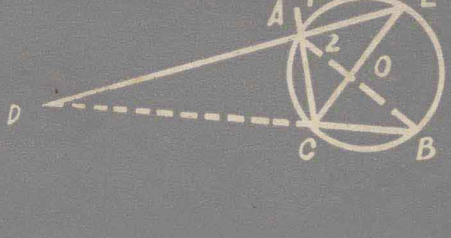
中学数学习题集



无锡县文教局教研室

前　言

本书通过题解形式，介绍中学数学基础知识和基本技能，供中学教师教学及中学生复习时参考。

本书根据现行全日制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，兼顾到当前教学实际，内容上作了适当的拓宽、加深和提高，并注重数学方法的介绍和解题技巧的培养以及知识的综合运用。全书共编选习题题解500个，还配有练习题639个作为附录。为便于阅读，题解的过程叙述得比较详细，难度较高的练习题还配有必要的提示。

参加本书编写工作的有华昌年、缪崇正、胡琛、魏泉祥、潘新生、黄人杰、陆元璐、周林生等同志，华祖舜、钱颂鸣、郑焕茂、禅智敏、朱发成等同志协助了编写工作，何其正、吴荣宝、杨继洲等同志对本书提出了有益的修改意见，在此谨致深切的谢意。

限于水平，加之时间匆促，书中难免有缺点错误，恳请广大读者批评指正。

无锡县文教局教研室

一九七九年一月

目　　录

一、数与式

1. 计算：$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

解：設 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$,

二边立方，整理后得

$$3\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\right)=x^3-2.$$

$\therefore\ x^3+x-2=0$.

解得唯一实数根 $x=1$.

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1.$$

2. 已知：$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$ $(a>0)$，求 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值.

解：$\because\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$,

$\therefore\ b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}a$,

$$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}a}{a}+\frac{a}{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}a}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{1\pm\sqrt{5}}=\pm\sqrt{5}$$

3. 若 $x+\frac{1}{x}=4$，求 $x^4-\frac{1}{x^4}$ 的值

解：∵ $x^4-\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$，

又 ∵ $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=14$，

$$x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2}=\pm\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}$$

$$=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3},$$

∴ $x^4-\frac{1}{x^4}=14\times4\times(\pm2\sqrt{3})=\pm112\sqrt{3}$.

4．若 $x+y+z=0$，$xy+yz+zx=1$，$xyz=2$．

求 (1) $x^2+y^2+z^2$;

(2) $x^3+y^3+z^3$;

(3) $x^4+y^4+z^4$.

解：(1) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=-2$．

(2) $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=6$．

(3) $x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=4-2[(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)]$

$=2$．

5．已知：$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$，且 $x>0$，$y>0$．

求：(1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$；

(2) $\frac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}$．

解：　解方程 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$，得

$(\sqrt{x}-5\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})=0$，

∵　$x>0$，$y>0$，

∴　$\sqrt{x}=5\sqrt{y}$.

∴　$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=5$；　$\dfrac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}=2$.

6. 如果 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$　$(a>0,\ b>0)$，

求 $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

解：∵ $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}$.

∴　$x^2-1=\dfrac{(a-b)^2}{4ab}$,

$$\therefore\ \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2b\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=2bx\sqrt{x^2-1}+2b(x^2-1)$$

$$=\frac{1}{2a}\left[(a+b)(a-b)+(a-b)^2\right]$$

$$=\begin{cases} a-b. & (a\geqslant b>0)\text{：} \\ \dfrac{b}{a}(b-a) & (0<a<b). \end{cases}$$

7. 已知：$\log_2 a=4+\log_2 b^2$，且 $b>0$．求 $\dfrac{2a+b^2}{a+2b^2}$.

解：∵ $\log_2 a=4+\log_2 b^2=\log_2 16+\log_2 b^2$,

∴ $\log_2 a=\log_2 16b^2$,

∴　$a=16b^2$.　　∴ $\dfrac{2a+b^2}{a+2b^2}=\dfrac{33}{18}$.

8. 已知：$\lg 64 = a$，求 $\log_{25} 50$.

解：由 $\lg 64 = a$，得 $\lg 2 = \frac{a}{6}$.

$$\therefore \quad \log_{25} 50 = \frac{\lg 50}{\lg 25} = \frac{2-\lg 2}{2-2\lg 2} = \frac{12-a}{2(3-a)}.$$

9. 已知：$\lg(35-x^3) = 3\lg(5-x)$，求 $\lg(x^2+1)$.

解：$\because \quad \lg(35-x^3) = 3\lg(5-x)$，

$\therefore \quad (35-x^3) = (5-x)^3$，

即 $\quad x^2-5x+6=0$，

$\therefore \quad x_1 = 2$，$\quad x_2 = 3$，

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$\lg(x^2+1) = \lg 5$；

当 $x=3$ 时，$\lg(x^2+1) = 1$.

10. 已知 $\log_{18} 9 = a \quad (a \neq 2)$，$18^b = 5$.

求：$\log_{36} 45$.

解：$\because \quad 18^b = 5$，$\quad \therefore \quad \log_{18} 5 = b$，

$$\therefore \quad \log_{36} 45 = \frac{\log_{18} 45}{\log_{18} 36} = \frac{\log_{18} 9 + \log_{18} 5}{\log_{18} 18 + \log_{18} 2}$$

$$= \frac{a+b}{1+\log_{18}\frac{18}{9}} = \frac{a+b}{1+1-\log_{18} 9}$$

$$= \frac{a+b}{2-a}.$$

11. 已知：$\dfrac{4\sin\theta - 2\cos\theta}{5\cos\theta + 3\sin\theta} = \dfrac{6}{11}$，求 $\lg\sec^2\theta + \lg$

解：$\because \quad \dfrac{4\sin\theta - 2\cos\theta}{5\cos\theta + 3\sin\theta} = \dfrac{6}{11}$.

$\therefore \quad \dfrac{4\operatorname{tg}\theta-2}{5+3\operatorname{tg}\theta}=\dfrac{6}{11}$.

即 $\quad 44\operatorname{tg}\theta-22=30+18\operatorname{tg}\theta$,

$\therefore \quad \operatorname{tg}\theta=2, \quad \operatorname{tg}^2\theta=4$.

$\because \quad \sec^2\theta=1+\operatorname{tg}^2\theta$.

$\therefore \quad \sec^2\theta=1+4=5$.

$\therefore \quad \lg\sec^2\theta+\lg 2=\lg 5+\lg 2=1$.

12. 化简: $\dfrac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}\div\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}$.

解: 設: $\sqrt[3]{x}=A$, 则 $\sqrt[3]{x^2}=A^2$, $x=A^3$,

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{8-A^3}{2+A}\div\left(2+\dfrac{A^2}{2+A}\right)+\left(A+\dfrac{2A}{A-2}\right)\cdot\dfrac{A^2-4}{A^2+2A}$

$$=\frac{8-A^3}{2+A}\div\frac{4+2A+A^2}{2+A}+\frac{A^2}{A-2}\cdot\frac{A-2}{A}$$

$$=\frac{(2-A)(4+2A+A^2)}{2+A}\cdot\frac{2+A}{4+2A+A^2}+A$$

$$=2.$$

13. 若方程 $4x^2-2ax+2a-3=0$ 无实根, 且 a 为实数,

化简: $\sqrt{4a^2-12a+9}+\sqrt{a^2-12a+36}$

解: $\because$ 实系数二次方程无实根,

$\therefore \quad (2a)^2-4\times4\times(2a-3)<0$,

解得 $\quad 2<a<6$.

$\therefore$ 原式 $=|2a-3|+|a-6|=(2a-3)+(6-a)$

$=a+3$.

14. 化简：$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}$.

解：原式 $=\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-3\right|$

$$=\begin{cases}2\sqrt{x+1}-5 & (x\geqslant 8);\\ 1 & (3\leqslant x<8);\\ 5-2\sqrt{x+1} & (-1\leqslant x<3).\end{cases}$$

15. 已知：$2x^2-5x+2<0$，化简：$2\sqrt{x^2-4x+4}+|2x-1|$.

解：$\because$ $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)<0$，

$\therefore$ $(2x-1)(x-2)<0$.

$\therefore$ $\frac{1}{2}<x<2$，

$\therefore$ 原式 $=2|x-2|+|2x-1|=2(2-x)+2x-1=3$.

16. 求证：$\sqrt{\underbrace{111\cdots\cdots1}_{2n位}-\underbrace{222\cdots\cdots2}_{n位}}=\underbrace{333\cdots\cdots3}_{n位}$.

証明：$\because$ $\underbrace{111\cdots\cdots1}_{2n位}=\frac{10^{2n}-1}{9}$，

$$\underbrace{222\cdots\cdots2}_{n位}=\frac{2(10^n-1)}{9},$$

$$\therefore \quad \frac{10^{2n}-1}{9}-\frac{2(10^n-1)}{9}=\frac{10^{2n}-2\times10^n+1}{9}=\frac{(10^n-1)^2}{9},$$

$$\therefore \quad \sqrt{\underbrace{111\cdots\cdots1}_{2n位}-\underbrace{222\cdots\cdots2}_{n位}}=\frac{10^n-1}{3}=\underbrace{333\cdots\cdots3}_{n位}.$$

17. 分解因式：$(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)$.

解：原式 $=x^4-2x^2yz+y^2z^2-y^2z^2+xz^3+xy^3-x^2yz$,

$=x(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

$=x(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

18. 分解因式：$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

解：原式 $=[(x+y+z)^3-x^3]-(y^3+z^3)$

$$=(y+z)[(x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2]$$
$$-(y+z)(y^2-yz+z^2)$$
$$=(y+z)(3x^2+3xy+3yz+3zx)$$
$$=3(x+y)(y+z)(z+x).$$

註：也可用輪換对称来分解.

19. 分解因式：

$1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+5a^6+4a^7+3a^8+2a^9+a^{10}$.

解：原式 $=(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)^2$

$$=[(1+a+a^2)+a^3(1+a+a^2)]^2$$
$$=(1+a)^2(1+a+a^2)^2(1-a+a)^2.$$

20. 分解因式：$(a-1)x^3-ax^2-(a-3)x+a-2$

解：原式 $=(a-1)x^3-(a-1)x^2-x^2+x-(a-2)x+a-2$

$$=(a-1)x^2(x-1)-x(x-1)-(a-2)(x-1)$$
$$=(x-1)[(a-1)x^2-x-(a-2)].$$

21. 求証：四个連續自然數的积与1的和是个完全平方數.

証明：設四个連續自然數为 n, $n+1$, $n+2$, $n+3$,

那么

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+2)(n^2+3n)+1$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$$
$$=(n^2+3n+1)^2.$$

∴ 四个連續自然數的积与1的和是个完全平方數.

22. 若 $ax^2+bxy+cy^2=1$, $cx^2+bxy+ay^2=1$, $x+y=1$, 且 $a\neq c$, 求証: $a+b+c=4$.

証明: $\because$ $ax^2+bxy+cy^2=1$ (1)

$cx^2+bxy+ay^2=1$ (2)

(1)－(2), 得

$$(a-c)x^2+(c-a)y^2=0.$$

$\because$ $a\neq c$, $\therefore$ $x^2-y^2=0$,

又 $\because$ $x+y=1$, $\therefore$ $x=y=\frac{1}{2}$. (3)

(3) 代入 (1), 得

$$a\cdot\frac{1}{4}+b\cdot\frac{1}{4}+c\cdot\frac{1}{4}=1$$

即 $a+b+c=4$.

23. 已知: $\dfrac{x}{y+z}=a$, $\dfrac{y}{z+x}=b$, $\dfrac{z}{x+y}=c$. 且 $x+y+z\neq 0$.

求証: $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}=1$.

証明: $\because$ $\dfrac{x}{y+z}=a$,

$$\therefore \frac{x+y+z}{y+z}=1+a,$$

$$\therefore \frac{a}{1+a}=\frac{x}{x+y+z} \quad (x+y+z\neq 0).$$

同理 $\dfrac{b}{1+b}=\dfrac{y}{x+y+z}$; $\dfrac{c}{1+c}=\dfrac{z}{x+y+z}$,

$$\therefore \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$$

24. 若 $abc=1$. 求証: $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$.

証明: $\because\ abc=1$,

$$\therefore\ \frac{a}{ab+a+1}=\frac{1}{b+1+bc}=\frac{ac}{1+ac+c};$$

同理 $$\frac{b}{bc+b+1}=\frac{1}{c+1+ca}=\frac{ab}{1+ab+a};$$

$$\frac{c}{ca+c+1}=\frac{1}{a+1+ab}=\frac{bc}{1+bc+b},$$

$$\therefore\ \frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}$$

$$=1.$$

25. 已知: $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,

求証: $a^2+b^2=1$.

証明: $\because\ a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,

$\therefore\ a\sqrt{1-b^2}=1-b\sqrt{1-a^2}$,

二边平方，得

$$a^2(1-b^2)=1+b^2(1-a^2)-2b\sqrt{1-a^2},$$

$\therefore\ 1-a^2-2b\sqrt{1-a^2}+b^2=0$,

即 $(\sqrt{1-a^2}-b)^2=0$,

$\sqrt{1-a^2}=b$,

就是 $1-a^2=b^2$,

$\therefore\ a^2+b^2=1$.

26. 設 $a+b+c=0$， 求証： $a^3+b^3+c^3=3abc$.

証明： $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$+3abc$
$=3abc$.

27. 已知：

$x^2-yz=a$ (1)

$y^2-zx=b$ (2)

$z^2-xy=c$ (3)

$ax+by+cz=d$ (4)

求証： $d^2=a^3+b^3+c^3-3abc$.

証明：(1)×x + (2)×y + (3)×z，得

$x^3+y^3+z^3-3xyz=ax+by+cz=d$ (5)

$(1)^2-(2)\times(3)$，得

$x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^2-bc$.

$\therefore\ dx=a^2-bc$ (6)

同理可得 $dy=b^2-ca$ (7)

$dz=c^2-ab$ (8)

(6)×a + (7)×b + (8)×c，得

$d(ax+by+cz)=a^3+b^3+c^3-3abc$,

$\therefore\ d^2=a^3+b^3+c^3-3abc$.

28. 已知：$\dfrac{x}{a+2b+c}=\dfrac{y}{a-c}=\dfrac{z}{a-2b+c}$，且 a、b、c、x、y、z 均不为零，

求証：$\dfrac{a}{x+2y+z}=\dfrac{b}{x-z}=\dfrac{c}{x+2y-z}$.

証明：設 $\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c}=k$，

則：$x=k(a+2b+c)$，$y=k(a-c)$，$z=k(a-2b+c)$，

$$\therefore \quad \frac{a}{x+2y+z}=\frac{a}{k(a+2b+c)+2k(a-c)+k(a-2b+c)}=\frac{1}{4k},$$

$$\frac{b}{x-z}=\frac{b}{k(a+2b+c)-k(a-2b+c)}=\frac{1}{4k},$$

$$\frac{c}{x+2y+z}=\frac{c}{k(a+2b+c)+2k(a-c)-k(a-2b+c)}=\frac{1}{4k},$$

$\therefore$ 原式得証．

29. 若 $\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{z+x}{az+bx}=\frac{x+y}{ax+by}=m$，

求証：$m=\frac{2}{a+b}$．

証明：$\because \quad y+z=amy+bmz$，

$\therefore \quad (1-am)y=(bm-1)z$，

同理可得：$(1-am)z=(bm-1)x$；

$(1-am)x=(bm-1)y$，

$\therefore \quad (1-am)^3=(bm-1)^3$，

$1-am=bm-1$，

$\therefore \quad (a+b)m=2$，

$m=\frac{2}{a+b}$．

註：本題也可用等比定理証之．

30. 若 a, b, c 都是实数，且 $\left(c^3+\frac{1}{c^3}-a\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}-b\right)^2=0$，

则　$b(b^2-3)=a$.

証明：$\because\ (c^3+\frac{1}{c^3}-a)^2+(c+\frac{1}{c}-b)^2=0$.

$$\therefore\ a=c^3+\frac{1}{c^3},\quad b=c+\frac{1}{c}.$$

$\therefore\ b(b^2-3)=b^3-3b=(c+\frac{1}{c})^3-3(c+\frac{1}{c})=c^3+\frac{1}{c^3}$,

则　$b(b^2-3)=a$.

31. 已知：$a^2+b^2=a^2b^2$，其中 a,b 为实数且 $ab+2<0$，

求証：$\dfrac{(a\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+b\sqrt{1-\frac{1}{b^2}})^2}{ab(ab+2)}=(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})^2$.

証明：由 $a^2+b^2=a^2b^2$，得

$$1-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2},\quad 1-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{a^2}.$$

又$\because$　$ab+2<0$，

$$\therefore\ \sqrt{\frac{1}{a^2b^2}}=-\frac{1}{ab},$$

$$\therefore\ \frac{(a\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+b\sqrt{1-\frac{1}{b^2}})^2}{ab(ab+2)}=\frac{ab-2}{ab}.$$

$$(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})^2=\frac{ab-2}{ab}.$$

$\therefore$ 原式得証.

32. 已知：$4ab=4a^2+9b^2$，且 $a>0$，$b>0$，

求証：$\lg\frac{2a+3b}{4}=\frac{\lg a+\lg b}{2}$.

証明：由 $4ab=4a^2+9b^2$，$a>0$，$b>0$，得

$$\left(\frac{2a+3b}{4}\right)^2=ab$$

$$\therefore \quad \lg\frac{2a+3b}{4}=\frac{\lg a+\lg b}{2}.$$

33. 已知：$\log_8 9=a$，$\log_3 5=b$.

求証：$\lg 2=\frac{2}{3ab+2}$.

証明：$\because \log_8 9=a$，$\therefore \frac{\lg 9}{\lg 8}=a$，即 $\frac{2\lg 3}{3\lg 2}=a$.

$$\therefore \quad \lg 2=\frac{2\lg 3}{3a} \qquad (1)$$

又 $\because \log_3 5=b$，$\therefore \frac{\lg 5}{\lg 3}=b$，

$$\therefore \quad \lg 3=\frac{1-\lg 2}{b} \qquad (2)$$

(2) 代入 (1)，得

$$\lg 2=\frac{2\,\frac{1-\lg 2}{b}}{3a},$$

$$\therefore \quad \lg 2=\frac{2}{3ab+2}.$$

34. 若 $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$，$z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$，求証：$x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

证：∵ $\lg y=\dfrac{1}{1-\lg x}$， $\lg z=\dfrac{1}{1-\lg y}$，

∴ $\lg x=1-\dfrac{1}{\lg y}$， $\lg y=-\dfrac{1-\lg z}{\lg z}$，

∴ $\lg x=1+\dfrac{\lg z}{1-\lg z}=\dfrac{1}{1-\lg z}$。

即 $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$。

35. 已知：$\dfrac{a}{c}=\sin\theta$， $\dfrac{b}{c}=\cos\theta$，

$$(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}=a^{a}\ (a>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})。$$

求証：(1) $(\lg a)^2=\lg(c+b)\cdot\lg(c-b)$；

(2) $b=0$。

証明：由 $\dfrac{a}{c}=\sin\theta$， $\dfrac{b}{c}=\cos\theta$，得

$$a^2=c^2-b^2，$$

在 $(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}=a^{a}$ 的两边取对数，得

$$(c-b)\lg(c+b)=a\lg a \quad (1)$$

$$(c+b)\lg(c-b)=a\lg a \quad (2)$$

(1)×(2)，得

$$(c^2-b^2)\lg(c+b)\cdot\lg(c-b)=a^2(\lg a)^2，$$

即 $(\lg a)^2=\lg(c+b)\cdot\lg(c-b)$ (3)

把 $c-b=\dfrac{a^2}{c+b}$ 代入(3)，得

$$(\lg a)^2=\lg(c+b)[2\lg a-\lg(c+b)]，$$

∴ $[\lg a-\lg(c+b)]^2=0$，

∴ $a=c+b$， $a^2=c^2+b^2+2bc$，