概率论与数理统计

河南理工大学概率论与数理统计教研组　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

河南理工大学概率论与数理统计教研组　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书由概率论与数理统计两部分组成，前五章为概率论部分，主要叙述各种概率分布及其性质，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理；后四章为数理统计部分，主要叙述各种参数估计和假设检验，包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析。各章配有习题，其中收录了近年来全国硕士研究生入学统一考试的部分试题及部分综合性习题，书后配有参考答案。

全书内容简明扼要，叙述通俗易懂，着力加强学生对概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本运算的掌握，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。

本书可作为高等学校理工类（非数学类专业）、经济管理类各专业的本科生的概率论与数理统计教材，也可供广大教师和相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/河南理工大学概率论与数理统计教研组编. —北京:高等教育出版社,2013.4

ISBN 978-7-04-036792-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①河… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 019968 号

策划编辑 李晓鹏　　责任编辑 李晓鹏　　封面设计 于文燕　　版式设计 范晓红
插图绘制 于　博　　责任校对 刘　莉　　责任印制 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18.5	版　　次	2013 年 4 月第 1 版
字　　数	330 千字	印　　次	2013 年 4 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	27.20 元

物 料 号　36792-00

前　言

"概率论与数理统计"是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科,是高等学校本科各专业的一门重要的基础理论课。它在自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产等领域中得到了越来越广泛的应用。作为一门应用数学学科,"概率论与数理统计"不仅具有数学所共有的特点:高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性,而且具有更独特的思维方法。概率论是对随机现象统计规律的演绎的研究,而数理统计是对随机现象统计规律的归纳的研究,它们互相渗透,互相联系。

本书由概率论和数理统计两部分组成。概率论部分(第一—五章)侧重于理论探讨,介绍概率论的基本概念,建立一系列定理和公式,其中包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理等内容;数理统计部分(第六—九章)则是以概率论为理论基础,研究如何对试验结果进行统计推断,包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析等内容。

为使初学者尽快熟悉这种独特的思维方法,更好地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论、基本运算以及处理随机数据的基本思想和方法,培养学生运用概率统计方法分析解决实际问题的能力和创造性思维能力,编者根据多年的教学心得编写此书,对"概率论与数理统计"中的某些重点和难点作了必要的阐述,精选了部分典型例题,并作了较详细的分析、解答。各章分别配有习题(书后有部分习题的提示与答案),其中收录了近几年来全国硕士研究生入学统一考试的部分试题及部分综合性习题,以供学生检查学习效果之用。学习和使用本书需要读者具备"高等数学"与"线性代数"的知识。

本书由成军祥任主编,任燕、李文玲任副主编。第一章由李明、刘新乐编写,第二章由马学思编写,第三章由任燕编写,第四章由李艳方编写,第五、六章由杨圣举、成军祥编写,第七章由李文玲编写,第八章由王照良编写,第九章由刘中强、李文玲编写。全书由成军祥统稿。

本书编写过程中,得到了河南理工大学概率论与数理统计教研组所有教师的支持和帮助,编者谨致谢意。

限于编者的水平,书中难免存在不足之处,欢迎读者批评指正。

编　者

2012 年 9 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

在自然界和人类社会中，我们会观察到各种各样的现象，这些现象大致可以分为两类：确定现象和随机现象. 一类是在一定条件下必然发生的现象，称为**确定现象**. 例如，边长为 2 cm 时，正方形的面积一定等于 4 cm^2；在 1 个标准大气压(0.101 MPa)下，水加热到 100 ℃ 必然会沸腾；同性电荷必定互相排斥. 确定现象的特征是条件给定时，事前可准确预言其结果. 另一类是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象，称为**随机现象**. 例如，投掷一枚硬币，结果可能是出现正面也可能是出现反面；购买一张彩票，可能中奖也可能不中奖；一个新生婴儿可能是男孩也可能是女孩. 随机现象的特征是条件给定时，事前不能准确预言其结果. 但是，大量随机现象还有另外一个特征：在相同条件下进行大量重复观察中呈现出固有的规律性，称为统计规律性. 例如，在记录大量新生婴儿性别后发现，男女比例几乎为 1∶1.

随机现象在客观世界中是普遍存在的，概率论与数理统计是研究随机现象并揭示其统计规律的数学学科. 概率论与数理统计在现实生活中有极其广泛的应用，几乎遍及所有的科学领域.

§1　随机试验和样本空间

一、随机试验

为了找到随机现象内部固有的规律性，我们需要多次重复试验或观察来研究随机现象. 概率论中把满足以下特点的试验称为**随机试验**：

(1) 可以在相同条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能明确哪一个结果出现.

随机试验也简称为**试验**，用大写字母 E 表示. 试验是一个广泛的术语，既包括各种科学实验，也包括对客观事物进行的“调查”、“测量”等.

下面给出试验的几个例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数.

E_3:记录一个超市一天内到达的顾客数.

E_4:记录某地区一年内的降雨量.

E_5:在一批电视机中任意取一台,测试它的寿命.

E_6:抛一枚硬币两次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_7:抛一枚硬币两次,观察出现正面的次数.

二、样本空间

定义 1.1 随机试验 E 的一切可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 Ω. 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**,记为 ω.

例 1.1 请写出上述试验 $E_i(i=1,2,\cdots,7)$ 的样本空间 Ω_i.

解 $\Omega_1=\{H,T\}$.

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\Omega_4=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant x_0\}$,$x$ 表示该地区年降水量,x_0 表示该地区最大年降水量.

$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$,$t$ 为电视机寿命.

$\Omega_6=\{HH,HT,TH,TT\}$.

$\Omega_7=\{0,1,2\}$.

从以上例子可以发现,样本空间中的样本点个数可以是有限多个,也可以是无限多个.

§2 随机事件

在研究随机试验时,不仅关心由单个样本点所表示的结果是否会发生,也常关心由满足某种条件的那些样本点组成的集合所表示的结果是否会发生.

一、随机事件

定义 1.2 称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**,简称为**事件**. 由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.

习惯上用大写字母 A,B,C 等来表示事件. 在每次试验中,我们称某个随机事件 A 发生,当且仅当该事件所包含的某个样本点出现. 样本空间 Ω 包含所有的样本点,在任何一次试验中总有 Ω 中的某一样本点出现,也就是说 Ω 总发生,Ω 称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它在每次试验中都不发生,$\varnothing$ 称为**不可能事件**.

例 1.2 掷一颗骰子观察出现的点数,其样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

记 $A=\{3\}$,事件 A 表示“出现 3 点”,它是一个基本事件.

记 $B=\{2,4,6\}$,事件 B 表示“出现偶数点”.

事件 C 表示“出现的点数不大于 6”,是必然事件,可记为 $C=\Omega$.

事件 D 表示“出现的点数大于 6”,是不可能事件,可记为 $D=\varnothing$.

例 1.3 将一枚硬币抛三次,观察出现正面 H、反面 T 的情况,样本空间为 $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THT,THH,TTH,TTT\}$.

事件 A 表示“第一次出现的是 H”,可记为 $A=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$.

事件 B 表示“三次出现同一面”,可记为 $B=\{HHH,TTT\}$.

二、事件间的关系与运算

给定一个样本空间,可定义事件的个数不止一个,分析这些事件之间的关系是必要的. 另外,事件间的运算可以使我们通过对简单事件的了解去掌握较复杂的事件.

由于事件是一个集合,因此,事件间的关系与运算可按照集合论中集合之间的关系和运算来处理.

设试验 E 的样本空间为 Ω,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 包含关系

如果 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,则称事件 B 包含事件 A. 它的含义是事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 图 1.1 给出了包含关系的几何表示.

(2) 相等关系

若 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 是**等价的**或**相等的**,记为 $A=B$.

(3) 和事件

事件 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**或**并事件**. 它的概率含义是事件 A 与事件 B 至少有一个发生. 图 1.2 给出了这种运算的几何表示.

例如,事件 A 表示“明天下雨”,事件 B 表示“明天晴天”,和事件 $A\cup B$ 表示“明天下雨或晴天”.

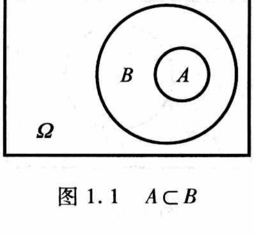

图 1.1 $A\subset B$

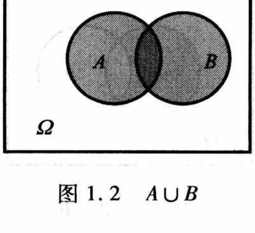

图 1.2 $A\cup B$

类似地,称$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$为n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件,称$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的和事件.

(4) 积事件

事件$A\cap B=\{\omega \mid \omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$称为事件A与事件B的**积事件**或**交事件**.它的概率含义是事件A与事件B同时发生.$A\cap B$也可以记作AB.图1.3给出了这种关系的几何表示.

一般地,称$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$为n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件,称$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件.

(5) 互不相容事件

若$A\cap B=\varnothing$,则称事件A与事件B是**互不相容的**或**互斥的**.它的含义是事件A与事件B不能同时发生.图1.4给出了这种关系的几何表示.

如果一组事件(可以是有限或可列个事件组成)中任意两个事件都互不相容,则称这组事件两两互不相容.

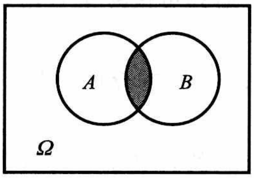

图1.3　$A\cap B$

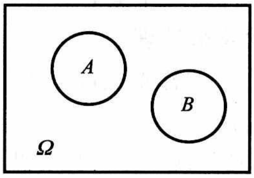

图1.4　$A\cap B=\varnothing$

(6) 差事件

事件$A-B=\{\omega \mid \omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$称为事件A与B的**差事件**.它的含义是事件A发生,但事件B不发生.图1.5给出了这种运算的几何表示.

(7) 对立事件

若$A\cap B=\varnothing$且$A\cup B=\Omega$,则称事件A与事件B**互为对立事件**或**互为逆事件**.这表示事件A与事件B在一次试验中必有一个发生,且仅有一个发生.A的对立事件记为$\overline{A}$.$\overline{A}=\Omega-A$.图1.6给出了这种关系的几何表示.

显然$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

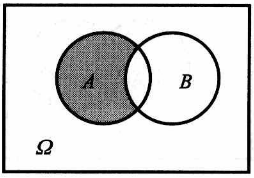

图1.5　$A-B$

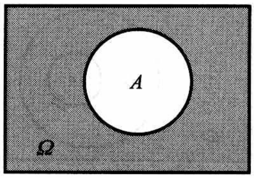

图1.6　$\overline{A}$

设 A,B,C 为事件，与集合论中集合的运算一样，事件之间的运算满足以下定律：

交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些定律都可以推广到任意多个事件的情况. 例如，对于德摩根律，有

$$\overline{\bigcup_{k\in I}A_k}=\bigcap_{k\in I}\overline{A}_k,\ \overline{\bigcap_{k\in I}A_k}=\bigcup_{k\in I}\overline{A}_k,$$

其中 I 是有限指标集或可列指标集.

例 1.4 对同一目标连续射击三次，以 A_i 表示事件“第 i 次击中目标”，$i=1,2,3$. 以 B_j 表示事件“恰好有 j 次击中目标”，$j=0,1,2,3$. 以 C_k 表示“至少有 k 次击中目标”，$k=0,1,2,3$. 则有

$B_0=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3=\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3$,

$B_1=A_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\ \overline{A}_3\cup\overline{A}_1\ \overline{A}_2A_3$,

$B_2=A_1A_2\ \overline{A}_3\cup A_1\ \overline{A}_2\ A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$,

$B_3=A_1A_2A_3$,

$C_0=B_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega$,

$C_1=B_1\cup B_2\cup B_3=A_1\cup A_2\cup A_3$,

$C_2=B_2\cup B_3=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$,

$C_3=B_3=A_1A_2A_3$.

例 1.5 某城市的供电系统由甲、乙两个供电源和三条线路 1,2,3 组成（图 1.7）. 每个供电源都足以供应城市的用电. 设事件 A_i 表示“第 i 条线路正常工作”，$i=1,2,3$，以事件 B 表示“城市能正常供电”，则

$$B=(A_1\cup A_2)\cap A_3.$$

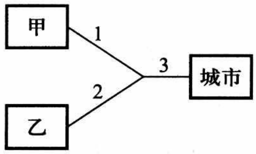

图 1.7

由德摩根律知 $\overline{B}=$“城市断电”可表示为

$$\overline{B}=\overline{(A_1\cup A_2)\cap A_3}=\overline{(A_1\cup A_2)}\cup\overline{A}_3=(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)\cup\overline{A}_3.$$

§3 概率的定义及其性质

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，呈现出随机性. 人们在大量重复试验中发现，随机事件的发生是有规律的，随机事件发生的可能性大小是能够度量的. 对于一个事件 A，我们希望找到一个合适的数来刻画事件 A 在一次试

验中发生的可能性大小,这个数就称为事件的**概率**.因此,概率是事件发生可能性大小的度量.本节先给出表征事件发生频繁程度的量——频率,然后在频率的启发下,引入概率的公理化定义.

一、事件的频率

定义 1.3 设在 n 次重复试验中事件 A 发生了 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 次,则称比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**,并记为 $f_n(A)$.

由频率的定义,不难证明频率具有下列性质:

(1) 非负性:$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性:$f_n(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k). \tag{1.1}$$

显然,频率 $f_n(A)$ 的大小表示了在 n 次试验中事件 A 发生的频繁程度.频率越大,意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大.反之亦然.那么,能否用频率来刻画事件 A 在一次试验中发生的可能性大小呢?

例 1.6 将一枚硬币抛掷 n 次,观察出现正面(事件 A)的次数.表 1.1 是历史上几位科学家试验结果的记录.

表 1.1 掷硬币试验

试验者	投掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 $f_n(A)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
德摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
卡尔·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
卡尔·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出 $f_n(A)$ 的值有一定的随机波动性,故直接用频率来作为事件发生可能性大小的度量是不合适的.但是随着 n 增大,频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性.$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动,而逐渐稳定于 0.5,所以用 0.5 来刻画一次试验中正面出现的可能性大小是合适的.

大量的试验证实,当重复试验的次数 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性,逐渐稳定于某个常数,这一规律称为**频率稳定性**.频率的稳定性在理论上已被证实,我们将在第五章作介绍.我们用频率的稳定值来刻画事件发生的可能性

大小是合适的.

但是,在现实生活中,我们不可能对某个事件做大量重复试验,从中得到频率的稳定值.特别是对具有破坏性的试验(如测试灯泡的使用寿命),从经济意义上考虑就不可能进行大量重复试验.为了理论研究上的需要,我们从频率的稳定性和频率的性质上得到启发,给出刻画事件发生可能性大小的概率的定义.

二、概率的公理化定义

定义 1.4 设 E 是随机试验,Ω 是其样本空间,对 E 的每一个事件 A,都赋予一个实数 $P(A)$,称为事件 A 的**概率**,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列三条公理:

公理 1 非负性:对于任何一个事件 A,$P(A)\geqslant 0$.

公理 2 规范性:对于必然事件 Ω,$P(\Omega)=1$.

公理 3 可列可加性:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为两两互不相容事件,则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n). \tag{1.2}$$

上述定义称为**概率的公理化定义**,由苏联数学家柯尔莫哥洛夫于 1933 年在综合前人的基础上提出来.

由概率的公理化定义可推导出概率的一些重要性质.

性质 1 不可能事件发生的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

证明 显然 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,且等号右端的可列个事件 $\varnothing,\varnothing,\varnothing,\cdots$ 是两两互不相容的,由概率的可列可加性(1.2)式得

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots.$$

由概率的非负性可得 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容事件,则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k). \tag{1.3}$$

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,即有 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$,则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

性质 3 设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则 $P(B)\geqslant P(A)$,且有

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.4}$$

证明 由 $A\subset B$ 知,$B=A\cup(B-A)$,且 $A(B-A)=\varnothing$,再由(1.3)式得

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

移项得 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

再由概率的非负性,知 $P(B-A)\geqslant 0$,所以

$$P(B) \geqslant P(A).$$

性质 4 对于任意两个事件 A,B,有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB). \tag{1.5}$$

证明 因 $A-B=A-AB$,且 $AB\subset A$,由性质 3 得

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB).$$

性质 5 对于任意事件 $A,P(A)\leqslant 1$.

证明 因为 $A\subset\Omega$,由性质 3 得 $P(A)\leqslant 1$.

性质 6 对于任意事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.6}$$

证明 因 $A\cup\overline{A}=\Omega$,且 $A\overline{A}=\varnothing$,由概率的规范性和(1.3)式得 $1=P(A)+P(\overline{A})$,即

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 7(加法公式) 对于任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.7}$$

证明 因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,且 $A(B-AB)=\varnothing$. 故由(1.3)式和(1.4)式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

(1.7)式可以推广到多个事件的情况. 例如,三个事件的加法公式为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC). \tag{1.8}$$

一般地,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以用归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.9}$$

例 1.7 甲、乙两人同时向目标各射击一次,设甲击中目标的概率为 0.85,乙击中目标的概率为 0.8, 两人都击中目标的概率为 0.68. 求目标被击中的概率.

解 以 A 表示事件“甲击中目标”,B 表示事件“乙击中目标”,C 表示事件“目标被击中”,则 $C=A\cup B$,所以

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.85+0.8-0.68=0.97.$$

例 1.8 设 $P(A)=0.7,P(B)=0.4,P(A\cup B)=0.8$,求 $P(\overline{A}\,\overline{B}),P(A\overline{B})$.

解 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$. 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,故

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.7+0.4-0.8=0.3,$$

又 $A\overline{B}=A-B=A-AB$,故

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.7-0.3=0.4.$$

§4　古典概型与几何概型

概率的公理化定义使概率有了严格的数学定义,但此定义没有告诉我们如何去计算一个随机事件的概率.本节我们介绍两种直接计算概率的模型:古典概型与几何概型.

一、古典概型

如果随机试验具有以下两个特点:

(1) 随机试验的样本空间 Ω 只有有限个样本点;

(2) 在一次试验中,每个样本点出现的可能性相同,

则称这种试验为**古典概型**.古典概型是概率论发展初期的主要研究对象,甚至到了现在,它在概率论中仍有一定的地位.一方面是因为它简单而且直观,对它的讨论有助于理解概率论中的许多基本概念;另一方面,许多实际问题都可以概括为这一模型.古典概型有着广泛的应用.

设试验 E 是古典概型,样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,则基本事件 $\{\omega_1\}$,$\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$ 两两互不相容,且 $\Omega=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\}$.由于 $P(\Omega)=1$ 及 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$,因此 $P(\omega_i)=\dfrac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$.

如果事件 A 包含 k 个样本点:$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\}$,其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 k 个不同的数,则有

$$P(A)=P(\omega_{i_1})+P(\omega_{i_2})+\cdots+P(\omega_{i_k})=\frac{k}{n},$$

即

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点个数}}{\Omega\text{ 包含的样本点总数}}=\frac{k}{n}.\tag{1.10}$$

(1.10)式就是古典概型中事件 A 发生的概率计算公式.

例 1.9　从 $0,1,\cdots,9$ 这 10 个数字中任取一个,求取到奇数的概率.

解　以 A 表示事件“取到奇数”.从 $0,1,\cdots,9$ 这 10 个数字中任取一数的所有可能结果作为样本空间,其包含的样本点个数 $n=10$,事件 A 包含的样本点个数 $k=5$,因此所求的概率为 $P(A)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

例 1.10　袋中有 a 个白球和 b 个黑球,从中任意地一个一个连续地摸出 $k+1$ 个球($k+1\leqslant a+b$),每次摸出球后不放回袋中,试求最后一次摸到白球的概率.

解　以 E 表示从 $a+b$ 个球中不放回地一个一个地任意摸出 $k+1$ 个球,Ω

含有 A_{a+b}^{k+1}个样本点. 这是一个古典概型问题.

以 A 表示事件"在摸出的 $k+1$ 球中,最后一个球是白球". 事件 A 可以用以下两步实现:第一步,从 a 个白球中任取一个排到最后一个位置上,有 A_a^1 种取法;第二步,从剩下的 $a+b-1$ 个球中任取 k 个排到前面 k 个位置上,有 A_{a+b-1}^k 种取法. 因此事件 A 包含的样本点个数为 $A_a^1A_{a+b-1}^k$,所以

$$P(A)=\frac{A_a^1A_{a+b-1}^k}{A_{a+b}^{k+1}}=\frac{a}{a+b}.$$

注 例 1.10 中所求的概率与 k 无关,即每一次摸到白球的概率是一样的,这是抽签问题模型,即抽签时各人机会均等,与抽签先后顺序无关. 例如,在购买彩票时,各人得奖的机会是一样的.

例 1.11 将 n 个球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中去,假设盒子的容量不限,试求:

(1) 某指定的 n 个盒子中各有一球的概率;

(2) 恰有 n 个盒子中各有一球的概率;

(3) 某指定的盒子中恰有 $k(k\leqslant n)$ 个球的概率.

解 以 E 表示将 n 个球随机地放入 N 个盒子中,易知这是古典概型问题. 样本空间 Ω 中含有样本点的个数为 $N\times N\times\cdots\times N=N^n$.

(1) 以 A 表示事件"某指定的 n 个盒子中各有一球",事件 A 中包含的样本点个数为 $n!$,所以$P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$.

(2) 以 B 表示事件"恰有 n 个盒子中各有一球",事件 B 中包含的样本点个数为$C_N^n n!$,所以 $P(B)=\dfrac{C_N^n n!}{N^n}$.

(3) 以 C 表示事件"某指定的盒子中恰有 k 个球",为了实现事件 C,我们可以先从 n 个球中选取 k 个球放入指定的盒子中,共有 C_n^k 种取法,然后将余下的 $n-k$个球任意放入其余的 $N-1$ 个盒子,共有$(N-1)^{n-k}$种放法,因此事件 C 中包含的样本点个数为 $C_n^k(N-1)^{n-k}$,所以 $P(C)=\dfrac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}$.

例 1.11 是古典概型中一个非常著名的问题,许多实际问题都可以归结为这一模型来处理. 例如,历史上有名的生日问题,要求 n 个人中没有两人生日相同的概率,也能归结为上述模型,则没有两人生日相同的概率为$P(A)=\dfrac{C_{365}^n n!}{365^n}$.

二、几何概型

在一些试验中,虽然每个样本点发生的可能性相同,但是样本空间中样本点

总数不能用一个有限数来描述. 例如,向区间$[0,1]$中随意投一个点,试问其落在子区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上的概率是多少?显见其落点的可能位置有无穷多个,即样本空间$\Omega=\{\omega\mid 0\leqslant\omega\leqslant 1\}$,且每个位置被落到的可能性相等. 由于$\Omega$中样本点总数是无穷多个,古典概型的计算公式就不适用,我们需要借助下面将要介绍的几何概型来解决问题.

如果试验具有如下特点:

(1) 随机试验的样本空间Ω为可度量的几何区域;

(2) Ω中任一区域出现的可能性大小与该区域的几何度量成正比,而与该区域的位置和形状无关,

则称此种试验为**几何概型**.

对于几何概型,若事件A是Ω中某一区域,且A可度量,则事件A的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}},\tag{1.11}$$

其中,如果Ω是一维、二维或三维的区域,则Ω的几何度量分别是长度、面积或体积.

(1.11)式称为几何概型概率的计算公式.

例 1.12 在区间$[0,a]\ (a>0)$上随意投一个点,试求其落在子区间$[c,c+l]\ (0\leqslant c<c+l\leqslant a)$上的概率.

解 此试验的样本空间$\Omega=[0,a]$,显然这是一个几何概型问题. Ω的几何度量为a,以A表示事件"这一点落在子区间$[c,c+l]$上",则A对应的区间为$[c,c+l]$,所以A的几何度量为l,于是$P(A)=\frac{l}{a}$.

例 1.13 甲乙两人相约在0到T时内在预定地点会面,并约定先到者应等候另一人$t\ (t\leqslant T)$时后方可离开,求两人能会面的概率. 假定他们在0到T时内的任一时刻到达预定地点是等可能的.

解 以x,y分别表示两人到达时间,则$0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T$,所以样本空间$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T\}$(图 1.8),显然,这是一个几何概型问题.

以A表示事件"两人能会面",则

$$A=\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant t\},$$

所以事件A的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}.$$

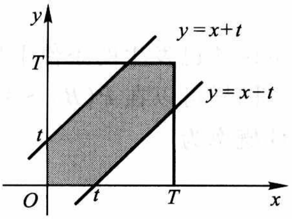

图 1.8

从上述例题可以看出,解决这类问题的要点是:首先将样本空间对应于某一具体区域,其次根