冯伟杰 魏光美 李美生 吴纪桃 编著

上

高等数学习题课教材

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn

高等数学习题课教材

上

冯伟杰
魏光美
李美生
吴纪桃
编著

清华大学出版社
北京

内容简介

《高等数学习题课教材》分上、下两册，可以作为高等数学课程的辅助教材在本科教学中应用. 本书习题经过精心筛选，配题全面，类型丰富，层次分明，由浅入深，既能学习巩固又能拓展扩充基础知识，有利于各种水平学生进行选择性练习，尤其适合优秀学生进行全方位练习.

本书所有习题配备了答案，对典型的题目给出了详细解答，以方便学生自学. 书末还附有期中和期末考试模拟试题及解答. 希望读者能通过反复多次的训练，达到熟能生巧的目的，为高等数学课程学习和数学竞赛打下坚实的基础.

本书可供高等学校理工科非数学专业的本科生使用，也可作为大学生数学竞赛的辅导教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教材. 上/冯伟杰等编著. --北京：清华大学出版社，2012. 9
ISBN 978-7-302-29697-3

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①冯…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 187369 号

责任编辑：佟丽霞　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230mm　**印　张**：11.25　**字　数**：199 千字
版　次：2012 年 9 月第 1 版　**印　次**：2012 年 9 月第 1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：19.90 元

产品编号：047504-01

前　言

2003年北京航空航天大学高等数学课程获得北京市精品课程建设立项，由此，我们的课程建设工作进入了一个新的阶段. 作为总结、继承、改革和发展的一个重要标志，我们组织编写了高等数学教材和这套《高等数学习题课教材》，以适应新形势、新目标下对教学的要求，更好地为后续课程提供必要的理论基础和知识准备.

2008年北京航空航天大学高等数学课程再获批进行国家精品课建设，我们对教学过程进一步优化，部分成果就固化在本套习题课教材中. 经过这几年在本校本科教学中的应用，已经证明了这套教材所配的习题对相当层次的学校和学生都是适用的. 本书的目的在于使课堂教学和课后训练有机配合，让学生接受严格而充分的练习，从而达到学好数学的两个基本要求——理解与熟练. 近年来，北航的学生连续在北京市乃至全国数学竞赛中取得了优异成绩，这也从一个侧面反映了这套教材在大班课的辅助教学中的成功.

本书是作者在多年教学和辅导过程中经过总结、精选、反复斟酌后才编写完成的. 书中习题覆盖面广，类型丰富，重点突出，层次分明，难易兼顾. 从易到难被分为三类：第一类题是有关内容的基本概念、重要定理和常用方法，它们被置于每章相应小节中，难度适中；第二类题有一定的技巧性和综合性，是对课程内容的巩固、补充和拓展；第三类题带有较高的难度，具有一定的挑战性；第二、三类题被安排在每章的自测题中，其中第三类题被标以“*”号. 因此每章的自测题是本书重要的部分. 另外，每章最后一节都会提出若干启发读者思考的问题，能突出并深化本章关键的内容、核心的概念等. 本书所有习题都配备了答案，对典型的题目给出了详细解答，以方

便读者自学检查．最后，书末还附有期中和期末考试模拟试题、数学竞赛真题及解答．希望读者能进行选择性或全方位练习，通过反复多次的训练，达到深刻理解概念、定理和方法的目的，为高等数学课程学习和数学竞赛打下坚实的基础．

本书在编写过程中，得到北航高等数学课程组全体老师们的支持和帮助，他们在本科教学中多次使用并提出了许多宝贵的修改意见，特此表示感谢！在此基础上，作者进行多次调整和改写，并加以分类整合，依照教学上由浅入深的原则进行组织与汇编．上册内容由冯伟杰老师修改并统稿，下册内容由李美生老师修改并统稿．本书是针对高等数学课程知识和非数学专业的数学竞赛而编写的，可供高等学校理工科非数学专业的本科生使用，也可作为大学生数学竞赛的辅导教材使用．

书中的习题有一些是作者原创的，有些是摘自其他一些参考资料．虽然本书的作者长期主讲本课程，并具备丰富的大学生数学竞赛辅导经验，但是不妥和错误之处在所难免，真诚地希望有关专家、读者给予批评指正，以便总结经验，不断改进和提高．

作　者
2012.6

目 录

函数与极限

第1章

1.1 数列极限

一、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$________.

2. 设$|a|<1,|b|<1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}=$________.

3. 设$a_n=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2(1+2+\cdots+k)}\right]^n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}=$________.

5. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,则$f(x)=$________.

二、选择题

1. 若数列$\{a_n\}$有极限a,则在a的ε邻域之外,数列中的点________.

(A) 必不存在;

(B) 至多只有有限多个;

(C) 必定有无穷多个;

(D) 可以有有限多个,也可以有无穷多个.

2. 若数列$\{a_n\}$在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$邻域内有无穷多个数列中的点,则________.

(A) $\{a_n\}$必有极限,且极限为a;

(B) $\{a_n\}$必有极限,但极限未必为a;

(C) $\{a_n\}$的极限不一定存在;

(D) $\{a_n\}$一定不存在极限.

3. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $a_n>0$,则必有________.

(A) $a>0$;　　(B) $a\geqslant 0$;　　(C) $a=0$;　　(D) $a\neq 0$.

4. 设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,则下列断言正确的是________.

(A) 若$\{a_n\}$发散,则$\{b_n\}$必发散;

(B) 若$\{a_n\}$无界,则$\{b_n\}$必有界;

(C) 若$\{a_n\}$有界,则$\{b_n\}$必为无穷小;

(D) 若$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为无穷小,则$\{b_n\}$必为无穷小.

5. 设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$,则下列描述正确的是________.

(A) $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$都收敛,且收敛于同一极限值;

(B) $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$都收敛,但极限值未必相同;

(C) $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$都发散;

(D) 三者同时收敛或同时发散.

三、解答题

1. 回答下列问题.

(1) 若$\{a_n\}$收敛,$\{b_n\}$发散,则$\{a_n\pm b_n\}$的敛散性如何?

(2) 若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都发散,则$\{a_n\pm b_n\}$和$\{a_nb_n\}$的敛散性如何?

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$,$\{b_n\}$发散,则$\{a_nb_n\}$的敛散性如何?

(4) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\{b_n\}$发散,则$\{a_nb_n\}$的敛散性又如何?

(5) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\{b_n\}$有界,则$\{a_nb_n\}$的敛散性如何?

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}(a>0)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}(a>0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)^{\frac{1}{n}}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$.

3. 利用单调有界原理讨论$\{a_n\}$的收敛,并求该极限值.

(1) 设 $0<a_1<1$,$a_{n+1}=a_n(2-a_n)$,$n=1,2,\cdots$;

(2) 设 $a_1=10$,$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$,$n=1,2,\cdots$;

(3) 设 $a_1=1$,$a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$,$n=1,2,\cdots$.

4. 利用夹逼性求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(2\cos^2 n+\sin^2 n)^{\frac{1}{n}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}(a_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m)$；

(4) 设 $a_n\leqslant a\leqslant b_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

四、证明题

1. 用极限定义证明.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$，并举例说明此命题的逆命题不真；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，并举例说明当 $a=0$ 时不能得出上述结论；

(3) 若 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$；

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，由此可以说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0;$$

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=\max\{a,b\}$.

2. 证明：

(1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$；

(2) 数列 $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ 的极限存在.

3. 求证：如果单调数列有一子列收敛，那么原数列也必收敛.

4. 设 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，证明：

(1) 数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增，$\{b_n\}$ 严格单调递减；

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$；

(3) 令 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，该极限常记为 γ，叫做欧拉(Euler)常数，更进一步有：$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

5. (1) 设 $a_n\to a$，$b_n\to b(n\to\infty, b\neq 0)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a}{b}$；

(2) 设 $a_n\to a$，$b_n\to b(n\to\infty)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$.

1.2 函数极限与连续性

一、填空题

1. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$________.

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\tan x}=$ ________.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=$________.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

二、选择题

1. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则下列极限一定存在的是________.

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^\alpha(\alpha\in\mathbb{R})$;　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$;

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln[f(x)]$;　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$.

2. 设 $x\to0$ 时,$e^{\tan x}-e^{\sin x}$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 $n=$________.

(A) 1;　　(B) 2;　　(C) 3;　　(D) 4.

3. 下列命题正确的是________.

(A) 设 $f(x)$在 x_0 的邻域内有定义,且$\lim\limits_{h\to0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$,则 $f(x)$在 x_0处连续;

(B) 若 $f^2(x)$在 x_0 处连续,则 $f(x)$也在 x_0 处连续;

(C) 若 $f(x)$在 x_0 处连续,则$|f(x)|$也在 x_0 处连续;反之亦然;

(D) $f(x)$在 x_0 处连续的充要条件是对任意点列$\{x_n\}$,只要$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,必有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

4. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\dfrac{1}{2}$,则常数 a,b 的值为________.

(A) $a=1,b=-\dfrac{3}{2}$;　　(B) $a=-1,b=\dfrac{3}{2}$;

(C) $a=-1,b=1$;　　(D) $a=1,b=-1$.

5. 方程 $x^4-x-1=0$ 至少有一个根的区间是________.

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；　(B) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$；　(C) $(2,3)$；　(D) $(1,2)$.

三、解答题

1. 计算下列极限(其中 m,n 为正整数).

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$；　(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2-1})$.

2. 利用等价无穷小替换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$；　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan^4x}{\sin^3x(1-\cos x)}$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}(x\neq0)$；　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}(x\neq0)$.

3. 利用函数的连续性求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin2x)^{\frac{1}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}(1+e^x\sin^2x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{x^2}}$；　(8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

4. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\sin x}}-1}{x(e^x-1)}=1$，且 $f(x)$ 与 cx^k 是等价无穷小，试求 c,k 的值.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数,试确定 a,b 的值.

6. 求下列函数的间断点,并判别间断点的类型.

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x}, & x\neq -1\\ 0, & x=-1\end{cases}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$;

(3) $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$.

四、证明题

1. 证明:当 $x\to 0$ 时,$\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在极限.

2. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[xf(x)]}{x}=A$.([·]表示函数取整)

3. 设定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,$f(2x)=f(x)$,$\forall x\in(0,+\infty)$,试证明:$f(x)\equiv 0$,$x\in(0,+\infty)$.

4. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且存在 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$,求证 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

5. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且存在 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A<0$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B>0$,求证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且满足 $f(x)>0$,$x\in[a,b]$,求证存在正数 K,使得 $f(x)\geqslant K$,$x\in[a,b]$.

7. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$,使 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{T}{2}\right)$.

8. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

1.3　自测题

一、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-x-1, & x\leqslant 1\\ 2x-x^2, & x>1\end{cases}$,则 $f(0)+f(2)=$________.

2. $f(x)=\begin{cases} g(x), & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数，则 $g(x)=$ ________.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=$ ________.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x+a}{x-1}=b$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

5. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}, & x\neq 0 \\ A, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $A=$ ________.

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$，$x\in\mathbb{R}$，则 $f(x)=$ ________.

7. 若 $a>0$，$b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ________.

*8. 设 $\{x_n\}$ 满足 $n\sin\dfrac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\dfrac{1}{n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=$ ________.

*9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=$ ________.

*10. 函数 $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{\sin\pi x}$ 的所有可去间断点是 ________.

二、选择题

1. 若 ε 为任意给定的正数，则数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a 的充要条件为 ________.

(A) $U(a,\varepsilon)$ 内有 $\{a_n\}$ 的全部点；

(B) $U(a,\varepsilon)$ 内有 $\{a_n\}$ 的无穷多个点；

(C) $U(a,\varepsilon)$ 外有 $\{a_n\}$ 的有限多个点；

(D) 前面 3 个选择均不正确.

2. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的 ________.

(A) 充分但非必要条件；　　(B) 必要但非充分条件；

(C) 充分必要条件；　　(D) 既非充分也非必要条件.

3. $f(x)=\dfrac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ________.

(A) 可去间断点；　　(B) 跳跃间断点；
(C) 无穷间断点；　　(D) 震荡间断点.

4. $f(x)$在点 x_0 处连续，且存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>0$，则必有________.

(A) $f(x_0)>0$；　(B) $f(x_0)\geqslant 0$；　(C) $f(x_0)=0$；　(D) $f(x_0)\neq 0$.

5. $f(x)$在$[a,b]$上连续，则________.

(A) $f(x)$在(a,b)内有界；
(B) $f(x)$在(a,b)内存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$；
(C) $f(x)$在(a,b)内可能无界；
(D) $f(x)$在(a,b)内有最大最小值.

6. 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$________.

(A) 存在且等于零；　　(B) 存在但不一定为零；
(C) 一定不存在；　　(D) 不一定存在.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$________.

(A) $-10\ln 3$；　(B) $-\dfrac{10}{\ln 3}$；　(C) $10\ln 3$；　(D) $\dfrac{10}{\ln 3}$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\neq 1,-2\\ 2, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则________.

(A) $a=2,b=-3$；　　(B) $a=-1,b=0$；
(C) $a=1,b=-2$；　　(D) $a=0,b=-1$.

9. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n+(2x)^{2n}}(x\geqslant 0)$，则此函数________.

(A) 没有间断点；
(B) 有一个第一类间断点；
(C) 有两个以上第一类间断点；
(D) 有两个以上间断点，但类型不确定.

*10. 设 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x=e$，可去间断点 $x=1$，则________.

(A) $a=e,b=1$；　　(B) $a=1,b=e$；
(C) $a=e,b=e$；　　(D) a,b 之值不能确定.

三、解答题

1. 计算下列极限(其中 m,n 为正整数).

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{50}(2n-1)^{50}}{(3n+2)^{100}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\sin x}{e^x-\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-2x+3})$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\ln\left(a+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(a-\dfrac{1}{n}\right)-2\ln a\right]$　$(a>0)$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$　$(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$;

(9) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2. 讨论数列$\{a_n\}$的敛散性,并且如果收敛的话,求极限值.

(1) 设 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$,其中 $a>0,a_1>0$;

*(2) 设 $a_n>0,a_n+\dfrac{4}{a_{n+1}^2}<3,n=1,2,\cdots$;

*(3) 设 $b>0,a_1>0$,定义 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3a_n+\dfrac{b}{a_n^3}\right),n=1,2,\cdots$.更一般地如果 $b>0,a_1>0$,定义 $a_{n+1}=\dfrac{1}{m}\left[(m-1)a_n+\dfrac{b}{a_n^{m-1}}\right],n=1,2,\cdots$,其中 m 是正整数.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+2)}{\sin(\pi x)}, & x<0,x\neq-n\\ \dfrac{\sin x}{x^2-1}, & x\geqslant0,x\neq1\end{cases}$,试讨论函数 $f(x)$的连续性,并且如果有间断点的话,则指明间断点的类型.

四、证明题

1. 证明当 $n\to\infty$时,数列$\left\{n\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$发散,但不是无穷大.

2. 设 $f(x)$在$(a,b]$内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在,证明 $f(x)$在$(a,b]$上有界.

3. 证明 3 次多项式至少有一个零点.

4. 设 $f(x)$在$[0,2]$上连续,且 $f(0)=f(2)$,证明至少存在一点 $c\in[0,1]$,使 $f(c)=f(c+1)$.