中级自学自然科学丛书

# 排列与组合

程光斗编著

江苏人民出版社

# 前　　言

“排列与組合”在許多計算問題上，我們常常用到它。为了使讀者易于掌握，本书将“排列与組合”的計算公式，結合实际应用的例題，作了浅显易懂的講述。书中并提出了一些习題，以便讀者不仅懂得这种算法，而且能熟練这种算法，这样，才能灵活地运用公式，解决許多实际計算問題。书后的习題解答，是供讀者参考的。希望讀者在做习題的时候，尽可能自行思考，求出答案，然后与书后的解答核对。

程光斗

# 目　　录

# §1. 什么叫做排列

我們常常遇到这样一些問題：用1，3，5这三个数字中的任何两个組成沒有相同数字的两位数，共可組成多少个不相等的两位数？用三面顏色不同的旗子中的任何两面并列在一起，共可組成多少种不同的信号？从甲、乙、丙三个人中选出一人当組长，一人当副組长，共有多少种不同的选法？这些問題虽然表面上涉及的事实不同，而实質上都是同一类型的問題，就是我們要研究的排列問題。

什么叫做排列呢？从一定數量的不相同的事物对象中选取若干个出来，依照某一种順序并列在一起，就叫做排列。在上面第一个例子中，我們是从3个数字中选取2个数字出来組成两位数，由于数字所在的數位不同，組成的两位数也就不同，因此，不仅象13，15，35等等是不同的排列，而且象13，31；15，51；35，53等等也是不同的排列。又如，在第三个例子中，象下面这样的选法中的任一种都是一种排列：

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 正組长： | 甲 | 乙 | 甲 | 丙 | 丙 | 乙 |
| 副組长： | 乙， | 甲； | 丙， | 甲； | 乙， | 丙。 |

在排列問題中，一定数量的事物对象叫做元素。按照以上所講，所謂不同的排列，或者是含有的元素不同，或者虽然含有的元素相同，但并列在一起的順序不同。只有含有的元素和并列在一起的順序都相同的，才算是相同的排列。

从 m 个不同元素里选取 n 个元素进行排列，所有不同的排列的种数，通常用符号 $A_m^n$ 表示。

在 $A_m^n$ 这个符号中，m 是元素的个数，n 是选取出来进行排列的元素的个数，显然，m 和 n 都是正整数，并且 n 不能大于 m。

从排列的定义，可知上面所举的三个例子都是从 3 个不同元素里选取 2 个来排列，要求共有多少种不同的排列的問題。通过实际試験，可知每一个例子都可得出 6 种不同的排列(除了例 3 的 6 种前面已經写出以外，其他两个例子，請讀者自行写出)。从 3 个不同元素里选取 2 个元素来排列，所有不同的排列的种数等于 6，用符号列式表示，就是 $A_3^2 = 6$。

## §2. 求排列数的公式

排列数的多少不但与元素的个数（即 m）有关，而且与选取的元素的个数（即 n）有关。現在，我們来研究計算排列数的公式：

(1) 設有 5 本不同的书(用字母 a,b,c,d,e 来表示)，从这5本书中选取1本摆在桌上，显然共有5种不同的方法，就是 $A_5^1 = 5$。由此，很容易推出，如果书的本数是 m，取出 1 本摆在桌上的方法也是 m，因此，$A_m^1 = m$。

(2) 从 5 本不同的书中，选取 2 本分一左一右并摆在桌上。先排左边的一本，由（1）可知有 $A_5^1 = 5$ 种排法，再排右边的一本，由于左边排定了 5 本书中的任 1 本以后，右面的一本就只能从剩下 5－1 即 4 本书中选取了。这样，右边的一本有 $A_4^1 = 4$ 种排法。这里，我們要解决的問題是：左边一本有 5 种排法，右边一本有 4 种排法，对于整个排列問題来說，从 5 本书中选取两本分左右排列的种数应該怎样計算呢？从图 1 可知，由于对于左边的每一种排法，右边都有 4 种排法和

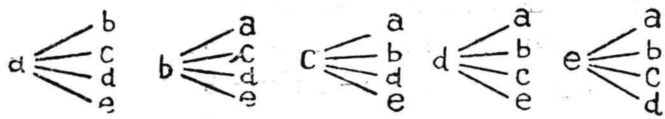

图 1

它配合，因此，从 5 本书中选取 2 本的排列数 $A_5^2$ 应当等于 $A_5^1 \cdot A_4^1$，即 $5 \times 4 = 20$（不是 $A_5^1 + A_4^1$）。

由此，我們可以推出 $A_m^2 = A_m^1 \cdot A_{m-1}^1 = m(m-1)$。

(3) 从 5 本不同的书中每次取出 3 本分左、中、右排在桌上。左、中两个位置共有 $A_5^2 = A_5^1 \cdot A_4^1 = 5 \cdot 4$ 种排法，在右边的一个位置上，由于左、中两个位置上已有 2 本排定，只能从 5－2 即 3 本书中选取 1 本来排，因此，在右边这个位置上有 $A_3^1 = 3$ 种排法（图 2）。对于左、中两个位置上的每一种排列，右边位置都有 $A_3^1$ 种排法和它配合，因此，$A_5^3 = A_5^2 \cdot A_3^1 = A_5^1 \cdot A_4^1 \cdot A_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$。

由此，可以推出，$A_m^3 = A_m^1 \cdot A_{m-1}^1 \cdot A_{m-2}^1 = m(m-1)(m-2)$。

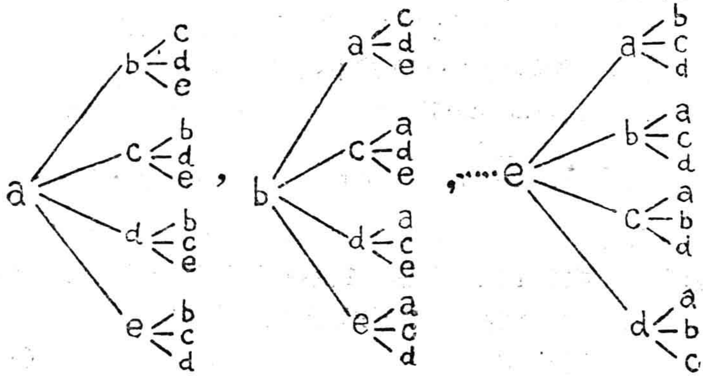

图 2

(4) 按照上面类推下去，可以得出：

$$A_m^4=m(m-1)(m-2)(m-3)$$

$$A_m^5=m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

……………………………………………

观察上面的各个等式，可以看出：

(i) 等式右边这个乘积的因数的个数等于选取出来排列的元素的个数。这是因为选取多少个元素来排列，就有多少个排列的位置，而每一个因数就是一个位置上的排列种数。

(ii) 乘积中第一个因数是 m，以后逐个比前一个小 1，即第二个因数是 $m-1$，第三个因数是 $m-2$，第四个因数是 $m-3$，……第 n 个因数是 $m-n+1$。

这样，我們就可以推出：

$$A_m^n=\overbrace{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots\cdots(m-n+1)}^{\text{共 n 个因数}} \qquad (\mathrm{I})$$

这就是計算 $A_m^n$ 的公式。在 § 1 中我們通过实际試驗求得 $A_3^2=6$。现在，我們可将 $m=3$，$n=2$ 代入 (I) 式中計算，得到 $A_3^2=3\cdot(3-1)=6$，前后結果是符合的。

当 $n=m$ 时，也就是将 m 个不同元素全部进行排列，这时 $A_m^m$ 等于多少呢？在 (I) 式中，令 $n=m$，得：

$$A_m^m=m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots\cdots(m-m+1)$$

$$=\overbrace{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{\text{共 m 个因数}}$$

上式中，$m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ 是自然数 m 依次少 1 直到自然数 1 的連乘积，这个乘积通常用符号 $m!$ (讀做“m 的阶乘”) 来表示，我們也可写成

$$A_m^m=m! \qquad (\mathrm{II})$$

将 m 个不同元素全数进行排列叫做 m 个不同元素的全

排列，（Ⅱ）式是計算 m 个不同元素的全排列数的公式。

将（Ⅰ）式和（Ⅱ）式比較一下，可知在 $n<m$ 的时候，$m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)$ 比 $m!$ 少 $(m-n)[m-(n+1)][m-(n+2)]\cdots\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$ 这些因数〔这样的因数有 $(m-n)$ 个〕，因此可得

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)[m-(n+1)]\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{(m-n)[m-(n+1)]\cdots\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{m!}{(m-n)!} \tag{Ⅲ}$$

在 $n=m$ 的时候，（Ⅲ）式变成 $A_m^m=\frac{m!}{(m-m)!}=\frac{m!}{0!}$。

0！的意义是怎样的呢？0！是 0 个因子的乘积，根本沒有因子，也就談不到乘积，但是为了使公式（Ⅲ）$A_m^m=\frac{m!}{(m-n)!}$ 在 $m=n$ 时也成立，我們不能不給 0！作一定义，就是：

定义：$0!=1$

这样，$$A_m^m=\frac{m!}{(m-m)!}=\frac{m!}{0!}=\frac{m!}{1}=m!$$

就完全符合公式（Ⅱ）了。

在 $A_m^n$ 中，n 是不能大于 m 的正整数。現在我們来看 $n=0$ 的情况是怎样呢？$A_m^0$ 不能按公式（Ⅰ）来求出答案，但是按照公式（Ⅲ）可得

$$A_m^0=\frac{m!}{(m-0)!}=\frac{m!}{m!}=1$$

这个答案也是符合实际的。因为从 m 个元素中取 0 个元素来排列，解决这問題的办法只有 1 种，就是不取任何个元素。不

取任何个元素既然也是一种办法，$A_m^0=1$ 当然可以成立。

**例 1.** 解方程 $A_m^3=m\ A_3^3$

解：因 $A_m^3=m(m-1)(m-2)$，$A_3^3=3!=3\cdot2\cdot1=6$

∴ 原方程可化为 $m(m-1)(m-2)=6m$

移項：$m(m-1)(m-2)-6m=0$.

整理：$m[(m-1)(m-2)-6]=0$.

$m[m^2-3m-4]=0$

即 $m(m-4)(m+1)=0$.

∴ $m_1=0,\ m_2=4,\ m_3=-1$

因原方程的右边为 $A_m^3$，可知 m 不能小于 3，故 $m_1$ 和 $m_3$ 都沒有意义，∴ $m=4$

**例 2.** 16 个人組成慰問团，慰問海防前綫某部战士。在这 16 个人当中，选出 1 人当团长，1 人当副团长，1 人当秘书，共有多少种不同的选法？

解：所求的选法数目等于从 16 个不同元素中选取 3 个元素的排列数。

$A_{16}^3=16\cdot15\cdot14=3{,}360$，

∴ 共有 3,360 种不同的选法。

**例 3.** 8 个少先队員并坐在一起照相，問：(1) 共有多少种不同的坐法？(2) 如果某两个队員必須坐在两端，有多少种不同的坐法？

解：(1) 共有 $A_8^8=8!=40{,}320$ 种不同的坐法。

(2) 某两个队員坐在两端有 2! 种坐法，其余的 6 个队員坐在这两个队員中間有 $A_6^6=6!$ 种坐法。

由于坐在两端的两个队員的每一种坐法，其余 6 个队員坐在中間都有 6! 种坐法和它配合，因此共有

$2!\times6!=1{,}440$ 种坐法。

例 4. 用数字 2,3,5,0 可以組成多少个沒有重复数字的四位数?

解: 要組成四位数，因此，"0"不能排在千位上。所以，我們要从 4 个数字的全排列数中减去"0"排在千位时的排列数。

四个数字的全排列数是: $A_4^4=4!=24$

"0"排在千位上的排列数是: $A_3^3=3!=6$

$\therefore$ 共可組成 $24-6=18$ 个不同的四位数。

## §3. 封閉曲綫上的排列

封閉曲綫上的排列和直綫上的排列不同。例如 a,b,c,d 四个元素排在圓周上，如果不确定圓周的位置哪个是第一个，哪个是第二个等等，那末在圓周上排列 a,b,c,d 四个元素，从某一种排列开始，依次将各个元素繞圓周轉动一个位置就得到另一种排列，依次轉动下去，連开始的一种共可得到四种排列。但是这四种只能算为一种(图 3)。如果我們設想在第一种排列中 bc 之間将圓周剪断，而将圓弧拉成綫段，那末，这四种排列在直綫上仍是四种不同的排列。

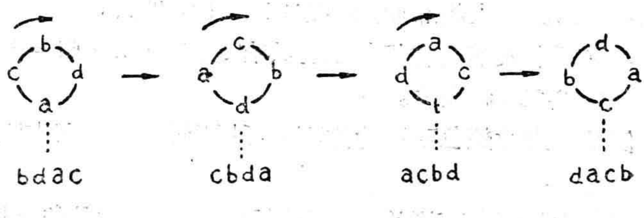


图 3

由此可见，直綫上n个元素的n种排列（象图3中那样的順序关系，即从某一种排列开始，依次从左端或右端移动1个元素到另一端而变成一种新的排列），如果排到圓周或其他的封閉曲綫上去，就只得到1种排列。因此，从m个不同元素里选取n个元素在封閉曲綫上的排列数应当是：

$$\frac{A_m^n}{n} \tag{IV}$$

若为m个不同元素的全排列，那么在封閉曲綫上的全排列数为：

$$\frac{A_m^m}{m}=\frac{m!}{m}=(m-1)! \tag{V}$$

例5. 八个人围坐一张圓桌，共有多少种不同的坐法？如果某两个人不坐在相邻的位置，有多少种不同的坐法？

解：八个人围坐圓桌共有 $(8-1)!=7!=5{,}040$ 种不同的坐法。

要求某两个人不坐在相邻的位置有多少种坐法，可以从这5,040种坐法里减去某两人相邻而坐的坐法。

某两个人相邻而坐，两个人就相当于一个人一样。这两个人在一起連同其余6个人共有 $(7-1)!=6!$ 种坐法。但是这两个人可以交换位置，也就是他們两人之間有 $A_2^2=2!$ 种坐法，因此，某两人相邻而坐共有 $2!\cdot6!$ 种坐法。

∴某两个人不坐在相邻位置共有 $5{,}040-2!\cdot6!=5{,}040-1{,}440=3{,}600$ 种坐法。

例6. 六粒顏色不同的宝石，可以穿成多少种不同的項圈？

解：六粒顏色不同的宝石在圓周上的排列数是 $(6-1)!$，但因其中每两种排列当以直径为軸轉过180°时可以变成一

种排列（如图4中举出的两組），所以，六粒宝石只能穿成

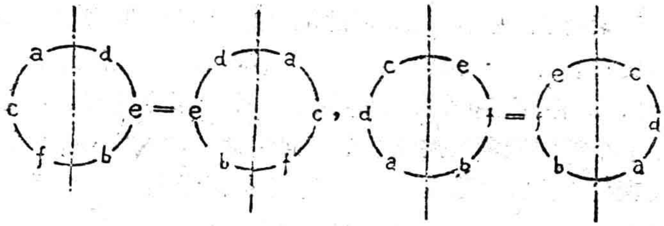


图4

$\frac{(6-1)!}{2}=\frac{5!}{2}=60$ 种不同的項圈。

注意：如果封閉曲綫上有若干个次第不同的位置，譬如說，哪个位置是第一号，哪个位置是第二号等等，在这种情况下，封閉曲綫上的排列数是和在直綫上一样的。

## §4. 含有相同元素的全排列

設有 a，a，a，b，c 五个元素，其中 a，a，a 是三个相同的元素，观察这五个元素的全排列中的任何一种，如 abaac，如果我們将三个相同的元素 a、a、a 换成不同的元素 $a_1$.$a_2$.$a_3$，那末在不变更其他元素的位置的情况下，原来的一种排列，就可变成 $A_3^3=3!=6$ 种不同的排列（图5）。

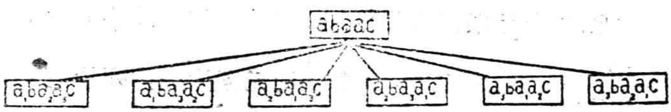


图5

在一般情况下，如果 m 个元素中有 p 个（当然 p 不大于 m）元素是相同的，如果我們将这 p 个相同的元素换成 p 个不同的元素，在不变更其他元素的位置的情况下，原来每一种排列可变成 p! 种不同的排列（∵p 个不同元素相互間的全排列数 = p!）。将含有 p 个相同元素的 m 个元素的所有不同的排列中 p 个相同元素均换成 p 个不同元素，就可以得到 m 个不同元素的全排列。因此，設含有 p 个相同元素的 m 个元素的全排列数为 $x_1$，我們可得这样的关系式：

$$x_1 \cdot p! = m!$$

即
$$x_1 = \frac{m!}{p!} \tag{VI}$$

又如在 m 个元素中，有一种相同的元素是 p 个，另一种相同的元素是 q 个，又另一种相同的元素是 r 个，……，我們只要将这 m 个元素所有不同的全排列中的 p 个相同元素换成 p 个不同的元素(这时排列数要乘以 p!)，再将 q 个相同的元素换成 q 个不同的元素(这时排列数又要乘以 q!)，再将 r 个相同的元素换成 r 个不同的元素(这时排列数又要乘以 r!)……，最后就可得到 m 个不同元素的全排列。因此，設这 m 个元素，其中有一种相同的元素 p 个，另一种相同的元素 q 个，又另一种相同的元素 r 个等等的全排列数是 x，那末：

$$x \cdot p! \cdot q! \cdot r! \cdots\cdots = m!$$

$$\therefore \quad x = \frac{m!}{p!q!r!\cdots\cdots} \tag{VII}$$

如果 m 个元素都彼此相同，即在（VI）式中 p=m，則 $x_1 = \frac{m!}{m!} = 1$，这就是說，m 个相同元素的全排列数是 1。事实上，不論多少个相同的元素，作直綫排列，或封閉曲綫排列，

都只有1种排列法。

**例7.** 某高級中学的礼堂屋頂上，排列了12面旗子，其中5面是紅色的，2面是黃色的，2面是紫色的，3面是綠色的。問共有多少种不同的排列法？

解：
$$x=\frac{12!}{5!2!2!3!}=166,320$$

∴共有166,320种不同的排列法。

**例8.** 棋盘形的街道，有10条南北方向的街，5条东西方向的街。問从一角走至对角，走最短的路程，有多少种不同的走法？

解：10条南北方向的街都被东西方向的街划分为5－1＝4段，5条东西方向的街都被南北方向的街划分为10－1＝9段（图6）。从一角走至对角，走最短的路程，无論怎样走法，一定要走过9＋4＝13段街道。如果南北方向的四段用a、a、a、a表示，东西方向的九段用b、b、b、b、b、b、b、b、b表示，那末所选的道路是aaaabbbbbbbbb，abbaabbabbbbb等等，因此这个問題可归結为含有相同元素的全排列問題。

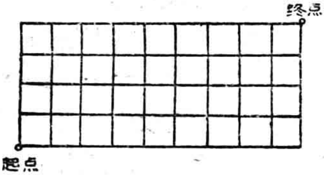


图6

$$x=\frac{(9+4)!}{9!4!}=\frac{13!}{9!4!}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4!}=715$$

∴共有715种走法。

## §5. 不同元素允許重复的排列

設从m种不同的元素中选取n个来排列，每种至少有n

个，这 n 个元素可以全不相同，可以部分相同，也可以全部相同。譬如从 a、b、c、d 四种元素中选取三个元素来排列，不仅可以有 abc，bcd，acd ……这种种排列（这就是 § 1 中所研究的情况），也可以有 aac，bba，abb……这样的排列，也可以有 aaa，bbb，ddd……这样的排列（后面两种情况是 § 1 中所不允許的），現在我們来研究从 m 种不同元素允許重复选取的 n 个元素的排列数。

因为任一元素可以重复选取，因此，在排列中 n 个位置里的任一个位置都可用 m 种元素里的每一种元素排入，这就是說，n 个位置里的每一个位置上有 $A_m^1=m$ 种排法。

∴所求的排列数是：

$$m\cdot m\cdot m\cdots\cdots\text{到 } n \text{ 个因数}=m^n \qquad (\text{VIII})$$

例 9. 用数字 1，3，5，7 可以組成多少个能被 5 整除的三位数？（数字可以重复）

解：根据算术上数的整除性定理，能被 5 整除的多位数，个位数字只能是 0 或 5，現在题中給出的数字中不包括零，因此个位数字只能是 5，故个位上只有一种排列方法。

百位和十位上由于数字可以重复，共有 $4^2=16$ 种排列方法。

∴共可組成 $16\cdot1=16$ 个能被 5 整除的三位数。

## 习 题 一

1. 写出 a，b，c，d 四个元素所有的全排列。

注：以后的习題中，除去特別注明的而外，所謂排列都指不允許重复选取的情况。

2. 求証：(1) $A_{n+1}^{n+1}-A_n^n=n^2\cdot A_{n-1}^{n-1}$

(2) $A_m^n + n \cdot A_m^{n-1} = A_{m+1}^n$

3. 已知：(1) $A_{2m+1}^4 = 140\,A_m^3$

(2) $A_{2m}^4 = 127\,A_{2m}^3$，求 m。

4. 一条鉄路共有 13 个車站，問共需印制多少种不同的車票？

5. 公共食堂印制一批飯券，飯券上編号是用罗馬数字 I——V 中的三个数字排在前面，后面用五位数(允許有重复数字)編号(00000—99999)，如券面每张值人民币一角，問这批飯券共值人民币多少元？

6. 用若干盞顏色不同的电灯中的两盞并列在一起作为連絡信号，問要組成 20 种不同的信号，应該有多少种不同顏色的电灯？

7. 用数字 1，2，3，4，5 可以組成多少个沒有重复数字的五位的偶数？

8. 用数字 1，2，3，4，5 可以組成多少个比 13,000 大的数？

9. 将六个“+”号，五个“－”号并列在一起，共有多少种不同的排法？

10. 如图 7，象棋局中，黑方有双象防守，問紅方一个边卒进攻到黑方的将位，走最短路綫，有多少种不同的走法？

11. 十个人圍坐一张圓桌，其中男女各半，問：

(1) 共有多少种坐法？

(2) 如果男女相間而坐，有多少种坐法？

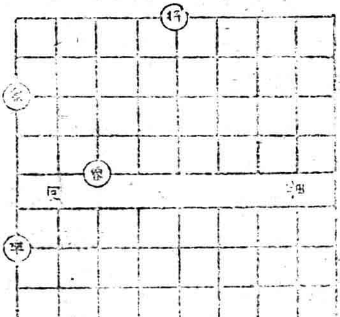

图 7

一 定 要 努 力 学 习!

定 要 努 力 学 习!

要 努 力 学 习!

努 力 学 习!

力 学 习!

学 习!

习!

图 8

(3) 如果某两位客人坐在主人的两侧，有多少种坐法?

12. 用数字 1,2,5,0 可以組成多少个允許有重复数字的六位数?

13. “一定要努力学习”这句口号照图 8 那样排列，問从左上角的“一”字讀起，共可讀多少次而不重复?

14. 請証明:

$$A_1^1+2A_2^2+3A_3^3+\cdots\cdots+mA_m^m=(m+1)!-1。$$

## §6. 什么叫做組合

比較下面的两个問題:

(1) 从五本不同的書里选取两本排在桌上，有多少种不同的排列?

(2) 从五本不同的書里选取两本，贈給一个同学，有多少种不同的贈法?

显然，問題(1)是排列問題，如果用a,b,c,d,e代表这五本書，那末任取出其中的两本，如 ab，这两本書有 2! 种排列方法，卽 ab 和 ba。但在問題 (2) 中，选定这两本以后，贈法只是一种，因为贈書 ab 和贈書 ba 是完全一样的。因此，問題 (2) 和問題 (1) 不同，它屬于一种新的問題，就是我們卽将研究的組合問題。