超弹性体非线性本构理论

CHAO TANXINGTI FEI XIANXING BENGOU LILUN

李忱 著

国防工業出版社
National Defense Industry Press

超弹性体非线性本构理论

李忱 著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书包括两部分内容：第一部分张量初步，主要介绍了张量的基本概念、代数运算、张量函数及其导数。这部分内容可以相对独立，也可以作为第二部分内容的基础。第二部分内容是从张量函数出发，用含有高阶弹性张量的多项式，系统研究了超弹性体非线性本构关系。包括：构造了一种新的关于正交各向异性、横观各向同性张量函数不变量表示形式；给出了正交各向异性、横观各向同性张量函数表示定理；导出超弹性正交各向异性材料 3 次、2 次非线性本构方程及横观各向同性材料、各向同性材料，4 次、3 次、2 次非线性本构方程；根据共轭应力应变对应关系，讨论了各向同性弹性体 16 种形式本构方程的内在联系等。

图书在版编目（CIP）数据

超弹性体非线性本构理论/李忱著. —北京：国防工业出版社，2012.9

ISBN 978-7-118-08396-5

Ⅰ. ①超… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①非线性弹性力学 Ⅳ. ①0343.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 222012 号

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）

北京市海淀区四季青印刷厂

新华书店经售

*

开本 880×1230 1/32 印张 5 ⅞ 字数 164 千字

2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 **定价** 48.00 元

国防书店：（010）88540777 发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755 发行业务：（010）88540717

总　序

2012年，太原科技大学将迎来60周年华诞。值此六秩荣庆之际，我校的专家学者推出了这套学术丛书，以此献礼，共襄盛举。

60年前，伴随着新中国的成立，伟业初创，百废待兴，以民族工业为先锋的社会主义现代化建设蓬勃兴起，太原科技大学应运而生。60年来，几代科大人始终心系民族振兴大业，胸怀制造强国梦想，潜心教书育人，勇担科技难题，积极服务社会，为国家装备制造行业发展壮大和社会主义现代化建设做出了积极贡献。四万余名优秀学子从这里奔赴国民经济建设的各个战场，涌现出一大批杰出的科学家、优秀的工程师和知名的企业家。作为新中国独立建设的两所“重型机械”院校之一，今天的太原科技大学已发展成为一所以工业为主，“重大技术装备”领域主流学科特色鲜明，多学科协调发展的教学研究型大学，成为国家重型机械工业高层次人才培养和高水平科技研发的重要基地之一。

太原科技大学一直拥有浓郁的科研和学术氛围，众位同仁在教学科研岗位上辛勤耕耘，硕果累累。这套丛书的编撰出版，定能让广大读者、校友和在校求学深造的莘莘学子共享我校科技百花园散发的诱人芬芳。

愿太原科技大学在新的征途上继往开来、再创辉煌。

谨以为序。

太原科技大学校长　郭勇义

2012年6月

前　言

材料的本构关系是当前变形体力学研究中的热点问题之一，特别是近几十年来，它已经成为多学科交叉的核心课题，引起了力学、材料学、物理学、应用数学研究者的极大关注。这不仅仅是因为物质的几何描述、守恒定律和本构关系联立在一起才能构成封闭的数学方程组，而且对于不同的研究对象只有给出正确的本构关系，才有可能客观地反应出研究问题的本质。在实际应用中，本构关系是材料和结构强度设计、寿命安全评估的基础。

目前，本构关系的研究主要有两大类方法。第一类方法是基于材料细观塑性理论的晶体滑移本构模型研究，该方法从滑移系的激活和滑移规律出发，以准确掌握滑移规律为前提，研究材料本构理论。但由于滑移规律本身非常复杂，对外界条件敏感，所建立的模型中包含许多与滑移系相关的材料常数，需做大量复杂的实验，特别是至今尚缺乏一种好的方法来确定滑移系之间相互作用的潜硬化系数，因此在工程实际应用中受到一定的限制。第二类方法是基于唯象理论建立的材料连续本构模型，即通过一定数量的实验研究，获得材料的加载曲线，再结合一定的算法得到材料的本构关系。该方法计算简单，在工程实际中对于真实构件的结构强度和寿命的初步计算，以及新材料力学性能的研究中得到了广泛应用。但该方法对于变量的完备性和不可约性缺乏严谨的证明，通常情况是对于特定的材料应用效果明显，而对于同类材料的应用缺乏足够的精度。

利用晶体滑移理论从微观角度研究材料本构理论，体系还不够完善，工程实际应用受到限制；而利用唯象理论得到的本构方程又不能

描述材料的全部力学行为，其普适性有限。从张量函数出发建立、推导描述材料力学行为的普适性本构方程，在当前变形体力学研究当中将发挥独特的作用。

本书包含两大部分内容，第一部分为张量初步，主要介绍了张量的基本概念、代数运算、张量函数及其导数，主要参考了李松年、黄执中编著的《非线性连续统力学》,黄克智、薛明德、陆明万编著的《张量分析》，黄义、张引科编著的《张量及其在连续介质力学中的应用》及黄筑平编著的《连续介质力学基础》。第二部分主要为作者近年来的研究成果，为了丰富内容也参考了文献中作者的成果，在此表示感谢。

本书主要内容是从张量函数出发，用含有高阶弹性张量的多项式，系统研究了超弹性体非线性本构关系：构造了一种新的关于正交各向异性、横观各向同性张量函数不变量表示形式，给出了正交各向异性、横观各向同性张量函数表示定理并证明这种表示是完备的、不可约的；通过归纳导出了超弹性体各向异性 $2n$ 阶弹性张量 $\boldsymbol{C}$ 在 n 取不同值时独立的分量个数；同时首次导出具有一个对称面材料、正交各向异性材料、准横观各向同性材料弹性张量独立分量的计算公式；给出横观各向同性、各向同性材料 $2n$ 阶弹性张量 $\boldsymbol{C}$ 在 n 取不同值时独立分量个数及独立分量的一种表示形式，给出了各向同性这一大类材料只有 14 个独立的完备的弹性常数的证明方法；直接从张量函数出发，导出超弹性正交各向异性材料 3 次、2 次非线性本构方程及横观各向同性材料、各向同性材料，4 次、3 次、2 次非线性本构方程，根据积分关系导出相应的应变能函数。在以往的研究中采用先假设应变能与不变量的关系，再根据微分关系导出本构方程的办法。虽然两种方法对于超弹性体是等价的，但是本书的方法更直接、更能精确地描述材料的物理本质，可以直接适用于工程实际中常见的非保守系统问题；本书还根据共轭应力应变对应关系，讨论了各向同性弹性体 16 种形式本构方程的内在联系。证明了应变能函数 $\boldsymbol{W}$ 存在的充分和必要

条件是 $2n$ 阶弹性张量 $\boldsymbol{C}$ 的分量具有 Voigt 对称性，现有文献给出：应变能函数 W 存在的条件是满足一组非常复杂的偏微分方程组。显而易见，新的充要条件降低了求解的难度；直接从可压物质本构方程出发，代入不可压条件，首次得出不可压弹性体完备的、不可约的用不变量表示的本构方程、应变能函数。新的本构方程比目前文献中引入拉格朗日乘子表示的本构方程更简便、物理含义更明确。根据本书给出的方程，描述不可压超弹性材料时，所得结果与已有实验结果吻合很好。

1987 年，本人师从北京航空航天大学黄执中教授，是他将作者带入了这个神奇的研究领域。2005 年，跟随太原理工大学杨桂通教授从事博士研究工作。两位导师是作者学术研究航程上的探路灯。他们渊博的学识、严谨的学风、敏锐博大的学术视野，精益求精的治学态度，仁爱宽厚的为师风范，不断引导着我、激励着我：做人、做事、做学问。两位导师 80 多岁高龄，仍在孜孜不倦地作学问，书中的成果凝聚着他们的心血。在这里献上深深的谢意！

由于水平有限，书中一定有错误和不当之处，恳请读者和专家批评指正。

作者

2012 年 6 月

目　录

第1章 绪 论

1.1 超弹性材料本构理论的发展及其研究方法

研究物质的宏观力学行为仅有变形和运动的几何学描述及守恒定律，尚不能构成数学物理（初）边值问题的完整提法，这是因为仅有几何学描述和守恒定律所给出的方程个数总少于需要确定的未知数个数。为此，需要给出描述材料力学性质的本构关系。本构关系可以理解为物质中应力张量、热流向量、内能、熵等物理量与其所经受的温度历史和变形历史所满足的关系。本构关系研究已经成为当前变形体力学的研究热点之一，备受人们的重视。特别是近三四十年间，它已经成为一种多学科交叉的中心课题，引起了力学、材料学、物理学、应用数学研究者的极大关注[1-15]。这不仅仅因为物质的几何描述、守恒定律和本构关系联立在一起构成封闭的数学方程组，更重要是对于不同的研究对象只有给出正确的本构关系，才有可能客观地反应出研究问题的本质。在实际应用中，本构关系是材料和结构的强度设计、安全寿命评估的基础。

张量函数的完备和不可约表示，包含了非线性本构方程一般且协调一致不变性形式，规定了所引入标量变量的数目和类型，明确了独立的弹性张量形式。张量函数在建立描述非线性材料力学行为模型的过程中尤为有效。这是因为，“不变性”是张量及张量函数最基本、最本质的特性，不变性条件在张量函数中起到相当的支配性作用，除了张量函数我们无法通过其他方式简单地分析确定本构方程中独立标量变量的数目和类型、无法确定独立的弹性张量形式。另外，材料的对称性（各向同性、横观各向同性、正交异性、晶体对称性等）限制了本构关系中张量函数的形式，同时规定在张量函数中出现的、可从实验中

观测的独立的标量变量的类型和数量。例如：考虑存在应变能函数为 W 的弹性材料。这时，W 可以在笛卡儿坐标系下表示为 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的 6 个独立分量 E_{11}、E_{22}、E_{33}、$E_{23}=E_{32}$、$E_{31}=E_{13}$、$E_{12}=E_{21}$ 的标量值函数。但是，上述表示不是不变性表示，表示形式将随坐标改变而改变。进一步，W 不变性可表示为 $\boldsymbol{E}$ 的3个主迹 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}^1$、$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}^2$、$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}^3$ 或等价地为 $\boldsymbol{E}$ 的 3 个主不变量 I_1、I_2、I_3 的函数。具体如下

$$W=W(I_1,I_2,I_3) \tag{1.1}$$

非线性本构理论的一般性研究和张量函数表示理论在连续介质力学中的应用，始于 Rivlin[16,17]的工作以及 Reiner[18,19]关于有限应变的各向同性不可压缩超弹性材料和非线性流体研究。Reiner 得出：自变量为对称仿射量 $\boldsymbol{E}$，如果仿射量函数 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{E})$ 是各向同性的，则它可以表示为 $\boldsymbol{K}=\varphi_0\mathbf{1}+\varphi_1\boldsymbol{E}+\varphi_2\boldsymbol{E}^2$。Reiner 的工作在本构理论研究上起到了推动性的作用（但是，对于非线性问题，如何确定 φ_0、φ_1、φ_2 未见更详细的论述）。20 世纪 50 年代，张量函数多项式表示理论得到了广泛发展[20-22]。20 世纪 70 年代初，该理论已较完整地建立起来。其丰富的结果参见 Spencer[23-32]的著述。该理论所对应的假设是，本构关系中的张量函数为多项式形式，或者是任意所需精度近似的多项式[33-35]。20 世纪 80 年代—90 年代，郭仲衡[79-81]、郑泉水[36-42]的研究丰富了该理论的成果，并概括了该理论的发展状况。特别是郑泉水建立了与 Hilbert 定理相似的关于一般张量函数有限表示的存在性定理[38]：对于任意有限数目的张量自变量和任意紧点群，存在一个由有限数目不变量构成的函数基，并且关于任意类型的张量值函数存在一个由有限数目形式不变量构成的完备表示。

上述存在性定理为寻求张量函数完备和不可约表示提供了有力保证，它是现代张量函数表示理论的主要成果之一。

本构方程作多项式假设，数学上处理大为方便，但是当本构方程不具备解析性时有严重缺陷，Wineman 和 Pipkin[43,44]的重要成果部分地消除了这一缺陷，他们证明了张量多项式的完备表示均可以看作是一般张量函数的完备表示。然而，为了得到简要准确的非线性本构方程，应采用可从实验观测到的最小数目的变量，强调了张量函数的表示不但

是完备的，还应该是不可约的。对于张量函数完备性和不可约性，许多学者做了有益的工作[45-56]。但遗憾的是，一个按 Wineman-Pipkin 定理作为一般张量函数完备表示张量多项式的完备表示，在绝大多数情况都远不是不可约的。用不变量表示的完备的不可约的非线性材料统一本构方程是力学、材料学亟待突破的前沿课题。

本构关系的实用性研究大多数采用唯象理论，对于超弹性材料常常采用先假设应变能函数，根据微分关系导出本构方程。

1．对于各向同性不可压材料

Rivlin[57,58]于 1948 年研究了应变能函数最一般的形式。他导出各向同性不可压材料的应变能函数为下列各项的和，即

$$W=\sum_{m=0,n=0}^{\infty} C_{mn}(I_1-3)^m(I_2-3)^n \tag{1.2}$$

式中：C_{mn} 为常数，且满足 $C_{00}=0$。

如果取 $C_{10}=C_1, C_{mn}=0$（当 $m\neq 1, n\neq 0$），则有

$$W=C_1(I_1-3) \tag{1.3}$$

式（1.3）是由 Treloar[69]于 1943 年提出的，通常称为 neo-Hookean 材料。如果取 $C_{10}=\mathrm{C}_1$，$C_{01}=C_2$，而其他的 C_{mn} 为 0，则有

$$W=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3) \tag{1.4}$$

式（1.4）最早是由 Mooney[59]于 1940 年提出的，通常称为 Mooney-Rivlin 材料。以上两式在数学上虽然简单，但有时与实验不符。尤其在处理双轴拉伸和纯剪切问题时，效果非常差[60-62]。

Rivlin 和 Saunders[61]曾建议将 $W=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3)$ 式右端的第二项 $C_2(I_2-3)$ 改为以 (I_2-3) 为变元的函数 $f(I_2-3)$。他们通过对 3%硫化橡胶的双轴拉伸实验，发现 $\partial W/\partial I_2$ 近乎常数。当 I_2 较小时，$\dfrac{\partial \varphi}{\partial I_2}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}I_2}$ 的值约为 $\dfrac{1}{8}\dfrac{\partial \varphi}{\partial I_1}=\dfrac{1}{8}C_1$，并随 I_2 的增加而单调递减。式中 f 是一个随 I_2 增加，而斜率趋于零的函数，在确定许多高聚酯材料的弹性响应中，有广泛的应用[63,64]。

应变能函数式（1.2）还有各种其他的推广形式，例如，Biderman[77]针对橡胶弹性体，提出了四项展开式，即

$$W(I_1,I_2)=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{11}(I_1-3)(I_2-3) \tag{1.5}$$

式中：C_{10}、C_{01}和C_{11}为材料常数。

1951 年，Ishihara、Hashitsume 和 Tatibana[65]假设得出了“三项式”理论

$$W=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3)+C_3(I_1-3)^2 \tag{1.6}$$

Yeoh[66]提出了一种I_1的 3 次方函数

$$W=C_1(I_1-3)+C_2(I_1-3)^2+C_3(I_1-3)^3 \tag{1.7}$$

Hart-Smith[76]提出：取W作为一个I_1的函数和一个I_2的函数之和，即

$$W=W(I_1)+W(I_2) \tag{1.8}$$

如果以主长度比λ_1、λ_2和λ_3为变元，对于不可压材料$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$。Valanis 和 Landel[67]曾建议将$\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$取为分离形式，即

$$\rho_0\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=W(\lambda_1)+W(\lambda_2)+W(\lambda_3) \tag{1.9}$$

Ogden[68]将式（1.9）中的$W(\lambda)$更具体地表示为

$$W(\lambda)=\sum_1^{\infty}\frac{\mu_n}{\alpha_n}(\lambda^{\alpha n}-1) \tag{1.10}$$

式中：α_n和μ_n为材料常数，其中α_n不限于整数，而且它可能取正值，也可能取负值。

为了与经典弹性理论相一致，以上的材料常数还要求满足$\sum_n\alpha_n\mu_n=2\mu^0$，其中的$\mu^0$为初始剪切模量。显然，如果只取 $n=1$，$\alpha_1=2$；或者只取$n=1$和 2，$\alpha_1=2$，$\alpha_2=-2$；式（1.10）便分别退化为 neo-Hookean 材料或者 Mooney-Rivlin 材料的应变能函数。Ogden 取式中的三项进行实施近似。通过对 Treloar[69]实验数据的拟合，得

$$\begin{aligned}&\alpha_1=1.3\,, \quad \alpha_2=5.0\,, \quad \alpha_3=-2.0\\&\mu_1=1.491\mu^0\,, \mu_2=0.003\mu^0\,, \quad \mu_3=-0.0237\mu^0\end{aligned} \tag{1.11}$$

王寿梅[70]将应变能函数写为

$$\begin{aligned}W=&C_{10}(J_1-3)+C_{01}(J_2-3)+C_{20}(J_1-3)^2+C_{11}(J_1-3)(J_2-3)+\\&C_{02}(J_2-3)^2+C_{30}(J_1-3)^3+C_{21}(J_1-3)^2(J_2-3)+C_{40}(J_1-3)^4\end{aligned} \tag{1.12}$$

文献还建议过其他一些关于超弹性势的表达式，可以在 Treloar[60,71]和 Ogden[72]的综述中以及 Ellen[73]、James[74]文献找到，不再一一列出。

2．对于各向同性可压缩材料

右 Cauchy-Green 应变张量 $\boldsymbol{C}$，左 Cauchy-Green 应变张量 $\boldsymbol{B}$ 的第三主不变量 $I_3=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$ 可以不等于 1。因此本构方程及应变能函数不仅与 I_1、I_2，有关，而且还与 I_3 有关。过去文献中其相应的超弹性体应变能函数通常在不可压缩材料超弹性应变能函数的基础上加以修正。例如，在不可压缩超弹性势的表达式中乘以与 I_3 有关的因子（当 $I_3=1$ 时，该因子取值为 1），并叠加上另一个依赖于 I_3 的函数。

Treloar[75]等曾建议将超弹性应变能函数的表达式取为

$$W=C_1(I_1-3)+f(I_3) \tag{1.13}$$

Blatz 和 Ko[78]曾将泡沫橡胶的超弹性势写为

$$\begin{aligned}W=&C_1\left[(I_1-3)+\frac{1-2\nu}{\nu}\left(I_3^{-\nu/(1-2\nu)}-1\right)\right]+\\&C_2\left[\left(\frac{I_2}{I_3}-3\right)+\frac{1-2\nu}{\nu}\left(I_3^{\nu/(1-2\nu)}-1\right)\right]\end{aligned} \tag{1.14}$$

对于 47%的泡沫聚氨酯橡胶，式（1.14）中的常数可以近似取为 $C_1=0$，$C_2=\dfrac{1}{2\rho_0}\mu^0,\nu=\dfrac{1}{4}$，这时式（1.14）便可简化为

$$W=\frac{1}{2\rho_0}\mu^0\left[\frac{I_2}{I_3}+2\sqrt{I_3}-5\right] \tag{1.15}$$

Simo 和 Pister[95]曾利用小变形线形弹性本构关系中的 Lame 系数 λ^0 和 μ^0 来表示超弹性应变能函数 W。如果 W 仅仅是 I_1 和 $\sqrt{I_3}$ 的函数则 W 的形式可取为

$$W=\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{1}{2}\mu^0(I_1-3)+\lambda^0U(\sqrt{I_3})-\mu^0\ln\sqrt{I_3}\right] \tag{1.16}$$

高玉臣[84]曾建议将 φ 取为

$$\varphi=C_1\left(\frac{I_1^3}{I_3}\right)^n+C_2(I_3-1)^{2m}I_3^{-l} \tag{1.17}$$

式中：C_1、C_2、n 和 l 为正的材料参数；m 为正整数。

后来，高玉臣[82]又提出了一个更为简单的超弹性势表达式为

$$\varphi = C_1\left[I_1^n + \left(\frac{I_2}{I_3}\right)^n\right] \tag{1.18}$$

式中：只有两个材料参数 C_1 和 n。有关以上两式的进一步讨论可参见文献[83-94]。

类似于不可压缩超弹性体的情形，超弹性势的变元也可以取为主长度比 λ_1、λ_2 和 λ_3，或采用修正的主长度比表达。Ogden[68]曾建议将 $\rho_0 W(I_1, I_2, I_3) = \rho_0 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 的形式取为

$$\rho_0 W(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) = \sum W(\lambda_i) + g(\psi) \tag{1.19}$$

其中

$$W(\lambda) = \sum_1^{\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n}(\lambda^{\alpha n} - 1) \tag{1.20}$$

式中：α_n、μ_n 为材料常数。

函数 $g(\psi)$ 的形式可以类似于式 $W = C_1(I_1 - 3) + f(I_3)$ 中的 $f(I_3)$ 来加以构造。

有的文献建议将可压缩材料的超弹性势取为广义 Varga 材料的应变能函数形式，其具体表达式为

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = C_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) + C_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 - 3) + g(\psi) \tag{1.21}$$

在初始状态下，式（1.21）中的 $g(\psi)$ 应满足条件：$g(1)=0$，$g'(1) = -(C_1 + 2C_2)$，其中的撇号表示对变元的微商。

Ogden[107]曾建议过几种类型的应变能函数形式，它们实际都是如下表达式的特殊形式：

$$\rho_0 W = \rho_0 W_* + \sum_{n=1}^{N} \chi_n(\hat{\lambda}_1,\ \hat{\lambda}_2,\ \hat{\lambda}_3) h_n(\psi) + g(\psi) \tag{1.22}$$

有关式（1.22）的进一步讨论可参见文献[83]。

综上所述，可以看出应变能函数的种类很多，但目前文献的研究方法都是先假设应变能函数 $W(J_1, J_2, J_3)$ 再由 $\boldsymbol{K} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}$ 求本构方程，由于不精确地知道 W 具体的非线性函数形式，假设的函数与实验结果有一定的误差。另外，很重要的一点是通过以上途径获得的应变能函

数系数是否独立没有证明。这会在很大程度上影响弹性系数（通过实验拟合获得）在应用于具体问题时的有效性。

1.2　本书的主要假设

（1）自变量是单变量，且是对称的仿射量。

（2）函数值是对称的仿射量。

（3）本书研究对象是简单物质，即本构关系仅依赖于变形梯度历史。

（4）不考虑初应力，即取参考构型为自然状态。

（5）本书主要研究 Green 弹性体，假设应力所做的功全部储存于依赖变形梯度的应变能中。本书也涉及 Cauchy 弹性体。无论 Green 还是 Cauchy 弹性体，应力张量可以视为变形梯度张量的单值函数。

Cauchy 弹性体：在等温过程中，如果 Cauchy 应力 $\boldsymbol{K}$ 仅仅是当前时刻变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的函数，而与当前时刻以前的变形梯度历史无关，则通常称这样的物体为弹性体或 Cauchy 弹性体。

Green 弹性体又称为超弹性体，在等温过程中，Green 弹性体的热力学状态仅依赖于应变 $\boldsymbol{E}$，这时，应力张量 $\boldsymbol{K}$ 存在如下关系：

$$\boldsymbol{K}:\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\rho_0\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{1.23}$$

即 Helmholtz 自由能 W 可以作为应变能函数，使得

$$\boldsymbol{K}=\rho_0\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\boldsymbol{E}} \tag{1.24}$$

1.3　本书的主要工作

作为本书的基础，首先对张量理论作了必要的介绍。本书的核心内容是：从张量函数出发，全面系统地研究了单变量 Green 弹性体非线性本构方程和应变能函数。

（1）研究了正交各向异性、横观各向同性和各向同性材料本构关