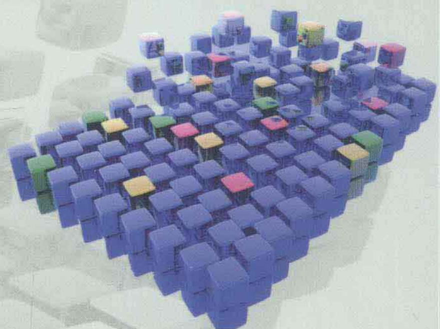
高等学校教材

空间解析几何

纪永强 编著



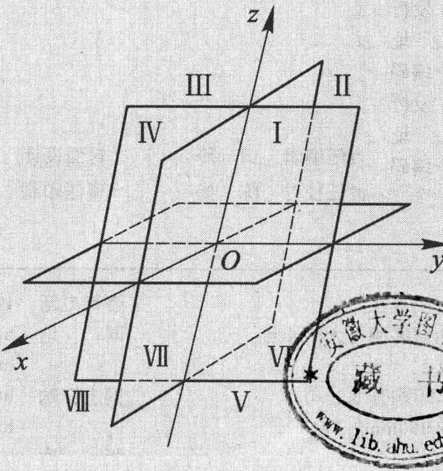
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

◎高等学校教材

空间解析几何

Kongjian Jiexi Jihe

纪永强　编著



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书根据综合大学、师范院校数学类专业的空间解析几何课程大纲编写，共分五章，研究了矢量与坐标，平面与空间直线，空间曲面与空间曲线，柱面、锥面、旋转曲面和其他二次曲面以及二次曲线的化简与分类。

本书可以作为综合大学和师范院校的空间解析几何课程的教材，还可供其他学习解析几何课程的广大读者作为教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/纪永强编著. --北京:高等教育出版社,2013.1

ISBN 978-7-04-036537-5

Ⅰ.①空… Ⅱ.①纪… Ⅲ.①立体几何-解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 305103 号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 田 玲　封面设计 于 涛　版式设计 余 杨
插图绘制 黄建英　责任校对 陈 杨　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京东君印刷有限公司
开 本 787mm × 960mm 1/16
印 张 19
字 数 340 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2013 年 1 月第 1 版
印 次 2013 年 1 月第 1 次印刷
定 价 29.80 元

物 料 号 36537-00

前言

数学分析、高等代数和空间解析几何是大学数学系新生的最主要的基础课程，学好空间解析几何对于学习数学分析、高等代数、微分几何和力学等课程都有很大的帮助，并且它本身的内容对于解决一些实际问题，特别是平面几何和立体几何的有关问题是很有用的。

本书讨论了矢量的各种运算，利用矢量法和坐标法建立了曲面和空间曲线的一般方程和参数方程，特别对于平面和空间直线作了详细的研究，研究了它们的相互位置关系和数量关系；并用多种方法建立了柱面、锥面和旋转曲面的一般方程和参数方程；对椭球面、双曲面和抛物面，就它们的标准方程讨论了其性质和图形；使用四种方法把二次曲线的一般方程化简为标准方程，方法新颖简便，并且准确地作出二次曲线的图像。

因为全书的内容较多且讲解细致、清楚，所以教师在教学时可以有重点、选择性地讲解。另外，很多例题是一题多解，可以选择讲解一种方法，其他方法让学生自己阅读。

本书与其他同类教材相比有如下不同之处：

1. 给出了二次曲线的对称点和中心的定义及计算，参见定义 3.3.1 和定义 5.1.4。二次曲线的中心就是它的对称点。如果二次曲线的中心构成一条直线，那么称这条直线为二次曲线的中心直线，中心直线一定是它的对称直线。反之，对称直线不一定是它的中心直线，参见§5.1 的注 1。给出了二次曲线的对称直线的定义及计算。二次曲线的主直径一定是它的对称直线，但对称直线不一定是它的主直径，参见§5.2 的注 2。

2. 给出了很多同类教材中没有的定理。例如，给出了三个矢量的二重矢性积与四个矢量的拉格朗日恒等式是等价的，即定理 1.9.3。给出了平面上点到直线的离差，即定理 2.2.2。给出了二次锥面的一个充要条件，即定理 3.7.6：关于 x,y,z 的三元二次齐次方程一定表示以原点为顶点的二次锥面，反之也成立。还有定理 5.3.2，定理 5.3.4，等等。

3. 给出了两个矢量是否线性相关的几何意义，参见§1.4 的注 2，这也是代数中两个向量是否线性相关的几何意义。给出了三个矢量是否线性相关的几何

意义，参见§1.4的注4，这也是代数中三个向量是否线性相关的几何意义。

4. 给出了经过原点的平面在代数中是哪些量的几何意义：每个经过原点的平面都是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中的二维线性子空间。这是二维子空间的几何意义，参见附录的【7】。每个经过原点的平面方程 $z=ax+by$ 是二维向量空间 $\mathbf{R}^2$ 上的二元线性函数，参见附录的【8】。经过原点的平面的参数方程给出了三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中的线性曲面的几何意义，参见附录的【6】。给出了三元一次齐次方程组的几何意义，见§2.3的注4。

5. 给出了平面 $\mathbf{R}^2$ 上及空间 $\mathbf{R}^3$ 中经过原点的直线在代数中是哪些量的几何意义：平面 $\mathbf{R}^2$ 上经过原点的直线是二维向量空间 $\mathbf{R}^2$ 中的一维线性子空间。每个经过原点的直线方程 $y=ax$ 是一维向量空间 $\mathbf{R}$ 上的一元线性函数，参见附录的【8】。空间 $\mathbf{R}^3$ 中经过原点的直线是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一维线性子空间。每个经过原点的直线的参数方程 $x=at, y=bt, z=ct(t\in\mathbf{R})$ 是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中的线性曲线，参见附录的【10】。

6. 给出了把二次曲线的一般方程化为标准方程的简便化方法，见定理5.3.2和定理5.3.4。

7. 求一般柱面和一般锥面的方程，多数教材只给出了一种方法来求它们的方程，本书至少给出三种以上的方法，见定理3.6.1、定理3.6.2、定理3.6.5及定理3.7.1、定理3.7.2和定理3.7.4。特别地，对于特殊的锥面，求它的方程有八种方法，见§3.8的例3。求旋转曲面的方程也有多种方法。

8. 给出了解析几何中很多代数式的更进一步的解释或几何意义。如§2.3的注4，§2.5的注1，§2.7的注2，§2.8的注3，§4.4的注1、注2和注3，等等。

9. 给出了柱面坐标与球面坐标变换的更深入的讨论，见§3.5。给出了柱面坐标变换在数学分析中的应用，见§4.3的注3。给出了球面坐标变换在数学分析中的应用，见§4.1的注2。

10. 把平面解析几何的有关内容融入到空间解析几何里面。例如，平面曲线的一般方程与参数方程的互化，见§3.1，给出了圆、椭圆、双曲线的参数方程中参数 t 的几何意义；又如，求平面曲线关于点、关于直线的对称曲线，见§3.3的(3.3.5)式和(3.3.7)式，等等。把空间解析几何中的有关量与代数中的有关量密切联系到一起，这样有利于学生在今后学习代数和分析中找到具体的几何模型。

11. 给出了两个矢量的内积就是代数中三维欧氏空间中的内积，参见§1.6的注6，或附录的【4】。

12. 给出了平面上任一点关于经过原点的直线的对称点，由此得出从二维

向量空间到二维向量空间的正交变换，参见§3.3的注1或附录的【12】。给出了空间中任一点关于经过原点的平面的对称点，由此得出从三维向量空间到三维向量空间的正交变换，参见§3.3的注2或附录的【13】。

13. 给出了两个变元的二次型的几何意义，参见§5.3的注8。

14. 给出了用矩阵的行初等变换法求解三元一次方程组的一个具体例子，参见§2.3的注5或附录的【9】。

15. 给出了把二次型化简为标准二次型，从而把二次曲面的一般方程化简为标准方程的方法。具体例子参见§3.7的注6或附录的【16】，或§5.3的注7或附录的【18】。

16. 给出了利用柱面坐标变换(2种方法)和球面坐标变换(2种方法)等7种方法求空间球体的体积，参见§3.5的注5，或附录的【15】。

17. 每节都提供了典型的例题，很多例题是作者编写的，并且注重了一题多解。

本书是作者长期教改实践的研究成果，许多内容曾在本科教学中多次试用、反复实践。书中还包括许多改革与创新之处，体现了作者近年来的科研思想与成果。

本书论证严谨简明，叙述深入浅出，条理清晰。实践证明，本教材中所采用的方法具有良好的可操作性，既便于教又易于学。

由于作者水平有限，书中缺点和错误在所难免，诚恳地希望专家及广大读者批评指正。

作者

2012年7月

目录

第一章

矢量与坐标

平面解析几何就是在平面上建立平面直角坐标系，用平面曲线的方程这种代数方法来研究平面曲线的几何性质. 在平面直角坐标系下，平面曲线 C 上的点 M 的坐标 (x,y) 与方程 $F(x,y)=0$ 或 $y=f(x)$ 之间如果有关系：曲线 C 上的任一点 M 的坐标 (x,y) 满足方程，满足方程的任意一组解 (x,y) 是曲线 C 上某一点的坐标，则称该方程为平面曲线 C 的一般方程，曲线 C 为方程的图像.

平面解析几何主要研究平面上的直线 $L: Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq 0)$ 和平面上的二次曲线 $C: a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0\ (a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0)$. 特别，选取适当的坐标系，建立椭圆、双曲线和抛物线的标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 和 $y^2=2px$，用方程这种代数方法研究二次曲线本身的几何性质，以及研究直线与直线、直线与曲线、曲线与曲线的其他几何性质，如交点、曲线的切线等.

空间解析几何就是在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中建立坐标系（一般取空间直角坐标系研究较为简单），用空间曲面 S 的方程 $F(x,y,z)=0$ 这种代数方法来研究曲面 S 本身的几何性质，主要是建立二次曲面以及柱面、锥面和旋转曲面的方程，再研究它们的几何性质；曲面与曲面的交线 C 的方程就是方程组 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$ 特别，研究空间中的平面和直线，以及平面与平面、平面与直线、直线与直线的几何性质.

我们首先在空间中引进矢量及它的运算，并通过矢量来建立坐标系，使得点用有序数组（称为它的坐标）来表示，从而几何图形可以用方程来表示，几何图形问题就转化为代数问题，因而能用代数的方法来研究几何.

矢量及其代数运算本身也很重要，利用它可以解决空间及平面几何中的有关问题，它在力学、物理学中也有重要的应用.

为了书写方便，我们使用下面的一些符号：“$\Rightarrow$”表示“必要性”，“$\Leftarrow$”表示“充分性”，“$\Leftrightarrow$”表示“充要条件”或“的充要条件是”或“等价于”，“$\triangleq$”表示“记作”，“ $\triangleq$”表示“定义为”，“$\mathbf{R}$”表示“实数集”或实数域上的一维向量空间，“$\mathbf{R}^2$”表

示"平面"或实数域上的二维向量空间,"$\mathbf{R}^3$"表示实数域上的三维向量空间.

§1.1　矢量及两矢量的加减法

1. 矢量的概念

定义 1.1.1　既有大小又有方向的量叫矢量.

矢量用小写字母加上箭头来表示,如矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$,在印刷时,通常用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$表示矢量.

如力、加速度、位移、速度等都是矢量.矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以用有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示,此时箭头不能省略,这条有向线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小,也叫矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模或模长,有向线段$\overrightarrow{AB}$的方向(自 A 到 B)表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

利用矢量的模,我们可以定义零矢量与单位矢量如下.

定义 1.1.2　(1) 若 $|\boldsymbol{a}|=0$,则矢量 $\boldsymbol{a}$ 称为零矢量,即 $\boldsymbol{a}\triangleq\boldsymbol{0}$.零矢量 $\boldsymbol{0}$ 的方向不定.不是零矢量的矢量叫非零矢量.

(2) 若 $|\boldsymbol{a}|=1$,则矢量 $\boldsymbol{a}$ 称为单位矢量.当 $|\boldsymbol{a}|\neq1$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量记作 $\boldsymbol{a}^0$,即 $|\boldsymbol{a}^0|=1$.

利用矢量的长度和方向,我们可以定义相等矢量与相反矢量如下.

定义 1.1.3　(1) 若两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同,则称它们是相等矢量,即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

(2) 若两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相反,则称它们是相反矢量,即 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$.

将矢量$\overrightarrow{AB}$平行移动得到矢量$\overrightarrow{CD}$,则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.我们讲的矢量都是自由矢量,即:长度相等方向相同的矢量是同一个矢量.

定义 1.1.4　(1) 若两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都平行于同一条直线,则称它们是共线矢量,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;

(2) 若三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都平行于同一平面,则称它们是共面矢量.

显然,一组共线矢量一定是共面矢量;三个矢量中如果有两个矢量是共线的,则它们是共面的;若三个矢量都垂直于同一个非零矢量,则这三个矢量共面.规定:零矢量与任意矢量是共线的.

2. 矢量的和与性质

定义 1.1.5　(矢量和的三角形法则)给定空间中的任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,在空间中任取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则矢量$\overrightarrow{OB}$定义为两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,即

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\triangleq\overrightarrow{OB}. \tag{1.1.1}$$

显然有,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,等号当且仅当两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时成立.见图 1.1.1.

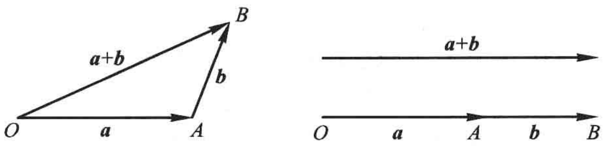


图 1.1.1

当两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，得一平行四边形 $OACB$，由矢量和的定义及相等矢量我们得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，此法称为矢量和的平行四边形法则．此时，矢量和的三角形法则与平行四边形法则等价．

定理 1.1.1 矢量的和满足以下运算律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(2) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

(3) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(4) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是空间中的任意矢量．

证明 由矢量和的定义知，(1)式和(2)式显然成立．

(3) 设两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，作平行四边形 $OACB$，则

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},\quad \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

故结论成立．当两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，留给读者自己证明．

(4) 任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，则得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$成立．

由两个矢量和的三角形法则，可以得到 n 个矢量的和．给定 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，在空间中任取一点 O，作$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则它们的和为$\overrightarrow{OA_n}$，即

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\triangleq\overrightarrow{OA_n}. \tag{1.1.2}$$

特别，当 $A_n\equiv O$ 时，$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}O}=\overrightarrow{OO}=\boldsymbol{0}$．如在三角形 ABC 中，有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}.$$

3．矢量的差与性质

定义 1.1.6 若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则

$$\boldsymbol{c}\triangleq\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}. \tag{1.1.3}$$

此定义相当于移项变号，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，则上面的定义为：若$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，于是对于空间中任意一点 O，矢量$\overrightarrow{BC}$为

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}. \tag{1.1.4}$$

从而我们得到，三角形 OBC 的一条边上的矢量$\overrightarrow{BC}$等于终点 C 对应的一条边上的矢量$\overrightarrow{OC}$减去起点 B 对应的另一条边上的矢量$\overrightarrow{OB}$. 见图 1.1.2.

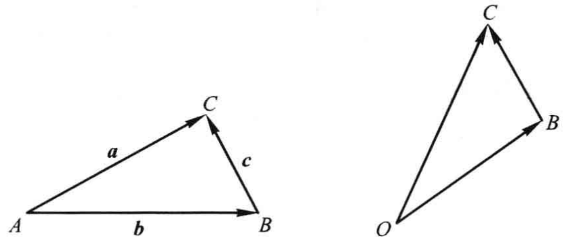


图 1.1.2

容易证明下面定理成立.

定理 1.1.2　矢量的减法满足以下运算律：

(1) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$；

(2) $\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

例 1　在平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，求$\overrightarrow{AC_1}$和$\overrightarrow{A_1C}$. 见图 1.1.3.

解　(1) $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，或

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(2) $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，或

$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

例 2　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于 O 点，已知 $AO=OC$，$BO=OD$，用矢量法证明：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，即对角线互相平分的四边形是平行四边形. 见图 1.1.4.

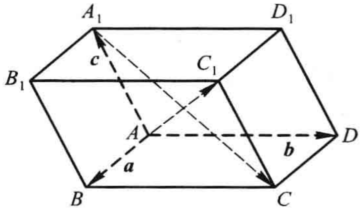


图 1.1.3

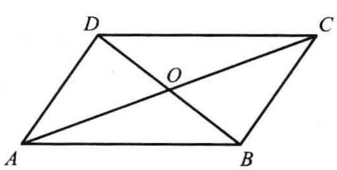


图 1.1.4

证明 已知$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$,因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

所以$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$,即四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

习题 1-1

1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形?

(1) 把空间中的一切单位矢量归结到共同的始点;

(2) 把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点;

(3) 把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点.

2. 设在平面上给定了一个四边形 $ABCD$,点 K,L,M,N 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点,求证$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. 当四边形 $ABCD$ 是空间四边形时,这个等式是否也成立?

3. 当矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 必须满足什么几何性质时,以下各式才成立?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;　　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

§1.2 数量乘矢量

1. 概念

我们知道,位移、力、速度与加速度等都是矢量,而时间、质量等都是数量,这些矢量与数量常常会发生某些结合关系. 例如:质量 m 乘加速度 $\boldsymbol{a}$ 就是力 $\boldsymbol{f}$,即 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$. 又如,时间 t 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的积是矢量位移 $\boldsymbol{s}$,即 $\boldsymbol{s}=t\boldsymbol{v}$. n 个相同非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 的和是矢量 $n\boldsymbol{a}$,$n\boldsymbol{a}$ 的方向与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,矢量 $n\boldsymbol{a}$ 的模 $|n\boldsymbol{a}|=n|\boldsymbol{a}|$.

定义 1.2.1 实数 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个矢量,它的长度定义为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|, \tag{1.2.1}$$

矢量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向定义为:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

由定义 1.2.1 我们得:

(1)
$$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}; \tag{1.2.2}$$

(2) 与非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量 $\boldsymbol{a}^0$ 和矢量 $\boldsymbol{a}$ 有关系

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0. \tag{1.2.3}$$

2. 数乘矢量满足的运算律

定理 1.2.1 数乘矢量满足与数因子的结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}, \tag{1.2.4}$$

其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{a}$ 是任意矢量.

证明 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,$\lambda\mu\neq 0$(否则结论显然成立),因为

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda|\,|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\mu|\,|\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu|\,|\boldsymbol{a}|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|,$$

所以矢量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与矢量 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的模相等. 当 λ 与 μ 同号时,$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 和 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;当 λ 与 μ 异号时,$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 和 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反,所以等式成立.

定理 1.2.2 矢量对数量的和满足分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}, \tag{1.2.5}$$

其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{a}$ 是任意矢量.

证明 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,$\lambda\mu\neq 0$,$\lambda+\mu\neq 0$(否则结论显然成立).

(1) 若 $\lambda\mu>0$,这时 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向,并且

$$\begin{aligned}|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|&=|\lambda+\mu|\,|\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)\,|\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|+|\mu|\,|\boldsymbol{a}|\\&=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,\end{aligned}$$

所以 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

(2) 若 $\lambda\mu<0$,不妨设 $\lambda>0$,$\mu<0$,再区分 $\lambda+\mu>0$ 与 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 下面只证明前一种情形,后一种情形可以相仿证明.

设 $\lambda>0$,$\mu<0$,$\lambda+\mu>0$,这时 $(-\mu)(\lambda+\mu)>0$,由(1)得

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu\boldsymbol{a})=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a},$$

所以 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-(-\mu\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

定理 1.2.3 数对矢量的和满足分配律

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}, \tag{1.2.6}$$

其中 $\lambda\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是任意矢量.

证明 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,$\lambda\neq 0$(否则结论显然成立).

(1) 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,取 $m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,取 $m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$,由矢量相等的定义得

$$\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}. \tag{1.2.7}$$

因此,根据(1.2.4)式和(1.2.5)式得

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}]\\&=(\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b}=(\lambda m)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(m\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

(2) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,则以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为相邻两边的 $\triangle OAB$ 与以 $\lambda\boldsymbol{a}$ 和 $\lambda\boldsymbol{b}$ 为相邻两边的 $\triangle OA_1B_1$ 相似,因此 $\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1}$. 又因为

$$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OB_1}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$

所以 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 1　用矢量法证明:平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 互相平分.

证明　设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$M$ 是 AC 的中点,只证$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$即可. 因为

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$,得$|\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{MD}|$且 B,M,D 三点共线. 所以平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 互相平分.

例 2　设 M 是$\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,求$\overrightarrow{AM}$.

解法 1　因为 M 是$\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点,所以$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 故

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\&=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

解法 2　因为 M 是 BC 边上的中点,所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$,故

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\overrightarrow{AM}),$$

移项再除以 2 得

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

解法 3　因为 M 是 BC 边上的中点,所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{0}$. 由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{BM},\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{b}+\overrightarrow{CM},$$

两式相加得

$$2\,\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

故$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

例 3　设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,证明:$A,B,D$ 三点共线.

证法 1　因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\\&=2\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}=2\,\overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

所以 A,B,D 三点共线.

证法 2　因为

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB},$$

所以 A,B,D 三点共线.

例 4　设 M 和 N 分别是$\triangle ABC$ 的 AB 边和 AC 边上的中点,证明三角形的

中位线定理：$MN /\!/ BC$ 且 $MN=\frac{1}{2}BC$.

证法 1　因为 M 和 N 分别是$\triangle ABC$ 的 AB 边和 AC 边上的中点，所以

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

又因为

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以 $MN /\!/ BC$ 且 $MN=\frac{1}{2}BC$.

证法 2　因为

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以 $MN /\!/ BC$ 且 $MN=\frac{1}{2}BC$.

证法 3　因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

所以 $MN /\!/ BC$ 且 $MN=\frac{1}{2}BC$.

注 1　矢量也称为向量，参见附录的【1】.

习题 1-2

1. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

2. 当矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 必须满足什么几何性质时，以下各式才成立？

(1) $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$；　　(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

3. 在空间四边形 $ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c},\overrightarrow{CD}=5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{c}$. 设对角线 AC,BD 的中点分别是 E 和 F，求 $\overrightarrow{EF}$.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$. 证明：四边形 $ABCD$ 为梯形.

5. 设 L,M 和 N 分别是$\triangle ABC$ 的 BC,CA,AB 边上的中点，证明：

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\mathbf{0}.$$

6. 设梯形 $ABCD$ 的两腰 AD 和 BC 的中点分别是 M,N. 用矢量法证明梯