高等数学

（同济六版）

全程指导

（上册）

東北大學出版社
Northeastern University Press

高等数学全程指导

（上册）

主　编　王　庆　邵珠艳

副主编　付连魁　隋大海

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学全程指导．上册／王庆，邵珠艳主编．— 沈阳：东北大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-5517-0200-3

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①王…　②邵…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 196445 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
http：//www. neupress. com
印 刷 者：沈阳市池陆广告印刷有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：140mm×203mm
印　　张：14. 25
字　　数：482 千字
出版时间：2012 年 8 月第 1 版
印刷时间：2012 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：刘宗玉　孟　颖　　责任校对：王延霞
封面设计：刘江旸　　责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-0200-3　　定价：26.00 元

前　　言

同济大学主编的第六版《高等数学》是目前国内公认最好的“高等数学”教材之一，并广泛使用于国内各高校. 为了帮助广大学生学好同济六版《高等数学》，我们编写出这套《高等数学全程指导》. 对于刚刚走入大学校门的新生来说，对大学自主学习的学习方式不太适应，加之高等数学概念的抽象和运算的繁杂，往往使他们感到力不从心. 编写本书的目的恰恰在于让学生熟悉教材，尽快完成学习方法和思维方式的转变，对“高等数学”的学习进行全程指导，力求取得“用时少，成绩高”之效果.

本书以同济六版《高等数学》为蓝本，章节安排与其完全一致，可同步使用. 每章均包括三部分内容，即

1. **主要内容**　包括主要定义、主要结论和结论补充三项，结论补充给出了作者由多年教学经验总结出的行之有效的计算公式.

2. **典型例题**　将所涉及的内容，尤其是重点内容进行系统归类，然后，通过相当数量的例题演示向学生介绍解题方法和运算技巧.

3. **习题全解**　对教材中的全部习题给出详细解答，有些题还给出多种解法，意在学生遇

有疑难之时助一臂之力，起到课下辅导的作用.

本书还配备了10套期末测试模拟试题，上学期5套，下学期5套，供学生期末考试前复习、演练使用.

本书为上册，适用于使用同济六版《高等数学（上册）》的理工科院校的本科生，对其他“高等数学”学习者也有一定的参考价值.

参加本书编写的还有姜雪、刘智、鲁春香、王学理. 由于作者水平所限，加之时间仓促，书中难免会有疏漏和缺憾，若能得到读者的批评与同人的指教，那正是我们所热切渴望的.

作　者

2012年3月

目　录

第一章　函数与极限 …………………………………………………… 1

一、主要内容 …………………………………………………… 1

二、典型例题 …………………………………………………… 5

三、习题全解…………………………………………………… 19

习题 1-1　映射与函数 ………………………………………… 19

习题 1-2　数列的极限 ………………………………………… 28

习题 1-3　函数的极限 ………………………………………… 30

习题 1-4　无穷小与无穷大 …………………………………… 35

习题 1-5　极限运算法则 ……………………………………… 39

习题 1-6　极限存在准则　两个重要极限 …………………… 42

习题 1-7　无穷小的比较 ……………………………………… 46

习题 1-8　函数的连续性与间断点 …………………………… 48

习题 1-9　连续函数的运算与初等函数的连续性 …………… 52

习题 1-10　闭区间上连续函数的性质………………………… 56

总习题一　函数与极限………………………………………… 57

第二章　导数与微分 …………………………………………………… 65

一、主要内容…………………………………………………… 65

二、典型例题…………………………………………………… 67

三、习题全解…………………………………………………… 77

习题 2-1　导数概念 …………………………………………… 77

习题 2-2　函数的求导法则 …………………………………… 83

习题 2-3　高阶导数 …………………………………………… 92

习题 2-4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率

…………………………………………………………………… 97

习题 2-5　函数的微分 …… 104
总习题二　导数与微分 …… 111

第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 118

一、主要内容 …… 118
二、典型例题 …… 121
三、习题全解 …… 131
习题 3-1　微分中值定理 …… 131
习题 3-2　洛必达法则 …… 136
习题 3-3　泰勒公式 …… 140
习题 3-4　函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 144
习题 3-5　函数的极值与最大值、最小值 …… 155
习题 3-6　函数图形的描绘 …… 164
习题 3-7　曲　率 …… 168
习题 3-8　方程的近似解 …… 172
总习题三　微分中值定理与导数的应用 …… 174

第四章　不 定 积 分 …… 184

一、主要内容 …… 184
二、典型例题 …… 187
三、习题全解 …… 198
习题 4-1　不定积分的概念与性质 …… 198
习题 4-2　换元积分法 …… 204
习题 4-3　分部积分法 …… 212
习题 4-4　有理函数的积分 …… 217
习题 4-5　积分表的使用 …… 223
总习题四　不定积分 …… 230

第五章　定　积　分 …… 242

一、主要内容 …… 242
二、典型例题 …… 246

三、习题全解 …… 257
习题5-1　定积分的概念与性质 …… 257
习题5-2　微积分的基本公式 …… 265
习题5-3　定积分的换元法和分部积分法 …… 271
习题5-4　反常积分 …… 280
*习题5-5　反常积分审敛法　Γ函数 …… 283
总习题五　定积分 …… 286

第六章　定积分的应用 …… 299

一、主要内容 …… 299
二、典型例题 …… 301
三、习题全解 …… 311
习题6-2　定积分在几何学上的应用 …… 311
习题6-3　定积分在物理学上的应用 …… 324
总习题六　定积分的应用 …… 330

第七章　微分方程 …… 334

一、主要内容 …… 334
二、典型例题 …… 338
三、习题全解 …… 352
习题7-1　微分方程的基本概念 …… 352
习题7-2　可分离变量的微分方程 …… 354
习题7-3　齐次方程 …… 359
习题7-4　一阶线性微分方程 …… 367
习题7-5　可降阶的高阶微分方程 …… 375
习题7-6　高阶线性微分方程 …… 381
习题7-7　常系数齐次线性方程 …… 387
习题7-8　常系数非齐次线性微分方程 …… 392
*习题7-9　欧拉方程 …… 399
*习题7-10　常系数线性微分方程组解法举例 …… 404
总习题七　微分方程 …… 413

上学期期末测试模拟试题 …………………………………… 426
第一套 …………………………………………………… 426
第二套 …………………………………………………… 429
第三套 …………………………………………………… 432
第四套 …………………………………………………… 435
第五套 …………………………………………………… 438
上学期期末测试模拟试题参考答案 ………………………… 441

第一章　函数与极限

一、主要内容

（一）主要定义

1. 具有某种特定性质的事物的总体称为集合（简称集），组成这个集合的事物称为该集合的元素（简称元）.

2. 设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像.

3. 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y = f(x)$，$x \in D$.

4. 如果存在 $M > 0$，使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对一切 $x \in D$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 D 上无界.

5. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限（也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a），记作 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

极限不存在时，则称 $\{x_n\}$ 发散.

6. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_n| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

注　在此定义中，$0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$，A 称为 $f(x)$ 当 $x \to x_0 - 0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,$$

或

$$f(x_0 - 0) = A,$$

类似地可以定义右极限 $f(x_0 + 0)$.

7. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

8. $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$. 无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 等的定义.

注 当 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 结论都成立时，以后简记作"lim". 以 0 为极限的量称为无穷小量. 无穷小量简称为无穷小.

9. 若 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$，且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小；若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小，记作 $\alpha(x)=O(\beta(x))$，当 $c=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

10. 函数最简单性态

(1) $f(x)=f(-x)$，$x\in(-l,l)$，称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(x)=-f(-x)$，$x\in(-l,l)$，称 $f(x)$ 为奇函数；

(3) $f(x+T)=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，称 $f(x)$ 为周期函数，使等式成立之最小的正 T 值称为周期；

(4) $\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1>x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的单调增加函数. 类似地可以定义单调减少函数.

11. 若 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且有 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，此处 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

若记 $\Delta x=x-x_0$，则连续定义可以写成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 不连续时称为间断.

12. 若 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内有定义（x_0 可以除外），则具有下列条件之一者即为间断：

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

x_0 称为间断点，具有左、右极限的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点，极限存在的间断点称为可去间断点.

13. 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

14. 邻域 $U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta,\ \delta>0\}$，

去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta,\ \delta>0\}$.

15. 基本初等函数与初等函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数称为基本初等函数；由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及复合而得到的，且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

16. 取整函数　设x为任一实数，不超过x的最大整数称为x的取整函数，记为$[x]$.

17. 双曲函数　双曲正弦函数为　$\operatorname{sh}x=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$，双曲余弦函数为 $\operatorname{ch}x=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$，双曲正切函数为　$\operatorname{th}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

(二) 主要结论

1. 若$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)+g(x)]=A+B,\ \lim[f(x)g(x)]=AB,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

2. 极限存在准则

Ⅰ 单调有界数列必有极限.

Ⅱ 若$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

注　准则Ⅱ亦称夹逼准则，对于函数也成立.

3. 在同一过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

注　(1) 等价无穷小具有传递性：设α,β,γ为同一过程的无穷小，若$\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$；

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换：在同一极限过程中，若$\alpha\sim\tilde{\alpha}$, $\beta\sim\tilde{\beta}$，且$\lim\dfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$.

4. $\lim f(x)=A$的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$，此处$\lim\alpha(x)=0$.

5. 两个重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

6. 若在$\mathring{U}(x,\delta)$内$f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么$A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

7. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0(A<0)$，则必有$U(\hat{x},\delta)$使在此邻域中$f(x)>0(f(x)<0)$.

注　若$A=f(x_0)$，则$f(x)$在x_0处连续，此时结论亦真.

8. 若极限存在，则其值必然唯一.

9. 基本初等函数在其定义域上是连续的. 初等函数在其定义区间上连续.

10. $f(x)$在 x_0 处可导，则$f(x)$在该点必连续，其逆不真.

11. 闭区间上连续函数必然有下列性质：

(1) 有最大值与最小值；

(2) 有界；

(3) 满足介值定理(任取介于最大值与最小值之间的数，必有与之相等的函数值)；

(4) 满足零点定理，若$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则必有$\xi\in(a, b)$，使$f(\xi)=0$.

(三) 结论补充

1. 若$\lim\varphi(x)=0$，则$\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

2. 若$\lim\varphi(x)=\infty$，则$\lim\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

3. 若$\lim\varphi(x)=0$，则$\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

注 以上三条中的 $\varphi(x)\neq0$.

4. $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

6. 当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，$a^x-1\sim x\ln a\quad(a>0, a\neq1)$.

7. 若

$$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=\lim A(x)=\lim B(x)=0.$$

且
$$\alpha(x)\sim A(x), \beta(x)\sim B(x),$$

则有
$$\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}}=\mathrm{e}^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}.$$

注 分母$\beta(x)$，$B(x)$不能取0.

8. 不为零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

9. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$.

11. 设$\lim g(x)=B\neq 0$，则有

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=B\lim f(x),$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{B}\lim f(x).$$

12. 海涅(Heine)定理 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 的充要条件是对任意数列$\{u_n\}$ $(u_n\neq a,\ n=1,2,\cdots)$，当$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(u_n)=b$.

13. 在同一极限过程中，若$f(x)=o(g(x))$，则$f(x)+g(x)\sim g(x)$.

14. 设$\lim f(x)=\lim f^*(x)=\lim g(x)=\lim g^*(x)=0$，$f(x)\sim f^*(x)$，$g(x)\sim g^*(x)$，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq -1$，$f(x)g(x)\neq 0$，则有

$$f(x)+g(x)\sim f^*(x)+g^*(x).$$

15. 设$y=f(x)$是连续函数，则$y=|f(x)|$也是连续函数.

16. 若$f(x)$与$g(x)$都是连续函数，则

$$\varphi(x)=\min\{f(x),\ g(x)\},\ \psi(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$$

也都是连续函数.

二、典型例题

(一) 函数简单性态

1. 函数的定义域

【例1-1】 求$f(x)=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$的定义域.

【解】 由

$$\begin{cases}2+x-x^2\geqslant 0,\\ \left|\lg\dfrac{x}{10}\right|\leqslant 1,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}(2-x)(1+x)\geqslant 0,\\ -1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1.\end{cases}$$

从$(2-x)(1+x)\geqslant 0$，得 $\qquad -1\leqslant x\leqslant 2$；

从$-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1$，得 $\qquad 1\leqslant x\leqslant 10^2=100$.

x的取值范围，即函数的定义域为$[1,\ 2]$.

【例 1-2】 设$f(x)$的定义域为$(0, 1)$，求$F(x)=f(x-a)+f(x+a)$的定义域($a>0$).

【解】 $f(x-a)$的定义域为$0<x-a<1$，即

$$a<x<1+a,$$

而$f(x+a)$的定义域为$0<x+a<1$，即

$$-a<x<1-a,$$

解不等式组 $$\begin{cases} a<x<1+a, \\ -a<x<1-a, \end{cases}$$

得$a<x<1-a$，此时应有$a<1-a$，即$a<\dfrac{1}{2}$.

综上可知，当$a<\dfrac{1}{2}$时，$F(x)$的定义域为$x\in(a, 1-a)$；而当$a\geqslant\dfrac{1}{2}$时，对任何x，$F(x)$无意义.

2. 函数的求法

【例 1-3】 已知$f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求$f[f(x)]$.

【解】 $f[f(x)]=\begin{cases} 1+f(x), & f(x)<0; \\ 1, & f(x)\geqslant 0. \end{cases}$

先求$f(x)\geqslant 0$及$f(x)<0$的区域. 由$f(x)\geqslant 0$，得$1+x\geqslant 0$，于是$x\geqslant -1$；由$f(x)<0$，得$1+x<0$，于是$x<-1$. 所以

$$f[f(x)]=\begin{cases} 1+f(x), & x<-1, \\ 1, & x\geqslant -1. \end{cases}$$

又当$x<-1$时，$f(x)=1+x$，故

$$f[f(x)]=\begin{cases} 2+x, & x<-1, \\ 1, & x\geqslant -1. \end{cases}$$

【例 1-4】 欲做一容积为$300\mathrm{m}^3$的无盖金属圆柱筒，筒底单位造价是筒壁单位造价的2倍，给出筒的总造价与半径的函数关系.

【解】 设周围单位造价为a，则底面单位造价为$2a$，设底面半径为r，高为h，则由已知条件有$\pi r^2h=300$. 设总造价为y，则

$$y=2a\pi r^2+a\cdot 2\pi rh=2a\pi r^2+2a\pi r\cdot\frac{300}{\pi r^2}$$

$$=2a\pi r^2+\frac{600a}{r} \quad r\in(0, +\infty).$$

【例 1-5】 设$f(x)=ax^2+bx+2$，且$f(x+1)-f(x)=2x-1$，求$f(x)$.

【解】 由$f(x+1)-f(x)=2x-1$，得

$$a[(x+1)^2-x^2]+b[(x+1)-x]+(2-2)=2x-1,$$

即
$$2ax+(a+b)=2x-1.$$
对比系数，得 $a=1$，$b=-2$，故
$$f(x)=x^2-2x+2.$$

3. 函数的最简单性态

【例 1-6】 证明 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

【证】 $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$
$$=\log_a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}},$$
化简后得 $\qquad f(-x)=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$
证毕.

【例 1-7】 求 $f(x)=[x]-x+3\left(\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]\right)$ 的周期.

【解】 记 $\varphi(x)=[x]-x$，则
$$\varphi(x+1)=[x+1]-(x+1)=1+[x]-x-1=[x]-x=\varphi(x),$$
$\varphi(x)$ 以 1 为周期；

记 $\psi(x)=\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]$，则
$$\psi(x+3)=\frac{x+3}{3}-\left[\frac{x+3}{3}\right]=\left(\frac{x}{3}+1\right)-\left[\frac{x}{3}+1\right]$$
$$=\frac{x}{3}+1-\left[\frac{x}{3}\right]-1=\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]=\psi(x),$$
$\psi(x)$ 以 3 为周期.

则 $f(x)=[x]-x+3\left(\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]\right)$ 必以 3 为周期.

（二）函数的连续性

1. 函数间断点的判定

【例 1-8】 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点类型.

【解】 当 $x=1$ 时，函数无定义，当 $x=0$ 时，函数也无定义，而函数在 $x=0$，$x=1$ 附近有定义. 故 $x=0$，$x=1$ 是函数的间断点. 有
$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=+\infty,$$
则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属于第二类间断点；

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = 1,$$

则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点.

【例 1-9】 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的间断点类型.

【解】 $f(x)=\exp\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\cdot\frac{x}{\sin t-\sin x}$

$$=\exp\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin t-\sin x}=e^{\frac{x}{\sin x}},$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{\sin x}}=e.$$

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属于第一类间断点.

2. 利用连续性确定常数

【例 1-10】 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ a, & x\geq 1,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}b, & x<0,\\ x+2, & x\geq 0.\end{cases}$$

若使 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a，b 的值.

【解】 令 $F(x)=f(x)+g(x)$，则

$$F(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}x+b, & x<0,\\ 2x+2, & 0\leq x<1,\\ x+2+a, & x\geq 1.\end{cases}$$

从而有

$$\lim_{x\to -0}F(x)=\lim_{x\to -0}(x+b)=b,\ \lim_{x\to +0}F(x)=\lim_{x\to +0}(2x+2)=2;$$

$$\lim_{x\to 1-0}F(x)=\lim_{x\to 1-0}(2x+2)=4,\ \lim_{x\to 1+0}F(x)=\lim_{x\to 1+0}(x+2+a)=3+a.$$

若使 $F(x)$ 连续，必有 $a=1$，$b=2$.

【例 1-11】 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\neq 1,\ x\neq -2,\\ 2, & x=1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处连续，试求 a，b 的值.

【解】 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，必有 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+ax+b}{x^2-x-2}=2,$$