x)=\frac{2\pi^*(x,p)}{\sigma_p^2},\tag{4.23}$$

式中 π^* 为比例风险报酬，不难导出

$$r^*(x)=xr(x).\tag{4.24}$$

于是可通过讨论 r 来讨论由 r^* 测度的各种比例风险态度及其效用函数.

此外，为要从以上两大类方法导出的各种效用函数中得到形式上更丰富多彩的效用函数，还可利用以下几条关于由已知效用函数构造新效用函数的定理.

定理 4.3[41] 若 $u_1(x)$ 在区间 $[ax_0+b,ax_1+b]$(其中 a,b 为常数且 $a>0$) 上为递减风险厌恶效用函数，则

$$u(x)=u_1(ax+b),a>0$$

在区间 $[x_0,x_1]$ 上也为递减风险厌恶效用函数.

定理 4.4[5] 设 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 在区间 $[x_0,x_1]$ 上为定常风险厌恶或风险中立效用函数，$r_1,r_2,\cdots,r_n$ 分别是它们的 Arrow-Pratt 函数；又 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数且都大于 0. 若 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 中至少有两个不相等，则

$$u=\sum_{i=1}^n a_iu_i,\qquad a_i>0$$

在区间 $[x_0,x_1]$ 上为递减风险厌恶效用函数.

定理 4.5[41] 若 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 在区间 $[x_0,x_1]$ 上为递减风险厌恶效用函数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数且都大于 0, 则

$$u=\sum_{i=1}^n a_iu_i,\qquad a_i>0$$

在区间 $[x_0,x_1]$ 上为递减风险厌恶效用函数.

定理 4.6[41] 若 u_1 在区间 $[x_0,x_1]$ 上和 u_2 在区间 $[u_1(x_0),u_1(x_1)]$ 上均为递减风险厌恶效用函数，则

$$u(x)=u_2(u_1(x))$$

在区间 $[x_0,x_1]$ 上也为递减风险厌恶效用函数.

有了各种风险性质或风险态度下相应的效用函数，最后的问题，便是根据效用点测定数据 (当量值), 即关于效用函数的定量约束，来确定具体的效用函数形式及其参数值. 最简单的情形是效用点测定结果与按主体风险性质选用的效用函数完全相容. 这时只须按照与未知参数数目相同的若干方程确定参数值即可. 例如 (4.13) 就是按这种最简单情形解出的结果.

较复杂的情形是效用点测定结果与按主体风险性质所选的效用函数不完全相容，或主体因其在不同区间上有不同风险性质而有不同的效用函数. 这时就有一个如何按点测定结果来“拼接”不同凹性的效用曲线的问题. Meyer 和 Pratt 证明[37], 当测定 X 中 K 个点的效用后，若主体为定常风险厌恶，则其效用函数上下界的确定，是

一个标准的线性规划问题. 若主体不属定常风险性质，而属变化风险性质如递减风险厌恶，则其效用函数的确定便需要更复杂的处理技术. 其大体程序是：先按一维搜索法分别确定单位区间上作为定常风险厌恶效用函数的参数，这些参数从量上体现了所有效用函数必然依次凹性递减；然后确定以单位区间上这若干效用函数为交叉式上下界的整体效用函数的边界条件；最后按定理 4.4 确定可供采用并已满足所有定量限制的递减风险厌恶效用函数 [7,37]. 现已开发有可供实际应用的同类方法的计算机程序 [45].

五、多属性效用理论

以上关于一维属性水平集合 X 上的效用理论可推广到 n 维属性的情形. 我们用 n 维 Euclid 空间的子集 $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 表示具有多维属性的对象全体，其中 X_i 表示第 i 种属性水平的集合. 如果主体在 X_i 上的偏好不受在其余维上偏好变化的影响，则说主体在 X_i 上的偏好具有独立性，或称 X_i 是偏好独立的；如果定义在 X_i 上的效用对定义在 $\mathcal{X}$ 上的总效用的贡献 (所提供的分效用) 与其余 $n-1$ 维上效用的贡献相互独立，则称 X_i 是效用独立的. 偏好独立性和效用独立性的定义可推广到二维至 $n-1$ 维. n 维效用的存在和计算在某种程度上得依赖于不大于 $n-1$ 的任意 k 维属性水平集合的效用独立性. 判断这种独立性，有以下定理：

定理 5.1[31]　设 $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, n \geq 3$. 若所有一维属性水平集合 X_i 都是效用独立的，所有二维属性水平集合 $X_i \times X_j$ 都是偏好独立的，则不大于 $n-1$ 的任意 k 维属性水平集合都是效用独立的.

如果任意 k 维 $(k \leq n-1)$ 属性水平集合满足效用独立性，那么，定义在 $\mathcal{X}$ 上的效用函数便可按照以下定理给出的两个计算公式，由各单一属性水平集合上的效用函数来确定.

定理 5.2[31]　设 $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, n \geq 3$. 若主体的偏好和效用满足：

(i) 一维属性水平集合上的效用独立性，即所有 X_i 都是效用独立的；

(ii) 二维属性水平集合上的偏好独立性，即所有 $X_i \times X_j$ 都是偏好独立的，

则定义在 $\mathcal{X}$ 上关于偏好的二元关系保序的效用函数 u 必满足以下两个计算公式之一：

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(x_i) \tag{5.1}$$

以及

$$1 + ku(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} (1 + kk_i u_i(x_i)). \tag{5.2}$$

式中 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}, x_i \in X_i, u_i(x_i)$ 为定义在第 i 种属性水平集合 X_i 上的效用函数，k, k_i 均为比例常数，且 $k > -1, 0 < k_i < 1$.

(5.1) 和 (5.2) 分别给出了 $\mathcal{X}$ 上效用函数的加性和乘性两种形式，它们涉及到常数 k 是否为 0 以及常数 k_i 的取值范围. 关于 k, k_i 的取值与多维效用函数加性或乘性的关系，以及 k, k_i 自身取值之间的关系，还有加性与乘性的判定方法，偏好独立性与

效用独立性的验证，等等，可参见文献 [1] 第八章，文献 [7] 定理 10.5.1, 定理 10.6.1 和有关章节的讨论. 值得提到的是，许多作者，例如 Fishburn, Pollak 和 Meyer 等，都曾用过不同方法来给出加性或乘性效用函数的必要和充分条件. Dyer 和 Sarin 则用与众不同的方法来研究多属性效用函数. 这种方法是在传统效用 (非 N-M 效用) 即偏好强度差概念的基础上，定义一种被称做可测价值函数的实值函数 v, 用 v 来讨论多属性效用函数 [7].

六、非线性效用理论

前面几节讨论的内容，作为现代效用理论的基础，相当一部分是近 20 年间取得的成果. 目前这方面的研究还在进行. 在理论方面，效用的本质是什么，它仅与概率相联系才可量度还是因其有某种更基本的属性才使其可量度，它赖以建立的弱序公理、连续性公理和独立性公理适应范围有多大，在与这三条公理相悖的实际发生的选择行为中应当把它们减弱到何种程度，一旦减弱公理后相应的理论和方法应当怎样修改，等等，都是值得进一步研究的问题. 此外，在规范条件下把效用理论应用于决策分析，如何按主体的风险性质建立效用函数模型，还可扩展到更深的层次来研究；效用点测定计算机实施程序的开发，还有许多空白；效用测定的偏差问题、原因分析和解决办法，也有待新的探索.

近几年现代效用理论研究中一个引人注目的趋向是非线性效用理论的崛起. 它作为线性效用理论的扩展，有着广阔的发展前景. 要了解其产生背景，得先了解线性效用的局限性. 法国著名经济学家 M.Allais 曾系统举过一些明显违背线性效用独立性公理的反例，即学术界众所周知的 Allais 悖论 [8,9]. 著名心理学家 W.Edwards 也以其独特方式对线性效用理论提出质疑 [23]. 弱序公理和连续性公理也曾遭到不同程度的批评. 例如人们在实际选择行为中往往会受到可区分性阀值的限制而违反偏好的无差异判断的传递性. 大多数学者认定，过去发现的其中特别是近十年来发现的许多与线性效用理论不符的实际选择行为 [23,30,33], 包括本文第三节提到的若干偏离效应，都或多或少地与独立性公理和弱序公理本身所存在的问题和矛盾相关. 希望能有一种新的理论以减弱对独立性和传递性公理的依赖性. 于是非线性效用理论应运而生. 它的代表人物，应推近 20 年来在效用理论上取得显赫成果的美国决策学家、AT&T 贝尔实验室研究员 P.C.Fishburn.

非线性效用理论基于 N-M 效用的几种非线性模型. 这里的关键，是把独立性公理减弱到使能保持一阶随机优势 (FSD), 从而得到 Allais 所称的绝对偏好公理前提条件的模型 [36]. 在弱序公理得到满足的条件下，对于任意结果的集合，起主要作用的则是加权线性模型. 该模型首先由 Chew(周恕弘) 和 MacCrimmon 公理化 [15], 而后由 Chew(周恕弘)[14] 和 Fishburn[22] 加以改进，概括起来说就是：在定义了弱序的 $\mathcal{P}$ 中，有

$$p \succ q \Longleftrightarrow u(p)w(q) > u(q)w(p).$$

其中 u, w 均为 $\mathcal{P}$ 上的线性函数，$w \geq 0$ 称做加权函数. 若 w 严格正，则有该模型的比例形式：

$$p \succ q \longleftrightarrow \frac{u(p)}{w(p)} > \frac{u(q)}{w(q)}.$$

目前，最具代表性的非线性效用理论是所谓斜对称双线性效用理论 [21,22]，简称 SSB 效用理论．它是八十年代中期由 Fishburn 创立的．它使用的公理不要求传递性和独立性，故一方面能弱满足实际中的选择行为，另一方面又能强满足规范理论的要求，所以表现出明显的优越性 [12]．它因使用了一种称之为斜对称双线性函数 ϕ 而得名．ϕ 是用于比较一对抽彩的函数，定义在笛卡尔积 $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ 上．SSB 的理论模型是：对于所有 $p, q \in \mathcal{P}$，有

$$p \succ q \Longleftrightarrow \phi(p, q) > 0.$$

所谓斜对称，意味着 $\phi(p,q) = -\phi(q,p)$；所谓双线性，则意味着 $\phi((1-\lambda)p + \lambda q, r) = (1-\lambda)\phi(p,r) + \lambda\phi(q,r)$．如果在 SSB 理论中增加无差异关系的传递性，就可得到前述的加权线性模型；如再增加独立性，则 $w \equiv 1$，便回到了 N-M 线性效用模型．

SSB 效用理论目前已用于决策分析的一些领域，近期还出现了许多相关的理论和应用研究．Bell[11] 以及 Loomes 和 Sugden[34] 在分别研制的 regret 理论中，用 SSB 函数 ϕ 很好地体现了 regret 和 rejoicing 两个概念；Fishburn 和 LaValle[24]，LaVall 和 Fishburn[32] 等开发了比较抽彩行为的 SSB 模型；Schmeidler[46]，Luce 和 Narens[35]，Gilboa[25]，Hazen[27] 等研制了传递的且适合于非加性概率的非线性效用模型．

非线性效用理论作为现代效用理论目前发展的一种趋势，预计在本世纪最后 10 年还会很活跃．以后的研究看来相当一部分仍要围绕如何减弱线性效用三条公理来进行，这可使现代效用理论更接近于实际发生的选择判断行为．

参考文献

[1] 陈珽，决策分析，科学出版社，1987.

[2] 郑权，决策与型用，运筹学杂志，3(1984), No.1, 14-21.

[3] 姜青舫，实用决策分析，贵州人民出版社，1985.

[4] ——，效用函数值的计算方法，运筹学杂志，6(1987), N0 2, 57-58.

[5] ——，Arrow-Pratt 测度用关于构造效用函数的一个新定理，运筹学杂志，9(1990), N0.2, 45-46.

[6] ——，关于效用值计算法的注记及进一步研究，贵州决策科学研究会科研报告，01(1989).

[7] ——，现代效用理论，贵州人民出版社，1990.

[8] Allais, M., Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiom s de l'école americaine, Econometrica, 21(1953), 503-546.

[9] ——, The So-Called Allais Paradox and Rational Decisions under Uncertainty, in M. Allais and O. Hagen (Eds.), Expected Utility Hypotheses and Allais Paradox, Reidel, Dordrecht. Holland, 1979, 431-681.

[10] Arrow, K.J., Essays in the Theory of Risk-Bearing, markham, Chicago, 1971.

[11] Bell, D., Regret in Decision Making under Uncertainty, Operations Research, 30(1982), 961-981.

[12] ——and P.H. Farquhar, Perspectives on Utility Theory, Operations Research, 34(1986), 178-183.

[13] Bernoulli, D., Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis, Comment. Acad. Sci. Imper. Petropolitanae, 5(1738), 175-192. L.Sommer 的英译文见： —— Econometrica, 22(1954), 23-36.

[14] Chew, S.H., A Generalization of the Quasilinear Mean with Applications to the Measurement of Income Inequality and Decision Theory Resolving the Allais Paradox, Econometrica, 51(1983), 1065-1092.

[15] ——and K.R.MacCrimmon, Alpha-nu Choice Theory: A Generalization of Expected Utility Theory, Working Paper 669, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Vancouver, 1979.

[16] Coombs, C.H., A Theory of Data, Wiley, New York, 1964.

[17] Debreu, G., Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, Wiley, New York, 1959.

[18] Farquhar, P.H., Utility Assessment Methods, Management Science, 30(1984), 1283-1300.

[19] ——and Y.Nakamura, Constant Exchange Risk Properties, Operations Research, 35(1987), 206-214.
[20] Fishburn, P.C., Decision and Value Theory, Wiley, New York, 1964.
[21] ——, Nontransitive Measurable Utility, Journal of Mathematical Psycholoty, 26(1982), 31-67.
[22] ——, Transitive Measurable Utility, Journal of Economic Theory, 31(1983), 293-317.
[23] ——, Foundations of Decision Analysis: Along the Way, Management Science, 35(1989), 387-405.
[24] —— and I.H. Lavalle, A Nonlinear, Nontransitive and Additive-Probability Model for Decisions under Uncertainty, Annals of Statistics, 15(1987), 830-844.
[25] Gilboa, I., Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities, Journal of Mathematical Economics, 16(1987), 65-88.
[26] Grandmont, J.M., Continuity Properties of a von Neumann-Morgenstern Utility, Journal of Economic Theory, 4(1972), 45-57.
[27] Hazen, G.B., Subjectively Weighted Linear Utility, Theory and Decision, 23(1987), 261-282.
[28] Herstein, I.N. and J.Milnor, An Axiomatic Approach to Measurable Utility, Econometrica, 21(1953), 291-297.
[29] Hull, J., P.G. Moore and H. Thomas, Utility and Its Measurement, Journal of Royal Statistical Society, Ser. A, 136(1973), 226-247.
[30] Kahneman, D. and A. Tversky, Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, Econometrica, 47(1979), 263-291.
[31] Keeney, R.L., Multiplicative Utility Functions, Operations Research, 22(1974), 22-34
[32] Lavalle, I.H. and P.C. Fishburn, Decision Analysis Under States-Additive SSB Preferences, Operations Research, 35(1987), 722-735.
[33] Lichtenstein, S. and P. Slovic, Reversals of Preferences between Bids and Choices in Gambling Decisions, Journal of Experimental Psychology, 89(1971), 46-55.
[34] Loomes, G. and R. Sugden, Some Implications of a More General Form of Regret Theory, Journal of Economic Theory, 41(1987), 270-287.
[35] Luce and L.Narens, Classification of Concatenation Measurement Structures according to Scale Type, Journal of Mathematical Psychology, 29(1985), 1-72.
[36] Machina, M.J., Decision-Making in the Presence of Risk, Science, 236(1987), 537-543.
[37] Meyer, R.F. and J.W. Pratt, The Consistent Assessment and Fairing of Preference Functions, IEEE Transactions on Systems, Science and Cybernetic , 4(1968), 270-278.
[38] Novick, M.R., D.F. Dekeyrel and D.T.Chuang, Lo al and Regional Coherence Utility Assessment Procedures, Bayesian Statistics, Proceedings of the First international Meeting, University Press, Valencia, Spain, 1981, 557-568.
[39] Pfanzagl, J., A General Theory of Measurement Applications to Utility, Naval Research Logistics Quarterly, 6(1959) 283-294.
[40] ——, Theory of Measurement, Wiley, New York, 1968.
[41] Pratt, J.W., Risk Aversion in the Small and the Large, Econometrica, 32(1964), 122-136.
[42] Ramsey, F.P., Truth and Probability, in F.P.Ramsey, The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, Harcourt, Brace and Co., New York (1931). Reprinted in H.E. Hyburg and H.E.Smokler (Eds.), Studies in Subjective Probability, Wiley, New York, 1964, 61-92.
[43] Rowe, W.D., An Anatomy of Risk, Wiley, New York, 1977.
[44] Savage, L.J., The Foundations of Statistics, Wiley New York, 1954.
[45] Schlaifer, R.O., Computer Programs for Elementary Decision Analysis, Division of Research, Harvard Business School, 1971.
[46] Schmeidler, D., Subjective Probability and Expected Utility without Additivity, Preprint 84. Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota, Minneapolis, 1984.
[47] Torgerson, W.S., Theory and Methods of Scaling, Wiley, New York, 1958.
[48] von Neumann, J. and O.Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, 2nd ed, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1947.