

普通高等教育“十二五”规划教材

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

主编 邢 佳 郭金萍

主审 王明春

上册



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等应用数学

(上册)

主编 邢 佳 郭金萍
主审 王明春

内 容 简 介

本书分为上下两册,主要介绍了预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数、常微分方程等共 12 章内容.

本书对课后习题在难易程度上进行了细化,供学生自主选择,同时还增加了相关的数学实例及科学家简介.本书可作为普通高等院校各专业高等数学课程的教学用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学.上册/邢佳,郭金萍主编.一天津:天津大学出版社,2012.9

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5618-4415-1

I. ①高… II. ①邢…②郭… III. ①应用数学-高等学校-教材 IV. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 173088 号

出版发行 天津大学出版社

出 版 人 杨欢

地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)

电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742

网 址 publish.tju.edu.cn

印 刷 河北省昌黎县思锐印刷有限责任公司

经 销 全国各地新华书店

开 本 185mm×260mm

印 张 17.75

字 数 443 千

版 次 2012 年 9 月第 1 版

印 次 2012 年 9 月第 1 次

定 价 39.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

《高等应用数学(上册)》

编 委 会

主编 邢 佳 郭金萍

参编 (按姓氏音序排列)

陈 超 郭阁阳 凌 光

汤国明 王明春 许 茵

张效华 赵小山

主审 王明春

前 言

本书是编者结合多年教学实践编撰而成,适合普通高校各专业学生使用.针对技校生源学生基础知识的相对薄弱,编者适当删减了传统高等数学中较难理解的部分,增加了初等数学相关的预备知识,适当增加了相关实例及科学家简介,同时对课后习题在难易程度上进行了细化,供学生自主选择.本书分为上、下两册.上册内容包括:预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数等7章,书末还附有初等数学常用公式及各章习题参考答案.

在本书上、下两册共12章编撰过程中,郭阁阳编写了第1章和第3章章节内容,陈超编写了第2章章节内容,凌光编写了第4章章节内容,赵小山编写了第5章章节内容,汤国明编写了第6章章节内容,郭金萍编写了第7章章节内容,邢佳编写了第8章和第9章章节内容,王明春编写了第10章章节内容,许茵编写了第11章章节内容,张效华编写了第12章章节内容.

在此框架基础之上,邢佳对上册第1章至第6章教材内容进行多次地推敲和修订,郭金萍对上册第7章教材内容进行了多次推敲和修订,同时主编还对课后习题进行了多次演算和调整.最后,王明春又对教材的终稿进行了详细的审核.

限于编者水平有限及时间仓促,教材中难免有错漏之处,恳请广大读者及各位同人批评指正.

主 编

2012年7月

目 录

第1章 预备知识	(1)
第1节 集合	(1)
第2节 函数	(3)
第3节 复合函数和反函数	(7)
第4节 初等函数	(10)
第5节 极坐标	(14)
总习题1	(15)
第2章 极限与连续	(17)
第1节 数列的极限	(17)
第2节 函数的极限	(23)
第3节 无穷小与无穷大	(29)
第4节 极限运算法则	(31)
第5节 极限存在准则与两个重要极限	(36)
第6节 无穷小的比较	(41)
第7节 函数的连续性与间断点	(46)
第8节 连续函数的运算与初等函数的连续性	(52)
第9节 闭区间上连续函数的性质	(55)
总习题2	(58)
相关科学家简介 刘徽	(60)
第3章 导数与微分	(61)
第1节 导数的概念	(61)
第2节 函数的求导法则	(69)
第3节 高阶导数	(74)
第4节 隐函数的导数	(77)
第5节 由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	(81)
第6节 函数的微分	(85)
总习题3	(92)
相关科学家简介 牛顿	(94)
第4章 微分中值定理及导数应用	(95)
第1节 微分中值定理	(95)
第2节 洛必达法则	(100)
第3节 泰勒公式	(105)
第4节 函数的单调性和曲线的凹凸性	(110)
第5节 函数的极值与最值	(116)

第6节 函数图形的描绘	(122)
第7节 曲率	(125)
总习题4	(129)
相关科学家简介 拉格朗日	(131)
第5章 不定积分	(132)
第1节 原函数与不定积分	(132)
第2节 换元积分法	(139)
第3节 分部积分法	(149)
第4节 有理函数的积分	(153)
总习题5	(160)
相关科学家简介 柯西	(163)
第6章 定积分及其应用	(164)
第1节 定积分的概念及性质	(164)
第2节 微积分基本公式	(170)
第3节 定积分的换元法及分部积分法	(174)
第4节 反常积分	(181)
第5节 定积分的应用	(184)
总习题6	(197)
相关科学家简介 莱布尼茨	(199)
第7章 空间解析几何与向量代数	(200)
第1节 向量及其线性运算	(200)
第2节 数量积 向量积 *混合积	(209)
第3节 平面及其方程	(217)
第4节 空间直线及其方程	(222)
第5节 曲面及其方程	(227)
第6节 空间曲线及其方程	(236)
总习题7	(240)
相关科学家简介 欧几里得	(241)
附录一 初等数学常用公式	(242)
附录二 各章习题参考答案	(246)

第 1 章 预备知识

函数是现代数学的基本概念之一,是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映,是高等数学研究的主要对象.本章我们将对中学已经学过的集合、函数、极坐标等知识进行简要的回顾、梳理和必要的补充,为高等数学的学习打下坚实的基础.

第 1 节 集 合

一、集合

1. 集合的概念

集合是指具有某种特定性质的事物的总体,组成这个集合的事物称为该集合的元素.

下面举几个集合的例子.

例 1 2011 年元月 1 日在天津市出生的人口.

例 2 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的根.

例 3 平面上所有等腰三角形.

例 4 抛物线 $y = x^2$ 上所有的点.

通常用大写字母 $A, B, X, Y, \dots$ 等表示集合,用小写字母 $a, b, x, y, \dots$ 等表示集合的元素.若 x 是集合 A 的元素,则称 x 属于 A ,记作 $x \in A$;若 x 不是集合 A 的元素,则称 x 不属于 A ,记作 $x \notin A$.

由有限个元素构成的集合,称为**有限集**,如例 1,例 2;由无限多个元素构成的集合,称为**无限集**,如例 3,例 4.

不含有任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$.例如,方程 $x^2 + 4 = 0$ 的实根构成的集合,即为空集.

2. 集合的表示

集合的表示方法通常有列举法和描述法.

列举法:在大括号中按任意顺序、不遗漏、不重复地列出集合的所有元素.

例 5 若集合 A 仅由 2、4、6、8、10 组成,则可记作 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

描述法:指明集合中元素所具有的确定性质,一般形式为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例 6 方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解集,记为 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$.

元素为数的集合称为**数集**,通常用 $\mathbf{N}$ 表示**自然数集**, $\mathbf{Z}$ 表示**整数集**, $\mathbf{Q}$ 表示**有理数集**, $\mathbf{R}$ 表示**实数集**, $\mathbf{C}$ 表示**复数集**,有时在数集的字母右上角添“+”、“-”等上标来表示该数集的几个特定子集.以实数为例, $\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数组成的集合, $\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数组成的集合.其他数集的情况类似.

3. 集合之间的关系

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A). 规定空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集.

若 A 是 B 的子集, 而 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

若集合 A 与集合 B 互为子集, 即 $A \subset B$ 且 $A \supset B$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

4. 集合的基本运算

集合的基本运算有以下几种: 交、并、差.

交集: 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

并集: 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

差集: 由所有属于集合 A 但不属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的差集, 记为 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

我们把研究某一问题时所考虑的对象全体称为全集, 并用 I 表示, 把差集 $I \setminus A$ 称为 A 的余集或补集, 记作 A^c .

集合的并、交、补运算满足如下运算律:

交换律 $A \cup B = B \cup A$,

$$A \cap B = B \cap A;$$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

二、区间

区间是用得较多的一类数集.

实数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记为 (a, b) ; $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记为 $[a, b]$; $\{x \mid a \leq x < b\}$ 称为半闭半开区间, 记为 $[a, b)$; $\{x \mid a < x \leq b\}$ 称为半开半闭区间, 记为 $(a, b]$, a, b 称为区间的端点.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看, 这些有限区间是长度有限的线段, 如图 1-1(a)、(b) 所示.

引进记号 $+\infty$ 读作正无穷大, $-\infty$ 读作负无穷大, 则可用类似记号表示无限区间 (图 1-1(c)、(d)), 例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\},$$

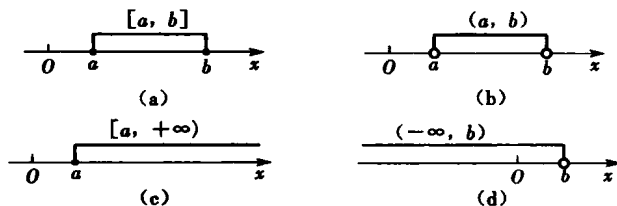


图 1-1

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

注 当不需要辨明区间是否包含端点、是否有限或无限时,常将其简称为“区间”,并常用 I 表示.

三、邻域

设 a, δ 是两个实数,且 $\delta > 0$, 数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$. 其中,点 a 叫做该邻域的中心, δ 叫做该邻域的半径. 它在数轴上表示以 a 为中心,长度为 2δ 的对称开区间,如图 1-2 所示.

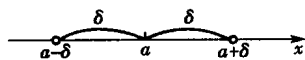


图 1-2

数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\dot{U}(a, \delta)$.

把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a, a + \delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

习 题 1-1(A)

1. 写出 $A = \{0, 1, 2\}$ 的一切子集.
2. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$. 求:
 - (1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \cup B \cup C$; (4) $A \cap B \cap C$; (5) $A \setminus B$.
3. 如果 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求:
 - (1) A^c ; (2) B^c ; (3) $A^c \cup B^c$; (4) $A^c \cap B^c$.
4. 用区间表示下列点集:
 - (1) $\{x \mid 0 < |x - 1| < 2\}$; (2) $\{x \mid x^2 - x - 2 \geq 0\}$.

习 题 1-1(B)

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$, 计算 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$.
2. 设 A 有 n 个元素,问 A 共有多少个子集, A 的真子集有多少个?

第 2 节 函数

一、函数概念

定义 1 设 D 是一个给定的非空数集,若存在一个对应法则 f ,使得对 D 中任意一个数

x , 依照 f 都有确定的数值 y 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的函数, 记为

$$y = f(x), x \in D.$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f .

当自变量 x 取数值 x_0 时, 因变量 y 按照法则 f 所取定的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$.

当自变量 x 取遍定义域 D 的每个数值时, 对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域, 记作 R_f .

函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围, 而因变量 y 又是由对应法则 f 来确定的, 所以函数实质上是由其定义域 D 和对应法则 f 所确定的, 因此通常称函数的定义域和对应法则为函数的两个要素. 也就是说, 只要两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 就称这两个函数为相同的函数, 与变量用什么符号表示无关, 如 $y = |x|$ 与 $z = \sqrt{v^2}$, 就是相同的函数; 而 $y = 1$ 与 $g = \frac{x}{x}$ 是不相同的函数, 因为定义域不同.

二、函数的表示

函数的表示方法主要有表格法、图形法、解析法.

表格法: 自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

图形法: 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

解析法(公式法): 自变量与因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法.

下面举几个常用函数的例子.

例 1 常数函数

$$y = 2.$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{2\}$, 图形是平行于 x 轴的直线, 如图 1-3 所示.

例 2 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = [0, +\infty)$, 图形如图 1-4 所示.

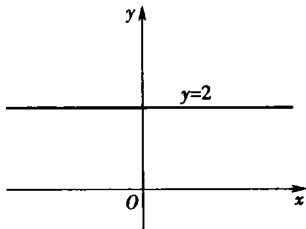


图 1-3

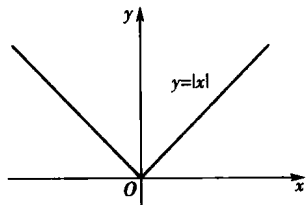


图 1-4

例 3 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 图形如图 1-5 所示.

例 4 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$. 例如 $[0.5] = 0$, $[3.7] = 3$. 把 x 看做变量, 则函数

$$y = [x]$$

的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \mathbb{Z}$, 图形如图 1-6 所示.

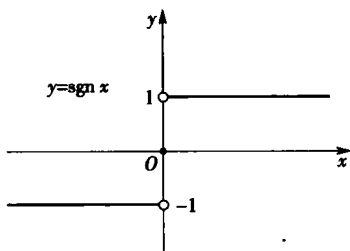


图 1-5

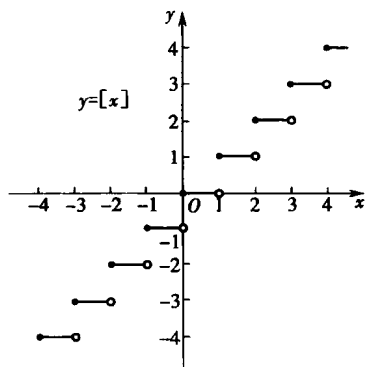


图 1-6

例 5 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{0, 1\}$.

三、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在数 K_1 , 使得 $f(x) \leq K_1$ 对于任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界; 如果存在数 K_2 , 使得 $f(x) \geq K_2$ 对于任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界, 而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界; 如果存在数 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$ 对于任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $y = f(x)$ 在 X 上有界; 如果不存在这样的正数 M , 则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

容易证明, 函数 $y = f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

例 6 函数 $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ 内, 恒有 $|\tan x| \leq \sqrt{3}$, 所以函数 $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ 内是有界函数, 而 $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是无界函数.

注 有的函数可能在定义域的某一部分有界, 而在另一部分无界, 因此一般说函数有界或无界应同时指出其自变量的相应范围.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的; 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的, 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

若函数 $y = f(x)$ 是区间 I 上的单调函数, 则称区间 I 为函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$ 都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数; 若对任意 $x \in D$ 都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称, 如图 1-7 所示.

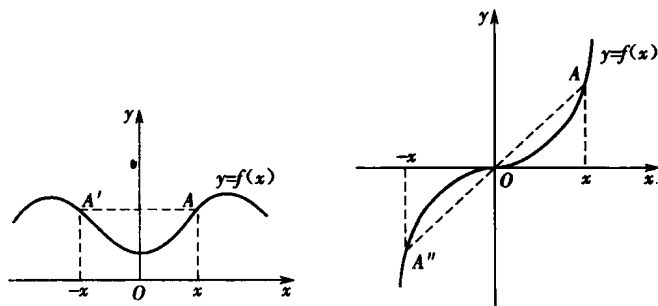


图 1-7

既不是奇函数也不是偶函数的函数, 称为非奇非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在常数 $T > 0$, 使对于任意 $x \in D$, $x \pm T \in D$, 有

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称函数 $y = f(x)$ 是周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如 $\sin x, \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

习 题 1-2(A)

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{4 - x^2};$$

$$(2) y = \frac{5}{1 + x^2};$$

$$(3) y = \frac{\ln(x-3)}{\sqrt{9-x}};$$

$$(4) y = \frac{e^{1-x^2}}{\sqrt{x^2 - x - 2}}.$$

2. 判断下列函数 $f(x), g(x)$ 是否相同:

$$(1) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = e^{\ln x};$$

$$(3) f(x) = x - 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}; \quad (4) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x.$$

3. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad (2) f(x) = x(x - 1)(x + 1);$$

$$(3) f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}; \quad (4) f(x) = \sin x - \cos x + 1.$$

4. 判断下列函数的单调性:

$$(1) y = x + \ln x; \quad (2) y = \frac{x}{1 - x}.$$

5. 判断下列函数是否为周期函数,如果是周期函数,指出其最小正周期:

$$(1) y = \sin^2 x; \quad (2) y = \cos 4x; \quad (3) \cos \frac{1}{x}.$$

习 题 1-2(B)

1. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的函数,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数;偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

2. 证明:函数 $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$ 是有界函数.

3. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加,证明: $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

第3节 复合函数和反函数

一、复合函数

定义1 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义,值域为 $g(D)$, 若 $g(D) \subset D_f$, 则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], x \in D,$$

称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数,其中 x 为自变量, y 为因变量, u 称为中间变量.

例1 讨论下列复合函数是如何复合而成的:

$$(1) y = (\cos x)^2; \quad (2) y = \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(3) y = \ln(\tan e^{x^2 + 2\sin x}).$$

解 (1) 所给函数是由 $y = u^2$ 和 $u = \cos x$ 两个函数复合而成的.

(2) 所给函数是由 $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = w^{-\frac{1}{2}}$, $w = x^2 + 1$ 四个函数复合而成.

(3) 所给函数是由 $y = \ln u$, $u = \tan v$, $v = e^w$, $w = x^2 + 2\sin x$ 四个函数复合而成.

二、反函数

定义 2 设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, $f(x)$ 的值域为 $f(D)$, 如果对任意的 $y \in f(D)$, 都有唯一的 $x \in D$ 满足 $f(x) = y$, 就得到了定义在 $f(D)$ 上的一个函数, 称其为函数 f 的反函数. 通常记作 $x = f^{-1}(y)$, $y \in f(D)$, 其定义域为 $f(D)$, 值域为 D .

一般常以 x 表示自变量, y 表示函数, 故反函数又记为 $y = f^{-1}(x)$, $x \in f(D)$. 可见, 若 $P(a, b)$ 是函数 $f(x)$ 的图形上的点, 则 $Q(b, a)$ 是反函数 $f^{-1}(x)$ 的图形上的点; 反之也一样, 因此在同一坐标平面上, $f(x)$ 的图形与 $f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的, 如图 1-8 所示.

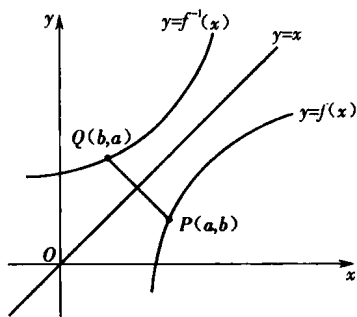


图 1-8

需要说明的是, 并不是任意一个函数都存在反函数.

定理(反函数存在定理) 设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的单调函数, 则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 必存在, 且 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 有相同的单调性.

证 不妨设函数 $y = f(x)$ 是单调递增的, 对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 于是对于任意 $y \in f(D)$ 都存在唯一的一个 $x \in D$, 使得 $f(x) = y$, 所以函数 $f(x)$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$; 再证 $f^{-1}(x)$ 在 $f(D)$ 上也是单调递增的, 对于任意 $y_1, y_2 \in f(D)$, 且 $y_1 < y_2$, 则必有 $x_1, x_2 \in D$, 使 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, 所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 又因为函数 f 是单调递增的, 所以有 $x_1 < x_2$, 即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, 说明反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也是单调递增的.

对于函数 $y = f(x)$ 是递减的情形类似可证.

求反函数的步骤一般为:

第一步, 由 $y = f(x)$ 求出 x , 即用 y 表示 x ;

第二步, 将 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x, y 对换;

第三步, 得到 $y = f^{-1}(x)$, 并标明其定义域.

例 2 求函数 $y = 3x + 5$ 的反函数.

解 由

$$y = 3x + 5,$$

可解得

$$x = \frac{y-5}{3},$$

交换 x, y 的位置, 即得所求反函数

$$y = \frac{x-5}{3},$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

三、函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域依次为 D_1, D_2 , $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, 则我们可以定义这两函数的下列运算.

函数的和差: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $x \in D$.

函数的积: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in D$.

函数的商: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in D$ 且 $\{x \mid g(x) \neq 0\}$.

例3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明必存在 $(-l, l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$, 使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

证 做

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

易知 $g(x)$ 为偶函数, $h(x)$ 为奇函数, 且

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = g(x) + h(x).$$

证毕.

习 题 1-3(A)

1. 讨论下列复合函数是由哪些函数复合而成的:

$$(1) y = \sin 3x; \quad (2) y = e^{\frac{2}{x-3}}.$$

2. 求下列复合函数的定义域:

$$(1) y = \sin \sqrt{x-2}; \quad (2) y = \ln(x^2 - 5).$$

3. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = 1 + \ln(x+2); \quad (2) y = \frac{1-x}{1+x}.$$

4. 设 $f(x)$ 的定义域为 $D = [0, 1]$, 求下列复合函数的定义域:

$$(1) f(x+2); \quad (2) f(\cos x);$$

$$(3) f(x^2); \quad (4) f(e^x - 1).$$

习 题 1-3(B)

1. 已知函数 $f(x) = x^3 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$, 求 $f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

2. (1) 设 $f(\sin x) = \cos 2x + 1$, 求 $f(\cos x)$.

(2) 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

第4节 初等函数

一、基本初等函数

1. 幂函数 函数

$$y = x^{\mu} \quad (\mu \text{ 为常数})$$

叫做幂函数.

幂函数的定义域随 μ 而异,但不论 μ 取何值,它在 $(0, +\infty)$ 内总有定义,而且图形都经过 $(1, 1)$ 点.例如:当 $\mu = 3$, $\mu = 1$, $\mu = -1$ 时,其图形如图1-9所示.

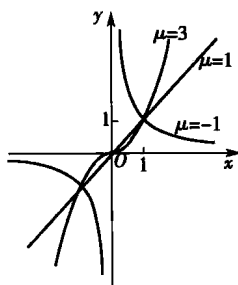


图 1-9

2. 指数函数 函数

$$y = a^x \quad (a \text{ 为常数且 } a > 0, a \neq 1)$$

叫做指数函数,它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,值域是 $(0, +\infty)$.

因为对任意实数 x ,总有 $a^x > 0$ 且 $a^0 = 1$,所以指数函数的图形总在 x 轴的上方,且经过点 $(0, 1)$.

若 $a > 1$,指数函数 $y = a^x$ 是单调增加的.

若 $0 < a < 1$,指数函数 $y = a^x$ 是单调减少的,其图形如图1-10所示.

另外,易知函数 $y = a^{-x}$ 与函数 $y = a^x$ 的图形关于 y 轴对称.

3. 对数函数 函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, a \text{ 为常数})$$

叫做对数函数,它的定义域是 $(0, +\infty)$,值域是 $(-\infty, +\infty)$.

显然它的图形始终位于 y 轴的右方,并通过点 $(1, 0)$,如图1-11所示.

当 $a > 1$ 时,对数函数 $y = \log_a x$ 在定义域上是单调增加的,在区间 $(0, 1)$ 内函数值为负,在区间 $(1, +\infty)$ 内函数值为正.

当 $0 < a < 1$ 时,对数函数 $y = \log_a x$ 在定义域上是单调减少的,在区间 $(0, 1)$ 内函数值为正,在区间 $(1, +\infty)$ 内函数值为负.