高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版 · 王高雄主编

九章丛书

常微分方程（第三版）

同步辅导及习题全解

主编 冯君淑

◆ 同步学习指导 ◆ 解题技巧剖析

◆ 考研真题精解 ◆ 课后习题全解

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

新版

高校经典教材同步辅导丛书

常微分方程

（第三版）

同步辅导及习题全解

主　编　冯君淑

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书共有六章，包括绪论、一阶微分方程的初等解法、一阶微分方程的解的存在定理、高阶微分方程、线性微分方程组、非线性微分方程、一阶线性偏微分方程。本书按教材内容安排结构，各章均包括学习指南、知识回顾、典型例题与解题技巧、考研真题精解、课后习题全解五部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习"常微分方程"课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可作为教师备课命题的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程（第三版）同步辅导及习题全解 / 冯君淑主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2012.10
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-0206-2

Ⅰ. ①常… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①常微分方程－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第228380号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　加工编辑：郭 赏　封面设计：李 佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 常微分方程（第三版）同步辅导及习题全解
作 者	主 编 冯君淑
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经 售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京蓝空印刷厂
规 格	170mm×227mm 16 开本 15 印张 371 千字
版 次	2012 年 10 月第 1 版 2012 年 10 月第 1 次印刷
印 数	0001—6000 册
定 价	18.80 元

前 言

王高雄等编写的《常微分方程(第三版)》以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《常微分方程(第三版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑"常微分方程"这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 学习指南。简单扼要地说明本章的学习目标,明确学习任务。

2. 知识回顾。对每章知识点进行简练概括,梳理各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

3. 典型例题与解题技巧。该部分选取一些启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,意在抛砖引玉。

4. 考研真题精解。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行详细的解答,以开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

5. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编 者

2012 年 8 月

目录
contents

目录
contents

第一章

绪　论

学习指南

1. 理解**微分方程的概念**，了解几种常微分方程模型和其建立方法；

2. 深刻理解**常微分方程和偏微分方程、线性和非线性、解和隐式解、通解和特解**、方程和方程组、驻定和非驻定、动力系统，以及积分曲线和轨线、方向场、等倾斜线等基本概念；

3. 了解雅克比矩阵和函数相关性的定义和应用.

知识回顾

1. 常微分方程，偏微分方程

微分方程就是联系自变量、未知函数及其导数的关系式. 如果在微分方程中自变量的个数只有一个，我们称这种微分方程为常微分方程；自变量的个数为两个或两个以上的微分方程为偏微分方程.

2. 线性与非线性

如果微分方程 $F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$ 的左端是关于 y 及$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$的一次有理整式，则称为 n 阶线性微分方程，不是线性方程的方程称为非线性微分方程.

3. 解和隐式解

如果函数 $y=\varphi(x)$代入方程 $F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$ 后，能使它变为恒等式，此称函数 $y=\varphi(x)$为

该方程的解. 如果关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定的函数 $y=\varphi(x)$ 是方程的解，我们称 $\Phi(x,y)=0$ 为此方程的隐式解.

4. 通解和特解

我们把含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 称为 n 阶方程 $F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$的通解.

为了确定微分方程一个特定的解，我们通常给出这个解所必需的条件，这就是所谓的定解条件. 常见的定解条件是初值条件和边值条件. 求微分方程满足定解条件的解，就是所谓定解问题. 当定解条件为初值条件时，相应的定解问题就称为初值问题.

5. 积分曲线

一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的解 $y=\varphi(x)$表示 Oxy 平面上的一条曲线，称为微分方程的积分曲线，而通解 $y=\varphi(x,c)$表示平面上的一簇曲线，特解 $\varphi(x_0)=y_0$ 则为过点(x_0,y_0)的一条积分曲线，积分曲线上过每一点的切线斜率$\frac{dy}{dx}$为方程右端 $f(x,y)$在该点处的值；反之，如有一条曲线，其上每一点的切线斜率为 $f(x,y)$则此曲线为积分曲线.

可以用 $f(x,y)$在 Oxy 平面某区域 D 上定义过各点的小线段的斜率方向，这样的区域 D 称为方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$所定义的方向场，又称向量场.

方向场中方向相同的曲线 $f(x,y)=k$ 称为等倾斜线或等斜线.

6. 微分方程组

用两个及两个以上的关系式表示的微分方程称为微分方程组.

7. 驻定与非驻定，动力系统

如果方程组右端不含自变量 t：

$$\frac{dy}{dx}=f(y),\qquad y\in D\subseteq \mathrm{R}^n,$$

则称驻定（自治）的；右端含 t 的微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=f(t;y),\qquad y\in D\subseteq \mathrm{R}^n,$$

称为非驻定的.

驻定微分方程组的过 y 的解 $\varphi(t;y)$可以视 t 为参数，有非常好的性质：可看成为 D 到 D 的单参数变换群，也就是，如记 $\Phi_t(y)=\varphi(t;y)$，令 $\Phi_t(y)$为参数 t 的 $y\in D$ 的映射（变换），则映射在 D 上满足恒等性 $\Phi_0(y)=y$ 和可加性 $\Phi_{t_1+t_2}(y)=\Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}(y))=\Phi_{t_2}(\Phi_{t_1}(y))$，满足上述性质的映射称为动力系统. 动力系统有连续和离散两种类型，因此驻定微分方程组可称为连续动力系统

$\{\Phi_t | t\in R\}$，或称连续动力系统$\{\Phi_t | t\in R\}$为由常数微分方程定义的动力系统. 也可以定义离散动力系统$\{\Phi_n | n\in z\}$，这里 z 为整数集，例如驻定差分方程组 $y_{n+1}=f(y_n)$或驻定微分方程组$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y)$，$y\in D\subseteq \mathrm{R}^n$ 的解$\Phi_n(y)=\varphi(n;y)$便构成离散动力系统.

8. 相空间、奇点的轨线

不含自变量，仅由未知函数组成的空间称为相空间. 积分曲线在相空间中的投影称为轨线. 对于驻定微分方程组$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(y)$，方程组 $f(y)=0$ 的解 $y=y^*$ 表示相空间中的点，它满足微分方程组，故称为平衡解（驻定解或常数解），又称为奇点（平衡点）.

9. 雅克比矩阵和雅克比行列式

对 n 个变元的 m 个函数，$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$i=1,2,\cdots,m$，定义雅克比矩阵为

$$\frac{D(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

当 $n=m$ 时，称雅克比矩阵对应的行列式为雅克比行列式，记$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$.

10. 函数相关性及其判定

设函数 $y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$及其一阶偏导数在某开集 $D\subset R^n$ 上连续，如果在 D 内 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 中的一个函数能表示成其余函数的函数，则称它们在 D 内函数相关；如果它们在 D 内的任何点的领域内皆非函数相关，则称它们在 D 内函数无关，或称它们彼此独立.

如果雅克比矩阵$\frac{D(f_1,f.2\cdots,f_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$在 D 内的任何点上的秩皆小于 m，则 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 函数相关；如果秩皆为 m，则 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 函数无关，彼此独立.

当 $n=m$ 时，若雅克比行列式不为零，则函数无关，彼此独立；若雅克比行列式为零，则函数相关.

典型例题与解题技巧

■ 基本题型Ⅰ：指出给定微分方程的阶数与是否线性

思路点拨 **微分方程的阶数**是指方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数。**非线性微分方程**是指方程中除了包含未知函数和未知函数的各阶导数的一次有理整式之外，还包含其他项，

一般具有如下形式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

这里 $a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 是 x 的已知函数。若上述 $f(x)=0$,即方程中只包含未知函数和未知函数的各阶导数的一次有理整式,那么方程就是**线性微分方程**.

例 1 指定下列微分方程的阶数,并回答方程是否线性的:

(1) $\frac{dy}{dx}=3xy^2+x^5$;　　(2) $\frac{d^4y}{dx^4}-2x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

解题过程 (1)一阶、非线性;　　(2)四阶、线性.

基本题型Ⅱ:验证或求取某方程的通解、特解

思路点拨 ①验证所给函数是某方程的解,只需将所给函数代入到微分方程中,证明两边恒等即可.

②求解简单的微分方程,一般直接对方程两边进行积分即可得到方程的通解;根据题给条件,找到通解对应曲线经过的某一个特定点,将这个点的坐标代入通解,即可得到特解.

例 2 验证给出的函数是相应微分方程的解.

(1) $\frac{dy}{dx}=3x^2+5x,y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+c$;($c$ 为任意常数)

(2) $(x+y)dx+xdy=0,y=\frac{1-x^2}{2x}$.

解题过程 (1) $\because y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{5}+c,\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3}{5}x^2+x$,

$\therefore$ 左边 $=5\frac{dy}{dx}=5\left(\frac{3}{5}x^2+x\right)=3x^2+5x=$ 右边,

即证 $y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+c$ 是方程 $5\frac{dy}{dx}=3x^2+5x$ 的解.

(2) $\because y=\frac{1-x^2}{2x},\therefore dy=\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)'dx=-\frac{x^2+1}{2x^2}dx$,

$\therefore$ 左边 $=(x+y)dx+xdy=\left(x+\frac{1-x^2}{2x}\right)dx+x\left(-\frac{x^2+1}{2x^2}\right)dx$

$=\left(\frac{x^2+1}{2x}-\frac{x^2+1}{2x}\right)dx=0=$ 右边,

即证 $y=\frac{1-x^2}{2x}$ 是方程 $(x+y)dx+xdy=0$ 的解.

例 3 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=3x^2$ 的通解,并求与直线 $y=2x$ 相切的特解.

解题过程 在方程 $\frac{dy}{dx}=3x^2$ 两边求积分,得到方程的通解为 $y=x^3+c$,其中 c 为任意常数.

与直线 $y=2x$ 相切的解满足在切点处斜率相同，即 $3x^2=2\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，所以切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

将这两点分别代入 $y=x^3+c$ 得 $c=\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ 和 $c=-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

故与直线 $y=x$ 相切的解为 $y=x^3+\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ 和 $y=x^3-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

■ 基本题型Ⅲ：求满足某些条件（与微分方程有关）的曲线或曲线族

思路点拨 首先设出所求曲线或曲线族，然后依据题给条件列出曲线应满足的微分方程.

例 4 求与抛物线族 $y=\frac{1}{2}cx^2$ 正交的曲线族.

解题过程 因为抛物族 $y=\frac{1}{2}cx^2$ 满足的微分方程为 $y'=cx$.

再由 $\begin{cases} y'=cx \\ y=cx^2 \end{cases}$ 消去 c 得 $y'=\frac{y}{x}$，

所以与 $y=cx^2$ 正交的曲线族满足的微分方程为 $-\frac{1}{y'}=\frac{y}{x}$，

即 $yy'=-x$，解之得 $y^2=-x+c$，这就是所求的曲线族方程.

■ 基本题型Ⅳ：建立实际问题的微分方程模型

思路点拨 根据实际问题所涉及的基本定律与定理建立微分方程模型.

例 5 一个质量为 m 的质点在水中由静止开始下沉，设下沉时水的阻力与速度成正比，试求质点运动规律所满足的微分方程及初始条件.

解题过程 设质点的运动规律为 $x=x(t)$，其中 t 表示时间，x 表示下沉的距离. 质点在水中受到重力 mg 及水的阻力 $-k\frac{dx}{dt}$（$k>0$ 是比例常数）作用，则可由牛顿第二定律得

$$mg-k\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$t=0$ 时，下沉距离 $x=0$，下沉速度为 0，因而 $x=x(t)$ 满足下列微分方程及初值问题：

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=g, \\ x(0)=0, \\ x'(0)=0. \end{cases}$$

考研真题精解

(2010 年数学二)设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则

A. $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$　　B. $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$

C. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$　　D. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

解题过程　答案为 A. 将四个选项分别代入验证即可.

课后习题全解

习题 1.2

1　指出下面微分方程的阶数,并回答方程是否线性的:

(1)$\frac{dy}{dx}=4x^2-y$;　(2)$\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+12xy=0$;

(3)$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-3y^2=0$;　(4)$x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$;

(5)$\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$;　(6)$\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+e^y=x$.

解题过程　(1)一阶,线性;　(2)二阶,非线性;　(3)一阶,非线性;
(4)二阶,线性;　(5)一阶,非线性;　(6)二阶,非线性.

2　试验证下面函数均为方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解,这里 $\omega>0$ 是常数:

(1)$y=\cos\omega x$;　(2)$y=c_1\cos\omega x$(c_1 是任意常数);

(3)$y=\sin\omega x$;　(4)$y=c_2\sin\omega x$(c_2 是任意常数);

(5)$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$($c_1,c_2$ 是任意常数);

(6)$y=A\sin(\omega x+B)$(A,B 是任意常数).

解题过程　(1)因为 $y=\cos\omega x,\frac{dy}{dx}=-\omega\sin\omega x,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(dy/dx)}{dx}=-\omega^2\cos\omega x$,

所以　$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cos\omega x=0$,

因此，$y=\cos\omega x$ 是方程$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=0$ 的解.

(2)因为 $y=c_1\cos\omega x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-c_1\omega\sin\omega x,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=-c_1\omega^2\cos\omega x$,

所以 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=-c_1\omega^2\cos\omega x+\omega^2 c_1\cos\omega x=0$,

因此，$y=c_1\cos\omega x$ 是方程$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=0$ 的解.

(3)因为 $y=\sin\omega x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\omega\cos\omega x,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=-\omega^2\sin\omega x$,

所以 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\sin\omega x=0$,

因此，$y=\sin\omega x$ 是方程$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=0$ 的解.

(4)因为 $y=c_2\sin\omega x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=c_2\omega\cos\omega x,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=-c_2\omega^2\sin\omega x$,

所以 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=-c_2\omega^2\sin\omega x+\omega^2 c_2\sin\omega x=0$,

因此，$y=c_2\sin\omega x$ 是方程$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=0$ 的解.

(5)因为 $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-c_1\omega\sin\omega x+c_2\omega\cos\omega x$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x,$$

所以 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x+\omega^2(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x)=0$,

因此，$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ 是方程$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=0$ 的解.

(6)因为 $y=A\sin(\omega x+B),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\omega A\cos(\omega x+B)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=-\omega^2 A\sin(\omega x+B),$$

所以 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=-\omega^2 A\sin(\omega x+B)+\omega^2 A\sin(\omega x+B)=0$,

因此，$y=A\sin(\omega x+B)$是方程$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=0$ 的解.

3 验证下列各函数是相应微分方程的解：

(1)$y=\frac{\sin x}{x},xy'+y=\cos x$;

(2) $y=2+c\sqrt{1-x^2}$，$(1-x^2)y'+xy=2x$（c 是任意常数）；

(3) $y=ce^x$，$y''-2y'+y=0$（c 是任意常数）；

(4) $y=e^x$，$y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$；

(5) $y=\sin x$，$y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0$；

(6) $y=-\dfrac{1}{x}$，$x^2y'=x^2y^2+xy+1$；

(7) $y=x^2+1$，$y'=y^2-(x^2+1)y+2x$；

(8) $y=-\dfrac{g(x)}{f(x)}$，$y'=\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$.

解题过程 (1)因为 $y=\dfrac{\sin x}{x}$，$y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，所以 $xy'+y=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x}+\dfrac{\sin x}{x}=\cos x$.

因此，$y=\dfrac{\sin x}{x}$ 是方程 $xy'+y=\cos x$ 的解.

(2)因为 $y=2+c\sqrt{1-x^2}$，$y'=\dfrac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}$，

所以
$$(1-x^2)y'+xy=(1-x^2)\frac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}+x(2+c\sqrt{1-x^2})$$
$$=-cx\sqrt{1-x^2}+2x+cx\sqrt{1-x^2}=2x.$$

因此，$y=2+c\sqrt{1-x^2}$ 是方程 $(1-x^2)y'+xy=2x$ 的解.

(3)因为 $y=ce^x$，$y'=ce^x$，$y''=ce^x$，

所以 $y''-2y'+y=ce^x-2ce^x+ce^x=0$.

因此，$y=ce^x$ 是方程 $y''-2y'+y=0$ 的解.

(4)因为 $y=e^x$，$y'=e^x$，

所以 $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=e^xe^{-x}+e^{2x}-2e^xe^x=1-e^{2x}$，

因此，$y=e^x$ 是方程 $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$ 的解.

(5)因为 $y=\sin x$，$y'=\cos x$，

所以
$$y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x$$
$$=\cos x+\sin^2 x-2\sin x\sin x+\sin^2 x-\cos x$$
$$=0.$$

因此，$y=\sin x$ 是方程 $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0$ 的解.

(6)因为 $y=-\dfrac{1}{x}$，$y'=\dfrac{1}{x^2}$.

所以 $x^2y'=x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=1$，又 $x^2y^2+xy+1=x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2+x\left(\dfrac{1}{x}\right)+1=1$，

所以，$y=-\dfrac{1}{x}$ 是方程 $x^2y'=x^2y^2+xy+1$ 的解.

(7)因为 $y=x^2+1$，$y'=2x$，

所以 $y^2-(x^2+1)y+2x=(x^2+1)^2-(x^2+1)(x^2+1)+2x=2x=y'$，

因此，$y=x^2+1$ 是方程 $y'=y^2-(x^2+1)y+2x$ 的解.

(8)因为 $y=-\frac{g(x)}{f(x)}$，所以 $y'=-\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}=\frac{g(x)f'(x)}{f^2(x)}-\frac{g'(x)}{f(x)}$，

又

$$\frac{f'(x)}{g(x)}y^2-\frac{g'(x)}{f(x)}=\frac{f'(x)}{g(x)}\left(-\frac{g(x)}{f(x)}\right)^2-\frac{g'(x)}{f(x)},$$

$$=\frac{g(x)f'(x)}{f^2(x)}-\frac{g'(x)}{f(x)}=y',$$

所以，$y=-\frac{g(x)}{f(x)}$是方程 $y'=\frac{f'(x)}{g(x)}y^2-\frac{g'(x)}{f(x)}$的解.

4　给定一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=2x$，

(1)求出它的通解；　　(2)求出通过点(1,4)的特解；

(3)求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解；　　(4)求出满足条件$\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的解；

(5)绘出(2)、(3)、(4)中的解的图形.

解题过程　(1)由$\frac{dy}{dx}=2x$，得

$$dy=2x\,dx,$$

方程两边积分，即得 $y=x^2+c$，其中 c 为任意常数.

所以，方程$\frac{dy}{dx}=2x$ 的通解为 $y=x^2+c$，c 为任意常数.

(2)把 $x=1$，$y=4$ 代入 $y=x^2+c$ 得 $c=3$.

则过点(1,4)的特解为 $y=x^2+3$.

(3)因为与直线相切，所以方程组

$$\begin{cases} y=x^2+c \\ y=2x+3 \end{cases}$$

有且只有唯一解，即 $x^2+c=2x+3$ 有唯一解，故 $c=4$. 因此，与直线 $y=2x+3$ 相切的解是 $y=x^2+4$.

(4)因为 $\int_0^1 y\mathrm{d}x=\int_0^1 (x^2+c)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}+cx\right]_0^1$

$$=\frac{1}{3}+c=2,$$

所以，$c=\frac{5}{3}$因此满足条件$\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的解为 $y=x^2+\frac{5}{3}$.

(5)在(2)、(3)、(4)中的解的图形分别如图 1-1 所示.

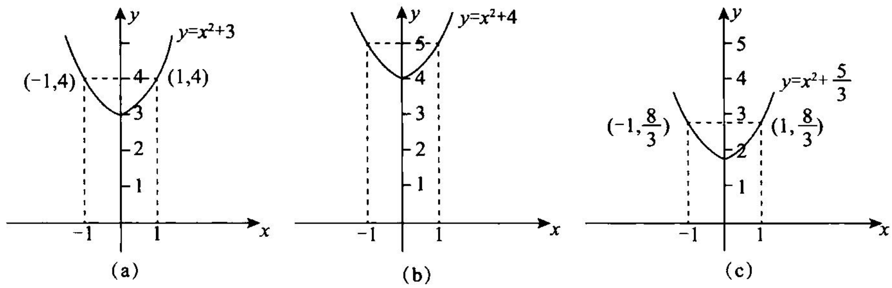

图 1-1

5　求下列两个微分方程的公共解：

$y'=y^2+2x-x^4, y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$.

解题过程　方程 $y'=y^2+2x-x^4$ 与方程 $y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$ 的公共解满足

$$y^2+2x-x^4=2x+x^2+x^4-y-y^2,$$

化简上式，得 $(y-x^2)[2(y+x^2)-1]=0$.

所以，$y=x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}-x^2$ 可能是两个方程的公共解，进一步，分别代入两个方程验证可以证明 $y=x^2$ 是两个方程的公共解，而 $y=\frac{1}{2}-x^2$ 不是两个方程的公共解.

因此，两个方程的公共解是 $y=x^2$.

6　求微分方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线.

解题过程　设方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线为 $y=kx+b$，

则 $y'=k$，代入原方程，得 $k+xk^2-kx-b=0$，

所以　$\begin{cases}k=b\\k^2=k\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k=0\\b=0\end{cases}$，$\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$.

那么，方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线为 $y=0$ 或 $y=x+1$.

7　微分方程 $4x^2y'^2=xy^3$，证明：与其积分曲线关于坐标原点(0,0)成中心对称的曲线，也是此微分方程的积分曲线.

证　明　设微分方程的积分曲线为 $y=f(x)$，代入原微分方程有 $4x^2f'^2(x)=f^2(x)=xf^3(x)$.

再设与积分曲线 $y=f(x)$ 成中心对称的曲线为 $y=g(x)$，且有 $f(-x)=-g(x)$，则 $f'(-x)=g'(x)$.

在方程 $4x^2f'^2-f^2(x)=xf^3(x)$ 中用 $-x$ 代替 x 得

$$4(-x)^2f'^2(-x)-f^2(-x)=-xf^3(-x),$$

即　$4x^2[f'(-x)]^2-[-f(-x)]^2=x[-f(-x)]^3$,

则有　$4x^2g'^2(x)-g^2(x)=xg^3(x)$,

这就证明了与微分方程的积分曲线关于原点成中心对称的曲线也是微分方程的积分曲线.

8 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程：
(1)曲线上任一点的切线与该点的径向夹角为 α；
(2)曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l；
(3)曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2；
(4)曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分；
(5)曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；
(6)曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项；
(7)曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

解题过程 (1)设曲线 $y=f(x)$，任一点 (x,y) 处曲线的切线斜率为 $k=y'=f'(x)$，该点处径向斜率为 $k_1=\frac{y}{x}$. 当该点的切线与该点的径向夹角为 α 时有关系式 $\tan\alpha=\frac{k-k_1}{1+kk_1}$，代入得所求的微分方程为 $\tan\alpha=\dfrac{y'-\frac{y}{x}}{1+y'\cdot\frac{y}{x}}$，即 $xy'-y=(x+yy')\tan\alpha$ 或 $y'=\dfrac{y+x\tan\alpha}{x-y\tan\alpha}$.

(2)设曲线 $y=f(x)$，任一点 (x,y) 处曲线斜率为 $k=y'$，
则切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，其中 (X,Y) 为切线上的动点坐标.
切线在 x,y 坐标轴上截距分别为

$$\overline{X}=x-\frac{y}{y'}\text{和}\overline{Y}=y-xy'.$$

由题意知，$\overline{x}^2+\overline{Y}^2=l^2$，即得所求微分方程 $\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2=l^2$.

(3)设曲线 $y=f(x)$，任一点 (x,y) 处曲线斜率为 $k=y'$，
则切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，其中 (X,Y) 为切线上的动点坐标.
切线在 x,y 坐标轴上截距分别为 $\overline{X}=x-\frac{y}{y'}$，和 $\overline{Y}=y-xy'$.

由题意知，$\frac{1}{2}|\overline{x}\cdot\overline{Y}|=a^2$，即 $(y-xy')^2=2a^2|y'|$.

因此，所求的微分方程为 $\left|(y-xy')\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=2a^2$.

(4)设曲线 $y=f(x)$ 任一点 (x,y) 处曲线斜率为 $k=y'$，
则切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，其中 (X,Y) 为切线上的动点坐标.
切线与 x 轴，y 轴的交点分别为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$ 和 $(0,y-xy')$.

由题意知，$\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right)=x$，$\frac{1}{2}(y-xy')=y$，

整理得所求的微分方程 $xy'+y=0$.
(5)设曲线 $y=f(x)$，任一点 (x,y) 处曲线斜率为 $k=y'$，